КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА · ЛЕНИНГРАД · 1948

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

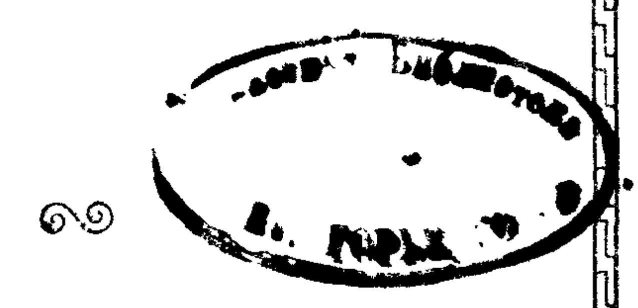
КНИГИ I-VI

Перевод с греческого
и комментарии

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

при редакционном
участии

М. Я. ВЫГОДСКОГО
и
И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО



ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА · ЛЕНИНГРАД · 1948



ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Значение «Начал» Евклида трудно переоценить. В течение двух тысячелетий люди изучали геометрию по «Началам» Евклида. Все систематические школьные курсы геометрии, непосредственно или через промежуточные звенья, испытывают на себе влияние «Начал». Их перевод на русский язык является поэтому не только данью классическому произведению древности, но и событием, весьма важным для преподавания геометрии в школе.

Перевод «Начал» Евклида сделан мной с греческого текста издания Гейберга. Я старался быть как можно ближе к греческому тексту, порой даже в ущерб гладкости изложения. Так же, как Петрушевский, Энриквес и Хизс, я даю риторического Евклида, решительно отказываясь перекладывать что-либо из «Начал» на современную алгебраическую символику, как это делают другие переводчики, в том числе и Гейберг. Такая символика тесно связана с идеями, совершенно чуждыми Евклиду.

Мой перевод предназначается не только для учителя, который мог бы удовлетвориться вольным переводом вроде перевода Ващенко-Захарченко, но и для лиц, ведущих работу по истории математики, заинтересованных в получении неискажённого Евклида.

При переводе даны комментарии *); большая часть материала этих комментариев взята из моего архива, накоплен-

*) В связи с изданием «Начал» Евклида на русском языке Издательство одновременно публикует ряд статей (М. Я. Выгодского, А. И. Маркушевича и др.), посвящённых «Началам». Эти статьи, помещённые в первом выпуске «Историко-математических исследований» (Гостехиздат, 1948), помогут желающим более глубоко изучить творение Евклида.

ного в моей многолетней историко-математической работе. Многое является результатом собственных размышлений, часть взята преимущественно из старинных комментариев, о которых я буду упоминать в своих примечаниях.

В новейших больших изданиях «Начал», осуществлённых Энриквесом и Хизсом, я нашёл мало материала, который мог бы быть мной использован. Характер комментариев Хизса совершенно другой: Хизс большой знаток истории текста, но не глубокий знаток старинных комментариев и учебников.

Между тем, главное содержание моих комментариев состоит в описании различных евклидовых положений в эволюционирующем в продолжение 400 лет геометрическом учебнике. Можно сказать, что я задаюсь целью дать «Начала» Евклида сначала такими, какими они были в прошлом, т. е. в их первоначальной форме, а затем такими, какими они становятся в процессе эволюции математической мысли, превращаясь постепенно в школьный учебник геометрии.

Конечно, я рассчитываю дать не только 6 первых книг, но все 15 книг, т. е. все «Начала» полностью, причём также с комментариями, относя арифметические книги и книгу X ко второму тому, а стереометрические книги к третьему.

На русском языке мы в прошедшем имели следующие переводы:

1739. Сатаров. «Евклидовы элементы» (8 книг), сокращённые проф. А. Фархварсоном, пер. с латинского. Спб.

1769. Курганов. «Елементы геометрии» (8 книг), пер. с французского. Спб.

1784. Пр. Суворов и Вас. Никитин. «Евклидовых стихий осмь книг», пер. с греческого. Спб. (2-ое изд. 1789).

1819. Петрушевский. Евклидовых Начал осемь книг, пер. с греческого. Спб.

1835. Его же. Евклидовых Начал три книги: седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую теорию чисел древних геометров, пер. с греческого.

1880. Ващенко-Захарченко. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованием. Киев.

Ващенко-Захарченко не указывает, сделан ли им перевод с греческого или латинского языка. Перевод его очень *вольный* и местами *неправильный*. Есть основание предполагать, что он сделан с латинского издания Р. Симсона, довольно свободно обращавшегося с текстом Евклида; отсюда и взяты большей частью его комментарии, которые пополнены замечаниями переводчика, в общем довольно поверхностными. Нельзя, однако, отрицать, что издание это, несмотря на свои недостатки, оказалось очень полезным.

Свой перевод я делал, не имея под рукой перевода Петрушевского, написанного языком XVIII в. и, конечно, в настоящее время совершенно неприемлемого. Но ознакомление с ним уже по выполнении перевода убедило меня в том, что этот перевод очень хороший; хотя местами понимание Петрушевским текста не согласуется с моим, но мне кажется, что ему нельзя отказать в хорошем понимании «Начал».

При чтении текста «Начал» нужно иметь в виду следующие обозначения.

Числа в круглых скобках ( ) указывают номер соответствующего комментария; кроме того, в круглых же скобках даются ссылки на нужное предложение «Начал», на которое опирается доказательство в рассматриваемом месте [напр.: «(предложение 11 книги I)» или просто «(предложение 11)», когда даётся ссылка на предложение той же самой книги]; нужно иметь в виду, что соответствующие ссылки сделаны Гейбергом и в самом тексте Евклида не содержатся. В тексте Гейберга чертежи не нумерованы. Нумерация их дана нами.

В квадратных скобках [ ] помещены слова, принадлежность которых Евклиду Гейберг считает сомнительной, но не настолько, чтобы прямо исключить их из издаваемого текста.

В угловатых скобках ⟨ ⟩ помещены добавления переводчика, необходимые для понимания иногда слишком сжатого текста Евклида.

В кавычках « » помещены термины, представляющие буквальный перевод специфической научной терминологии Евклида во избежание недоразумений; например, прямая

«из центра», — это выражение стоит там, где мы просто сказали бы «радиус»; поскольку Евклид последнего термина не употребляет, то приходится его термин ставить в кавычки, чтобы читатель не подумал, что здесь идёт дело вообще о какой-то проходящей через центр прямой.

Звёздочкой *) или цифрой, например [1]), [2]) и т. д., обозначаются ссылки на подстрочные примечания.

Я надеюсь, что мои комментарии дадут толчок как историко-математической, так и методической работе над «Началами» Евклида; дальнейшие исследователи возможно вскроют и мои ошибки, за указание которых я буду весьма признателен.

Приношу свою благодарность проф. Марку Яковлевичу Выгодскому за ряд ценных указаний и советов, использованных мною, и за любезную помощь в пользовании малодоступными источниками.

Приношу свою благодарность также проф. Ивану Николаевичу Веселовскому, затратившему совместно с проф. М. Я. Выгодским большой труд на редактирование перевода «Начал» Евклида и комментариев, в процессе которого был исправлен ряд дефектов.

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГИ

I-VI

КНИГА ПЕРВАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ (1)

1. Точка (2) есть то, что не имеет частей *).

2. Линия (3) же — длина без ширины.

3. Концы же линии — точки.

4. Прямая (4) линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

5. Поверхность (5) есть то, что имеет только длину и ширину.

6. Концы же поверхности — линии.

7. Плоская поверхность (6) есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

8. Плоский же угол (7) есть наклонение друг к другу двух линий **), в плоскости встречающихся ***) друг с другом, но не расположенных по ⟨одной⟩ прямой.

9. Когда же линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.

10. Когда же прямая, восстановленная на ⟨другой⟩ прямой, образует рядом углы ****), равные между собой, то

---

*) Точка у Евклида σημεῖον. Аристотель чаще пользуется словом στιγμή, чем σημεῖον, в противоположность Платону. Этим двум греческим терминам соответствуют латинские signum и punctum, причём второй термин более распространён.

**) Евклидово κλίσις (склонение, наклон) Марцианом Капеллой (V в. н. э.) переводится словом inclinatio — наклонение.

***) У Евклида «касающихся» (ἁπτομένων).

****) Вместо евклидовых αἱ ἐφεξῆς γωνίαι Герон употребляет термин ἀντικείμεναι — лежащие напротив друг друга. В русской литературе установился термин «смежные углы».

каждый из равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром *) к той, на которой она восставлена (8).

11. Тупой угол — больший прямого (9).

12. Острый же — меньший прямого.

13. Граница **) есть то, что является оконечностью чего-либо (10).

14. Фигура (11) ***) есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.

15. Круг (12) есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [которая называется окружностью ****)], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие [на окружность круга] прямые равны между собой (13).

16. Центром же круга называется эта точка (14).

17. Диаметр же круга есть какая угодно прямая, проведённая через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.

18. Полукруг же есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им <частью> окружности. Центр же полукруга — то же самое, что и у круга.

19. Прямолинейные (15) фигуры суть те, которые содержатся между прямыми, трёхсторонние *****) — между тремя, четырёхсторонние же — четырьмя, многосторонние же — которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.

---

*) У Евклида «отвесная» (κάθετος — без члена). Латинский термин perpendicularis есть буквальный перевод этого слова; от него произошёл и наш обычный термин — перпендикуляр.

**) У Евклида говорится: «ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας». Слово ὅρος — граница, пограничный камень, и πέρας — край, оконечность, не соответствуют математическому термину «предел».

Слово ὅρος употребляется и в смысле определения (definitio) и в смысле границы (terminus). Для греков определить какой-нибудь объект — значило отграничить его от других.

***) Греческому слову σχῆμα отвечают два латинских figura и forma.

****) Термин «окружность» (περιφέρεια — буквально «обвод») Евклид употребляет и в смысле дуги и в смысле целой окружности.

*****) У Евклида τρίπλευρα. Переводить словом «треугольный» нельзя; для этого имеется специальный термин τρίγωνον, который Евклид и употребляет ниже без особого определения.

20. Из трёхсторонних фигур равносторонний треугольник *) есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же — имеющая только две равные стороны, разносторонний **) же — имеющая три неравные стороны.

21. Кроме того, из трёхсторонних фигур прямоугольный треугольник есть имеющий прямой угол, тупоугольный же — имеющий тупой угол, а остроугольный — имеющий три острых угла.

22. Из четырёхсторонних фигур квадрат ***) есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная, разносторонник ****) же — прямоугольная, но не равносторонняя, ромб — равносторонняя, но не прямоугольная, ромбоид (параллелограмм) — имеющая противоположные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней ни прямоугольной.

---

*) У Евклида ἰσόπλευρον τρίγωνον — буквально «равностороння треугольная» (подразумевается «фигура»). Здесь и всюду мы будем переводить просто «треугольник».

**) У Евклида σκαληνός. На русском языке нет подходящего термина: косой или косоугольный обозначает нечто совсем другое. Специальное название для разностороннего треугольника показывает, что этот термин установился в конце исторического развития понятия о треугольнике: первоначально рассматривались лишь правильные треугольники, потом появились равнобедренные и, наконец (возможно в эпоху Евклида), разносторонние, получившие даже особое название. В современной школе при господстве убеждения о необходимости перехода от общего к частному в специальном термине для разностороннего треугольника нет надобности.

***) У Евклида τετράγωνον, т. е. просто «четыреугольник». Ясно, что первым четыреугольником, с которым познакомилась геометрия, был квадрат.

****) У Евклида ἑτερόμηκες — наш прямоугольник в общем смысле. Этот термин встречается у Аристотеля. Интересно, что у Евклида в «Началах» ни этого термина, ни других («ромб», «ромбоид») более уже не встречается. Свойства ромба вообще не изучаются; вместо «ромбоида» же он пользуется термином «параллелограмм» — буквально «параллельнолинейная» (подразумевается фигура). Прямоугольники рассматриваются во 2-й и следующих книгах и называются «прямоугольными параллелограммами». У Архимеда параллелограмм употребляется в смысле нашего прямоугольника.

Остальные же четырёхсторонники будем называть трапециями *) (16).

23. Параллельные **) суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно ***), ни с той ни с другой «стороны» между собой не встречаются ****) (17).

ПОСТУЛАТЫ *****) (18)

Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки ⟨можно⟩ провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую ⟨можно⟩ непрерывно продолжать по прямой******) (19).

3. И что из всякого центра и всяким раствором (20) ⟨может быть⟩ описан круг (21).

4. (Акс. 10.) И что все прямые углы равны между собой (22).

---

*) Трапеция (τραπέζιον — буквально «столик») здесь понимается в смысле четыреугольника общей формы. Герон различает τραπέζια (наши трапеции) и τραπεζοειδῆ (трапецовидные) — трапеции в смысле последнего определения Евклида. Интересно, что у Гиппократа Хиосского употребляются трапеции и притом именно в нашем смысле слова. Возможно, что всё определение 22 в конечном счёте восходит к первому учебнику геометрии — гиппократовым «Элементам», откуда они и были заимствованы Евклидом непосредственно или через промежуточные обработки «Элементов».

**) παράλληλοι = εὐθεῖαι παράλληλας ἠγμμεναι, т. е. прямые, проведённые друг подле друга.

***) Εἰς ἄπειρον — буквально «в неопределённость». Греки избегали нашего понятия «бесконечность».

****) συμπίπτουσιν ἀλλήλαις — совпадают, сталкиваются, встречаются друг с другом, но ни в коем случае не пересекаются.

*****) У Евклида αἰτήματα — требования; соответственно этому Боэций говорит о «petitio» и «postulata».

******) У Евклида ἐπ' εὐθείας — почти что в смысле наречия. Петрушевский образно переводит это одним словом «впрямь», которое в современном языке, к сожалению, получило другой смысл.

5. (Акс. 11.) И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых *), то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых (23).

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ (24)

(Аксиомы)

1. Равные одному и тому же равны и между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые **) будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

[4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

6. И половины одного и того же равны между собой] (25).

7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой (26).

8. И целое больше части (27).

[9. И две прямые не содержат пространства (28).]

Предложение 1 (29, 30)

На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

Пусть данная ограниченная ***) прямая будет AB (черт. 1).

Требуется вот на прямой AB построить равносторонний треугольник.

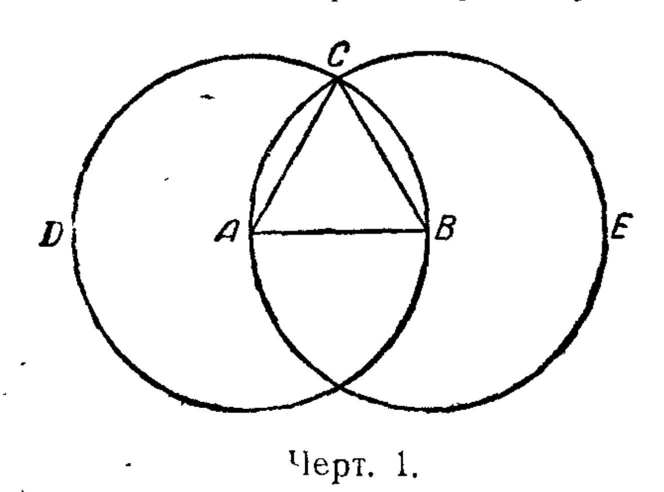
---

*) Мы сказали бы «углы в сумме меньшие двух прямых». Здесь и в дальнейшем мы сохраняем евклидов способ изложения.

**) У Евклида τὰ ὅλα, что вполне точно переводится «целые», а не «суммы»; Евклид не мыслит сложения величин и получаемых после сложения сумм.

***) πεπερασμένη — лучше сказать «ограниченная», чем «конечная».

Из центра *A* раствором *AB* опишем круг *BCD* (постулат 3), и далее из центра *B* раствором *BA* опишем круг *ACE* (постулат 3); и из точки *C*, в которой круги пересекают друг друга, проведём к точкам *A* и *B* соединяющие прямые *CA*, *CB* (постулат 1)*).



Черт. 1.

И поскольку точка *A* есть центр круга *CDB*, то *AC* равна *AB* (определение 15); далее, поскольку точка *B* — центр круга *CAE*, то *BC* равна *BA* (определение 15). Но уже было показано, что и *CA* равна *AB*; значит, каждая из *CA*, *CB* равна *AB*. Но равные одному и тому же равны и между собой (аксиома 1); значит, и *CA* равна *CB*.

Значит, три прямые *CA*, *AB*, *BC* равны между собой.

Значит, треугольник *ABC* равносторонний (определение 20) и построен на данной ограниченной прямой *AB* [значит, на данной ограниченной прямой построен равносторонний треугольник], что и требовалось сделать (31, 32).

Предложение 2

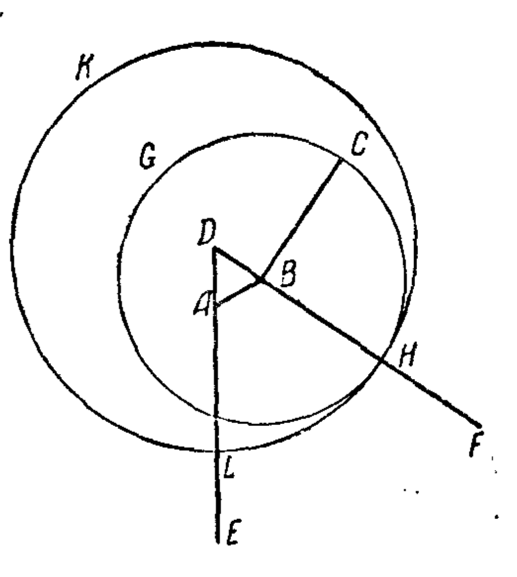
От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

Пусть данная точка будет *A*, заданная же прямая *BC*; требуется вот от точки *A* отложить прямую, равную данной прямой *BC* (черт. 2).

---

*) У Евклида ἀπὸ τοῦ Γ σημείου... ἐπὶ τὰ A, B σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓA, ΓB — буквально «от точки *C*... к точкам *A*, *B* пусть будут соединены (несуществующее на русском языке повелительное наклонение страдательного залога) прямые *CA*, *CB*». Этот оборот нельзя сохранить в русском переводе, где «соединяются» точки, а не прямые, но, с другой стороны, необходимо оттенить различие между «проведём» прямую (ἤχθω) и «соединим» (ἐπεζεύχθω). В дальнейшем у Евклида большей частью употребляется сокращённый оборот ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓA, ΓB — уже без упоминания о прямых).

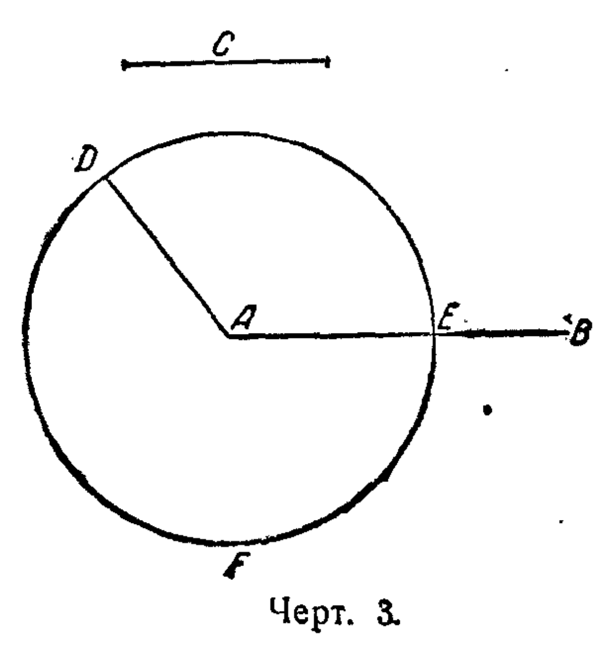
Проведём от точки A к точке B соединяющую прямую AB и построим на ней равносторонний треугольник DAB (предложение 1); по прямым DA и DB продолжим прямые AE, BF, из центра B раствором BC опишем круг CGH (постулат 3) и далее из центра D раствором DH опишем круг HKL (постулат 3).



Черт. 2.

Поскольку теперь точка B — центр круга CHG, то BC равна BH (определение 15). Далее, поскольку точка D — центр круга HKL, то DL равна DH (определение 15), а у них DA равна DB. Значит, остаток AL равен остатку BH (аксиома 3). Но уже доказано, что и BC равно BH; значит, каждая из прямых AL и BC равна BH. Но равные одному и тому же равны и между собой (аксиома 1); значит, и AL равна BC.

Значит, от данной точки A отложена прямая AL, равная заданной BC, что и требовалось сделать.



Черт. 3.

Предложение 3

Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей.

Пусть данные две неравные прямые будут AB и C, из них большая пусть будет AB; вот требуется от большей AB отнять прямую, равную меньшей C (черт. 3).

От точки A отложим AD, равную прямой C (предложение 2); и из центра A раствором AD опишем круг DEF (постулат 3).

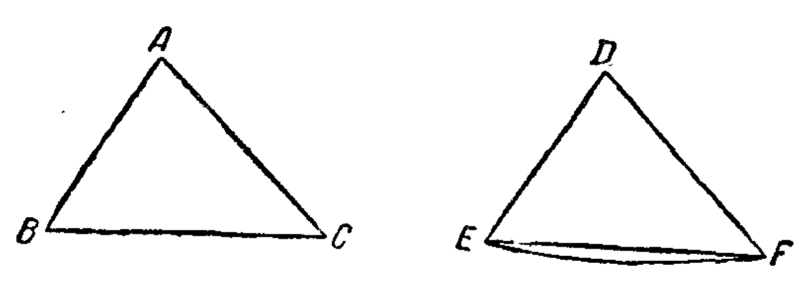
И поскольку точка A — центр круга DEF, то AE равна AD; но и C равна AD; значит, каждая из AE и C равна AD; так что AE равна C (аксиома 1).

Значит, из двух заданных неравных прямых AB и C от большей AB отнята AE, равная меньшей C; это и требовалось сделать (33).

Предложение 4

Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.

Пусть ABC, DEF будут два треугольника, имеющих две стороны AB и AC равными двум сторонам DE и DF каждая каждой, а именно, AB равной DE, а AC равной DF и угол BAC равным EDF (черт. 4). Я утверждаю,



Черт. 4.

что и основание BC будет равно основанию EF, и треугольник ABC будет равен треугольнику DEF, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ABC углу DEF и угол ACB углу DFE. Действительно, если треугольник ABC совмещается с треугольником DEF и кладутся точка A на точку D, а прямая AB на DE, то и точка B совместится с E вследствие того, что AB равна DE; а так как AB совместилась с DE, то и прямая AC совместится

с DF вследствие того, что угол BAC равен EDF; так что и точка C совместится с точкой F вследствие того, что AC тоже равно DF.

Но B уже совместилась с E; так что и основание BC совместится с основанием EF. Действительно, если при совмещении точки B с E, а C с F основание BC не совместилось бы с EF, то две прямые будут содержать пространство (аксиома 9), что невозможно.

Значит, основание BC совместится с EF и будет ему равно; так что и весь треугольник ABC совместится со всем треугольником DEF и будет ему равен, и остальные углы совместятся с остальными и будут им равны, а именно, угол ABC углу DEF и угол ACB углу DFE.

Значит, если два треугольника имеют по две стороны равными каждая каждой и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, что и требовалось доказать (34).

Предложение 5

У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой).*

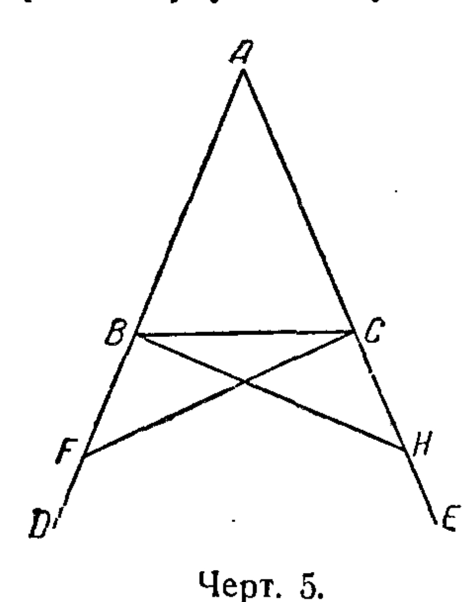
Пусть ABC будет равнобедренный треугольник, имеющий сторону AB, равную стороне AC (черт. 5), и пусть по прямым AB, AC будут продолжены прямые BD, CE (постулат 2).

Я утверждаю, что угол ABC равен углу ACB, а угол CBD углу BCE.

Действительно, на BD возьмём произвольную точку F, от бóльшей AE отнимем AH, равную меньшей AF (предложение 3), и соединим прямыми FC и HB.

*) Свойство равнобедренного треугольника, доказываемое в предложении 5, по свидетельству Прокла, обнаружил ещё Фалес.

Поскольку теперь AF равна AH, а AB равна AC, то вот две <прямые> FA, AC равны двум HA, AB каждая каждой; и они содержат общий угол FAH; значит, основание FC равно основанию HB и треугольник AFC будет равен треугольнику AHB и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому, а именно, угол ACF углу ABH, а угол AFC углу AHB (предложение 4).



Черт. 5.

И поскольку вся AF равна всей AH, и у них AB равна AC, то, значит, и остаток BF равен остатку CH (аксиома 3). Но доказано, что и FC равна HB; вот две прямые BF, FC равны двум прямым CH и HB каждая каждой; и угол BFC равен углу CHB, и основание у них общее BC. Значит, и треугольник BFC равен треугольнику CHB, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, равны каждый каждому (предложение 4); значит, угол FBC равен углу HCB, а угол BCF углу CBH. Поскольку теперь доказано, что весь угол ABH равен всему углу ACF, и у них CBH равен BCF, то следовательно, и остаток ABC равен остатку ACB (аксиома 3) и они находятся при основании треугольника ABC. Доказано же, что и угол FBC равен HCB, и оба они под основанием.

Значит, у равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой. Это и требовалось доказать (35, 36, 37).

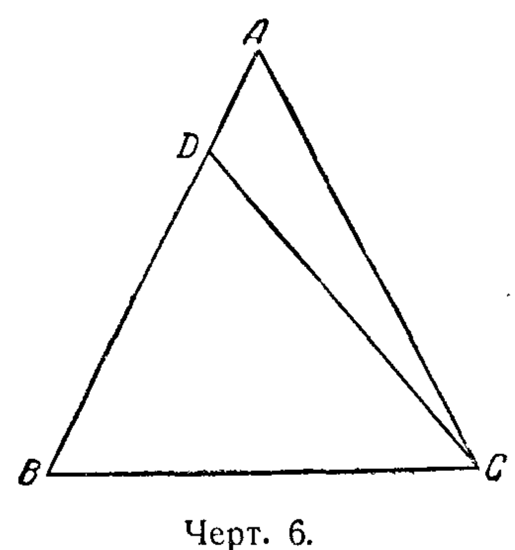
Предложение 6

Если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы.

Пусть ABC будет треугольник, имеющий угол ABC, равный углу ACB; я утверждаю, что и сторона AB равна стороне AC (черт. 6).

Действительно, если <сторона> AB не равна AC, то одна из них больше другой. Пусть будет больше AB; от большей AB отнимем DB, равную меньшей AC, и соединим DC.

Поскольку теперь DB равна AC, а BC общая, и вот две <прямые> DB, BC равны двум AC, CB каждая каждой, и угол DBC равен углу ACB; значит, основание DC равно основанию AB, и треугольник DBC будет равен треугольнику ACB (предложение 4), меньший большему, что нелепо (аксиома 8).



Черт. 6.

Значит, AB не будет не равной AC; значит, она ей равна.

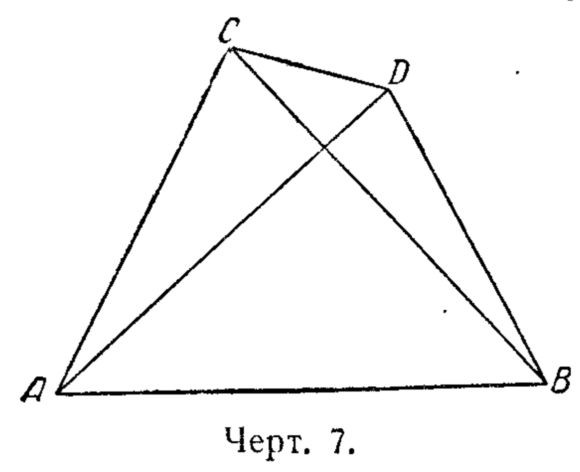
Значит, если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы, что и требовалось доказать (38).

Предложение 7

На одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждая каждой двум другим прямым и <сходящихся> одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми.

Действительно, если возможно, пусть на одной и той же прямой AB будут построены две прямые AD и DB, равные каждая каждой двум другим прямым AC и CB, сходящиеся одни в одной точке C, другие в другой D, находящиеся по одну сторону и имеющие одни и те же концы, так что CA равнялось бы DA, имеющей с ней тот же конец A, а CB равнялось бы DB, имеющей с ней тот же конец B; соединим CD.

Поскольку теперь *AC* равна *AD*, и угол *ACD* равен углу *ADC* (предложение 5), значит, угол *ADC* больше угла *DCB*; значит, и подавно угол *CDB* больше угла *DCB*.



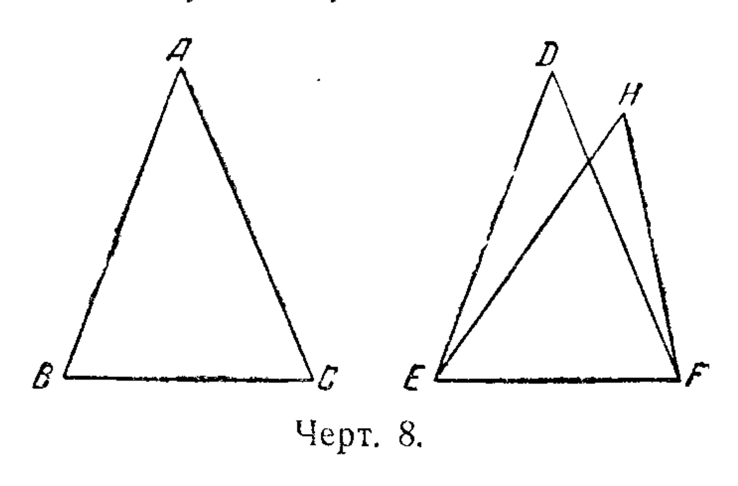
Черт. 7.

Далее, поскольку *CB* равна *DB*, и угол *CDB* равен углу *DCB*. Но доказано, что он и подавно больше его; это же невозможно.

Значит, на одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждая каждой двум другим прямым и сходящихся одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми, что и требовалось доказать.

Предложение 8

Если два треугольника имеют две стороны, равные каждая каждой двум сторонам, имеют также и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол равный углу, заключённому между равными прямыми.



Черт. 8.

Пусть *ABC* и *DEF* будут два треугольника, имеющих две стороны *AB*, *AC*, равные каждая каждой двум сторонам *DE*, *DF*, именно, *AB*, равную *DE*, и *AC*, равную *DF*;

пусть они имеют также и основание BC, равное основанию EF; я утверждаю, что и угол BAC будет равен углу EDF.

Действительно, когда треугольник ABC налагается на треугольник DEF и помещаются точка B на точку E и прямая BC на прямую EF, то и точка C совместится с F вследствие того, что BC равна EF; когда же вот BC совместилась с EF, то совместятся и BA и CA с ED и DF.

Действительно, если основание BC совместится с основанием EF, а стороны BA и AC не совместятся с ED и DF, но уклонятся в сторону, как, например, EH и HF, то на одной и той же прямой будут построены другие две прямые, равные этим двум прямым каждая каждой, ⟨ сходящиеся ⟩ одни в одной точке, другие в другой точке, находящиеся по одну сторону и имеющие те же концы.

Но они не могут быть построены (предложение 7); значит, при совмещении основания BC с основанием EF будут совмещаться и стороны BA, AC со сторонами ED и DF. Значит, они совмещаются; так что и угол BAC совместится с углом EDF и будет ему равен.

Значит, если два треугольника имеют две стороны, равные каждая каждой двум сторонам, и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол, равный углу, заключённому между равными прямыми, что и требовалось доказать (39).

Черт. 9.

Предложение 9

Данный прямолинейный угол рассечь пополам.

Пусть данный прямолинейный угол будет BAC; требуется рассечь его пополам.

Возьмём на AB произвольную точку D, от AC (черт. 9) отнимем AE, равную AD, соединим DE, построим на DE равносторонний треугольник DEF (предложение 1) и сое-

дним *AF*; я утверждаю, что угол *BAC* делится пополам прямой *AF*.

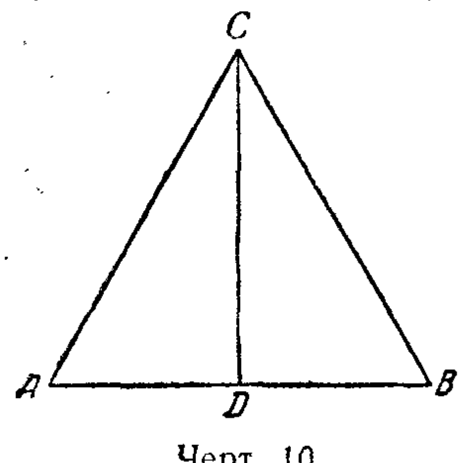
Действительно, поскольку *AD* равно *AE*, *AF* же общая, вот две ⟨ стороны ⟩ *DA*, *AF* равны двум *EA*, *AF* каждая каждой. И основание *DF* равно основанию *EF*; значит, угол *DAF* равен углу *EAF* (предложение 8).

Значит, данный прямолинейный угол *BAC* рассечён пополам прямой *AF*, что и требовалось сделать (40, 41).

Предложение 10

Данную ограниченную) прямую рассечь пополам.*

Пусть данная ограниченная прямая будет *AB*; требуется ограниченную прямую *AB* рассечь пополам (черт. 10).



Черт. 10.

Построим на ней равносторонний треугольник *ABC* (предложение 1) и рассечём угол *ACB* пополам прямой *CD* (предложение 9); я утверждаю, что прямая *AB* рассекается пополам в точке *D*.

Действительно, поскольку *AC* равно *CB*, а *CD* общая, вот две стороны *AC* и *CD* равны двум сторонам *BC* и *CD* каждая каждой; и угол *ACD* равен углу *BCD*; значит и основание *AD* равно основанию *BD* (предложение 4).

Значит, данная ограниченная прямая *AB* рассечена в точке *D* пополам, что и требовалось сделать (42).

Предложение 11

*К данной прямой из заданной на ней точки провести прямую под прямыми углами**).*

---

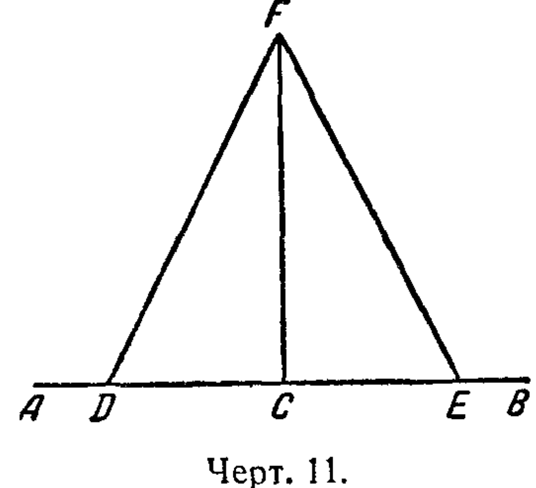
*) πεπερασμένη — лучше сказать «ограниченная», чем «конечная».

**) Слова, отвечающего перпендикуляру, у Евклида нет.

В предложении 11 он говорит: πρὸς ὀρθὰς γωνίας — под прямыми углами, а в 12-м κάθετον εὐθεῖαν — отвесную прямую. Из последнего термина произошёл и наш «катет».

Пусть данная прямая будет AB, а заданная на ней точка C. Требуется вот из точки C к прямой AB провести прямую под прямыми углами (черт. 11).

Возьмём на AC произвольную точку D, отложим CE, равную CD (предложение 3), построим на DE равносторонний треугольник FDE (предложение 1) и соединим FC. Я утверждаю, что к данной прямой AB из заданной на ней точки C под прямыми углами проведена прямая FC.



Черт. 11.

Действительно, поскольку DC равна CE, а CF общая, вот две <стороны> DC, CF равны двум EC и CF, каждая каждой; и основание DF равно основанию FE; значит, угол DCF равен ECF (предложение 8) и они смежны.

Если же прямая, восставленная на прямой, образует смежные равные между собой углы, то каждый из равных углов будет прямым (определение 10); значит, каждый из углов DCF и FCE прямой.

Значит, к данной прямой AB из заданной на ней точки C под прямыми углами проведена прямая FC, что и требовалось сделать (43, 44, 45).

Предложение 12

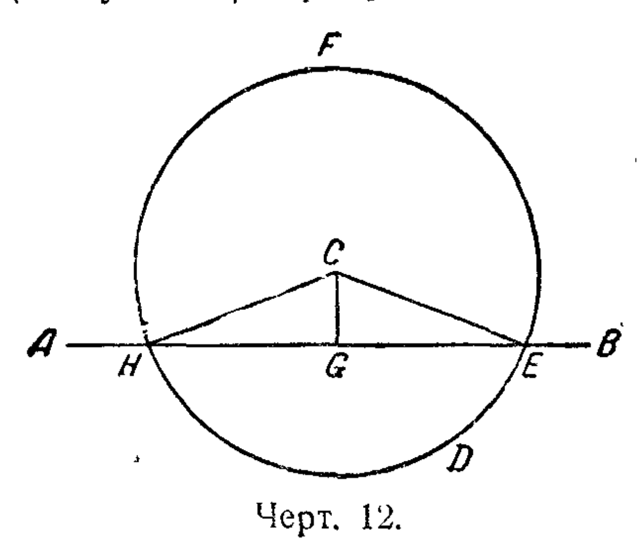
К данной неограниченной прямой из заданной точки, на ней не находящейся, провести перпендикулярную прямую линию).*

Пусть данная неограниченная прямая есть AB, а данная не находящаяся на ней точка C. Вот требуется к данной неограниченной прямой AB из данной не находящейся

*) Данное в этом предложении решение задачи приписывается Проклом Энопиду Хиосскому (геометр V века до н. э.).

на ней точки C провести перпендикулярную прямую линию (черт. 12).

Возьмём по другую сторону прямой AB какую-нибудь точку D, из центра C раствором CD опишем круг EFH (постулат 3); прямую EH рассечём пополам в точке G (предложение 10) и соединим CH, CG, CE (постулат 1).



Черт. 12.

Я утверждаю, что к данной неограниченной прямой AB из данной не находящейся на ней точки C проведена перпендикулярная прямая CG.

Действительно, поскольку HG равно GE, а GC — общая сторона, вот две стороны HG, GC равны двум EG и GC каждая каждой; и основание CH равно основанию CE (определение 15); значит, и угол CGH будет равен углу EGC (предложение 8), и они смежные.

Если же прямая, восставленная на прямой, образует равные между собой смежные углы, то каждый из равных углов прямой, и восставленная прямая называется перпендикулярной к той, на которой она восставлена (определение 10).

Значит, к данной неограниченной прямой AB из заданной на ней не находящейся точки C проведена перпендикулярная прямая CG; это и следовало сделать.

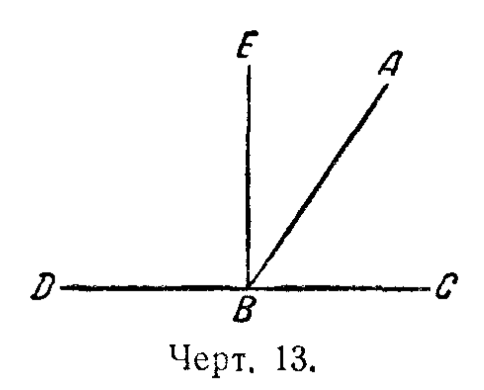
Предложение 13

*Если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или ⟨ **вместе** ⟩ равные двум прямым*).*

*) У Евклида δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. Было бы очень вольно перевести «в сумме двум прямым». Мы переводим «вместе», чтобы избежать возможного недоразумения, что каждый из углов прямой.

Пусть какая-нибудь прямая *AB*, восставленная на прямой *CD*, образует углы *CBA* *) и *ABD*. Я утверждаю, что углы *CBA* и *ABD* или прямые или ⟨ вместе ⟩ равны двум прямым (черт. 13).

Теперь, если *CBA* равен *ABD*, то они суть два прямых. Если же нет, то проведём из точки *B* под прямыми углами [к прямой] *CD* прямую *BE*; значит, углы *CBE*, *EBD* — два прямых; и поскольку *CBE* равен двум *CBA*, *ABE*, то прибавим общий угол *EBD*; значит, углы *CBE*, *EBD* равны трём углам *CBA*, *ABE*, *EBD*. Далее, поскольку *DBA* равен двум *DBE*, *EBA*, то прибавим общий *ABC*; значит, углы *DBA*, *ABC* равны трём *DBE*, *EBA*, *ABC* (аксиома 2). Но и углы *CBE*, *EBD* оказались равными тем же самым трём; равные же одному и тому же равны и между собой; и значит, углы *CBE*, *EBD* равны *DBA*, *ABC*; но *CBE*, *EBD* суть два прямых; и значит, *DBA*, *ABC* ⟨ вместе ⟩ равны двум прямым.



Черт. 13.

Значит, если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых или ⟨ вместе ⟩ равные двум прямым, что и требовалось доказать (46).

Предложение 14

Если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные ⟨ вместе ⟩ двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой **).

Действительно, пусть с некоторой прямой *AB* в какой-нибудь её точке *B* две прямые *BC*, *BD*, расположенные

---

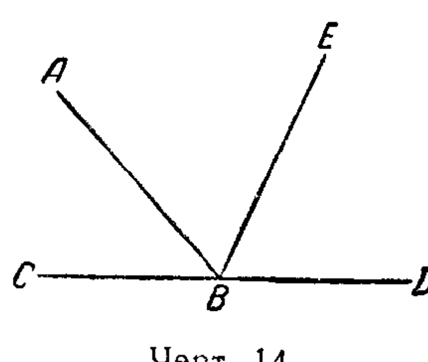
*) У Евклида угол обозначается не просто *ΓBA*, но ὑπὸ *ΓBA* — под *ΓBA*, т. е. угол, образованный прямыми *ΓB* и *BA*.

**) У Евклида ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι — прямые будут между собой «по прямой».

не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы ABC, ABD, равные <вместе> двум прямым; я утверждаю, что BD будет по одной прямой с BC.

Действительно, если BD не будет по одной прямой с BC, то пусть по прямой с BC будет BE.

Поскольку теперь прямая AB восставлена на прямой CBE, то, следовательно, углы ABC, ABE равны двум прямым (предложение 13); но и углы ABC, ABD равны двум прямым; значит, углы CBA, ABE равны углам CBA, ABD. Отнимем общий угол CBA; значит, оставшийся угол ABE равен оставшемуся ABD, меньший большему; это же невозможно. Значит, BE не будет по прямой с BC. Подобным вот образом докажем, что <не будет> и никакая другая, кроме BD; значит, CB будет по прямой с BD.



Черт. 14.

Значит, если с некоторой прямой в какой-нибудь её точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные <вместе> двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой, что и требовалось доказать (47).

Предложение 15

*Если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину *), равные между собой.*

Действительно, пусть две прямые AB, CD пересекаются в точке E.

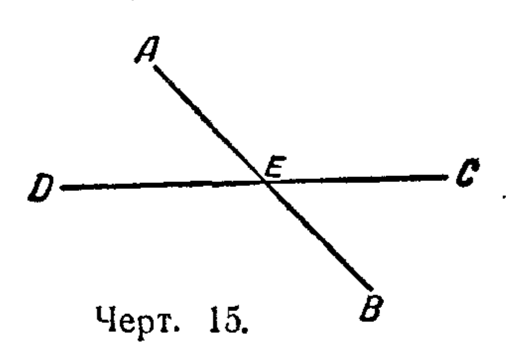
Я утверждаю, что угол AEC равен углу DEB, угол же CEB равен AED (черт. 15).

Действительно, поскольку прямая AE, восставленная на прямой CD, образует углы CEA и AED, то значит, углы CEA и AED вместе равны двум прямым (предложе-

*) У Евклида κατὰ κορυφήν соответствует нашим «вертикальным» углам. Специального определения этого термина у Евклида нет. Согласно Евдему, доказываемая теорема принадлежит Фалесу.

ние 13). Далее, поскольку прямая DE, восставленная на прямой AB, образует углы AED и DEB, то, значит, углы AED и DEB вместе равны двум прямым (предложение 13).

Но и углы CEA и AED оказались равными двум прямым; значит, углы CEA и AED равны AED и DEB. Отнимем общий угол AED; значит, остаток CEA равен остатку BED (аксиома 3). Подобным вот образом будет доказано, что и углы CEB и DEA равны.



Черт. 15.

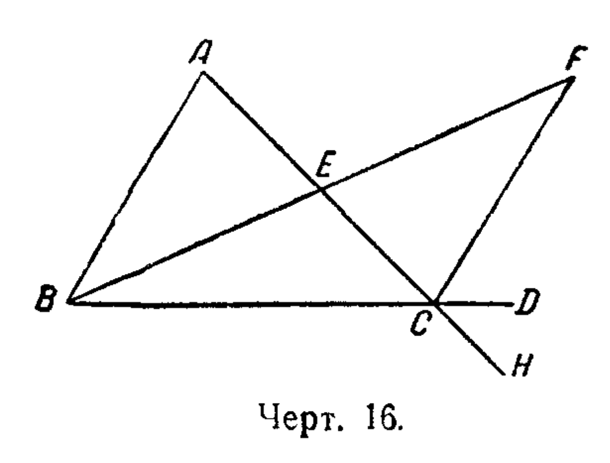
Значит, если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину, равные между собой, что и требовалось доказать (48).

[Следствие.

Из этого ясно, что если две прямые пересекают друг друга, то они при пересечении будут образовывать углы, равные вместе четырём прямым *).]

Предложение 16

Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних, ⟨ему⟩ противолежащих.



Черт. 16.

Пусть треугольник будет ABC и пусть одна его сторона BC будет продолжена до D. Я утверждаю, что внешний угол ACD больше каждого из внутренних противолежащих углов CBA и BAC.

Рассечём AC пополам в E и соединяющую BE продолжим по прямой до F; отложим EF, равную BE (предложение 3), соединим FC и проведём AC до H (черт. 16).

*) Это следствие (πόρισμα), имеющееся не во всех рукописях Евклида, Гейберг считает позднейшей вставкой.

Поскольку теперь AE равна EC, а BE равна EF и вот две <стороны> AE, EB равны двум CE, EF каждая каждой; и угол AEB равен углу FEC, ибо <он расположен> через вершину (предложение 15). Значит, и основание AB равно основанию FC, и треугольник ABE равен треугольнику FEC, и остальные углы равны каждый каждому остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4); значит, угол BAE равен углу ECF.

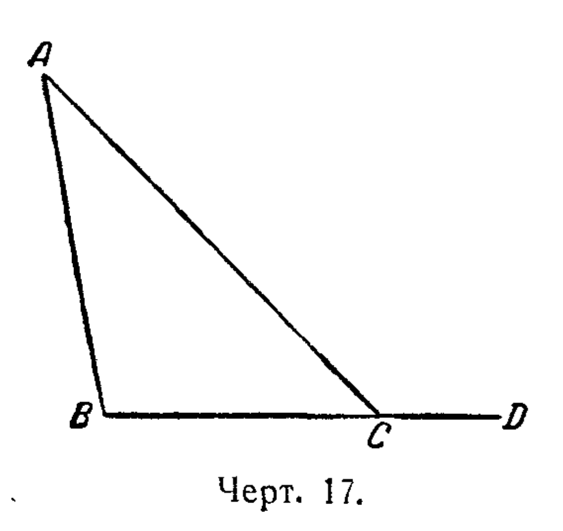
Но угол ECD больше угла ECF (аксиома 8); значит, угол ACD больше BAE. Таким же образом, <если> разделить BC пополам, будет доказано, что и угол BCH, т. е. ACD (предложение 15), больше ABC.

Значит, во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних противолежащих, что и требовалось доказать.

Предложение 17

Во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых.

Пусть треугольник будет ABC; я утверждаю, что в треугольнике ABC два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых (черт. 17).



Черт. 17.

Действительно, продолжим BC до D (постулат 2).

И поскольку в треугольнике ABC угол ACD внешний, то он больше внутреннего противолежащего ABC (предложение 16). Прибавим общий угол ACB; значит, ACD и ACB <вместе> больше, чем ABC и BCA (аксиома 4). Но ACD и ACB <вместе> равны двум прямым (предложение 13); значит, ABC и BCA меньше двух прямых. Таким же образом

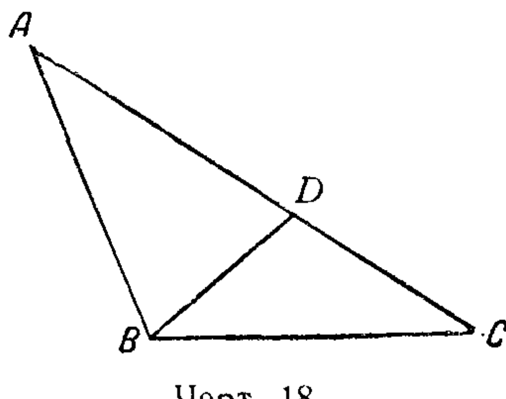
докажем, что и углы *BAC*, *ACB* меньше двух прямых, и также углы *CAB*, *ABC*.

Значит, во всяком треугольннке два угла, взятые при всяком их выборе, меньше двух прямых, что и требовалось доказать.

Предложение 18

Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол.

Пусть треугольник будет *ABC*, имеющий сторону *AC*, бóльшую чем *AB*. Я утверждаю, что и угол *ABC* больше угла *BCA* (черт. 18).

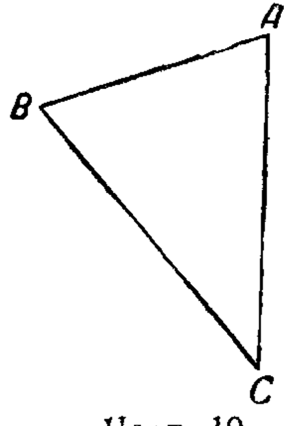


Черт. 18.

Действительно, поскольку *AC* больше, чем *AB*, отложим *AD*, равную *AB*, и соединим *BD*.

И поскольку в треугольнике *BCD* угол *ADB* внешний, то он больше внутреннего ему противолежащего *DCB* (предложение 16). Но угол *ADB* равен углу *ABD*, поскольку и сторона *AB* равна *AD* (предложение 5); значит, и угол *ABD* больше *ACB*; значит, и подавно угол *ABC* больше *ACB* (аксиома 8).

Значит, во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол, что и требовалось доказать (49).



Черт. 19.

Предложение 19

Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной.

Пусть треугольник будет *ABC*, имеющий угол *ABC*, больший угла *BCA*. Я утверждаю, что и сторона *AC* больше стороны *AB* (черт. 19).

Действительно, если это не так, то *AC* или равна *AB* или меньше. Но теперь *AC* не равна *AB*, ибо тогда и

угол *ABC* был бы равен *ACB* (предложение 5); но он не ⟨равен⟩. Значит, *AC* не равна *AB*. Но также *AC* и не меньше *AB*, ибо тогда и угол *ABC* был бы меньше *ACB* (предложение 18). Но он не ⟨меньше⟩; значит, *AC* не меньше *AB*.

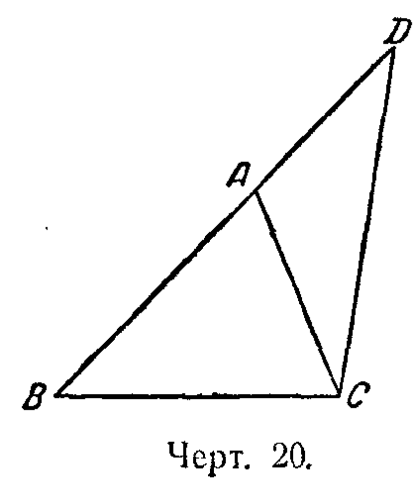
Доказано же, что ⟨*AC*⟩ и не равна ⟨*AB*⟩; значит, *AC* больше *AB*.

Значит, во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной, что и требовалось доказать (50).

Предложение 20

Во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше оставшейся.

Пусть треугольник будет *ABC*. Я утверждаю, что в треугольнике *ABC* две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше третьей, а именно, *BA* и *AC* больше *BC*, *AB* и *BC* больше *AC*, *BC* и *CA* больше *AB* (черт. 20).



Черт. 20.

Действительно, проведём *BA* до точки *D*, отложим *AD*, равную *CA* (предложение 3), и соединим *DC*.

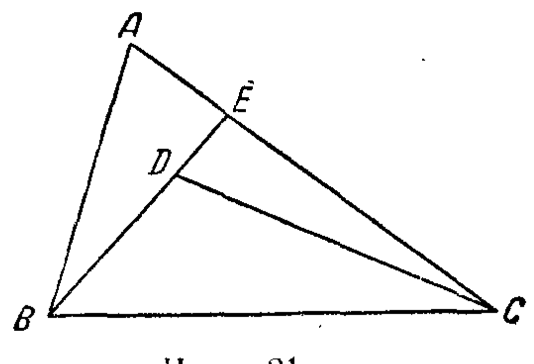
Поскольку теперь *DA* равна *AC*, то и угол *ADC* равен углу *ACD* (предложение 5); значит, угол *BCD* больше угла *ADC* (аксиома 8); и поскольку треугольник *DCB* имеет угол *BCD* больше угла *BDC*, а больший угол стягивается и большей стороной, значит, *DB* больше *BC* (предложение 19). Но *DA* равна *AC*; значит, *BA* и *AC* ⟨вместе⟩ больше *BC*; подобным вот образом докажем, что и *AB* и *BC* ⟨вместе⟩ больше *CA*, а *BC* и *CA* ⟨вместе⟩ больше *AB*.

Значит, во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше, чем третья; это и требовалось доказать (51).

Предложение 21

Если в треугольнике на одной из сторон от концов восставлены будут внутрь две прямые, то восставленные прямые ⟨вместе⟩ будут меньше двух остальных сторон треугольника, но будут заключать больший угол.

Действительно, пусть в треугольнике *ABC* на одной из сторон *BC* будут от концов *B*, *C* восставлены внутрь две прямые *BD* и *DC*; я утверждаю, что *BD* и *DC* ⟨вместе⟩ меньше остальных двух сторон треугольника *BA* и *AC*, но заключают угол *BDC*, больший, чем *BAC* (черт. 21).



Черт. 21.

Действительно, проведём *BD* до *E*. И поскольку во всяком треугольнике две стороны ⟨вместе⟩ больше оставшейся (предложение 20), то значит, в треугольнике *ABE* две стороны *AB* и *AE* больше *BE*; прибавим общую прямую *EC*; значит, *BA* и *AC* ⟨вместе⟩ больше *BE* и *EC* (аксиома 4). Далее, поскольку в треугольнике *CED* две стороны *CE* и *ED* ⟨вместе⟩ больше *CD*, то прибавим общую *DB*; значит, *CE* и *EB* больше *CD* и *DB*.

Но *BA* и *AC* по доказанному больше, чем *BE* и *EC*; значит, и подавно *BA* и *AC* больше *BD* и *DC*.

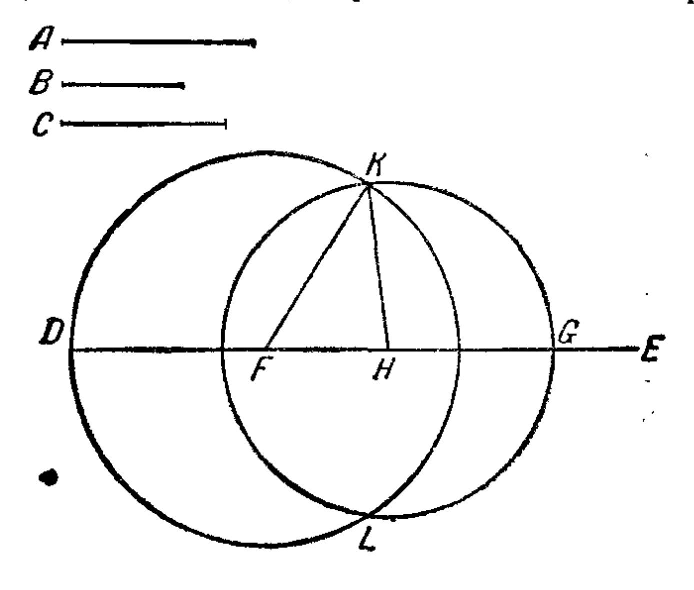
Далее, поскольку во всяком треугольнике внешний угол больше внутреннего и противолежащего (предложение 16), то значит, в треугольнике *CDE* внешний угол *BDC* больше *CED*. Вследствие того же тогда и в треугольнике *ABE* внешний угол *CEB* больше *BAC*. Но угол *BDC* по доказанному больше *CEB*; значит, и подавно *BDC* больше *BAC*.

Значит, если в треугольнике на одной из сторон от концов восставлены будут внутрь две прямые, то восставленные прямые ⟨вместе⟩ меньше двух остальных сторон треугольника, но заключают больший угол, что и требовалось доказать.

Предложение 22

Из трёх прямых, которые равны трём данным [прямым], составить треугольник; нужно, однако, чтобы две ⟨прямые, взятые вместе⟩, при всяком их выборе были бы больше оставшейся [вследствие того, что во всяком треугольнике две стороны, ⟨взятые вместе⟩ при всяком их выборе, больше оставшейся].

Пусть три данные прямые будут A, B, C, из них две ⟨взятые вместе⟩ при всяком их выборе пусть будут больше оставшейся, а именно, A и B больше C; A и C больше B, и затем B и C больше A; требуется вот из прямых, равных A, B, C, составить треугольник (черт. 22).

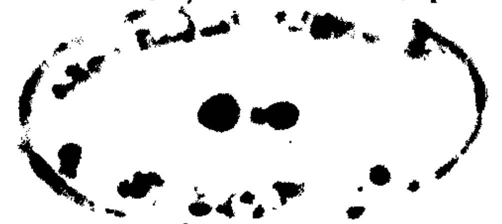


Черт. 22.

Проведём какую-нибудь прямую DE, ограниченную в D и не ограниченную в сторону E, и отложим DF, равную A, затем FH, равную B, и HG, равную C (предложение 3); и из центра F раствором FD опишем круг DKL (постулат 3); затем из центра H раствором HG опишем круг KLG (постулат 3) и соединим KF и KH. Я утверждаю, что из трёх прямых, равных A, B, C, составлен треугольник KFH.

Действительно, поскольку точка F — центр круга DKL, то FD равна FK (определение 15); но FD равна A. И, значит, KF равна A (аксиома 1).

Затем, поскольку точка H — центр круга LKG, то HG равна HK (определение 15); но HG равна C (аксиома 1); значит, и KH равна C. Но и FH равна B; значит, три прямые KF, FH и HK равны трём прямым A, B, C.

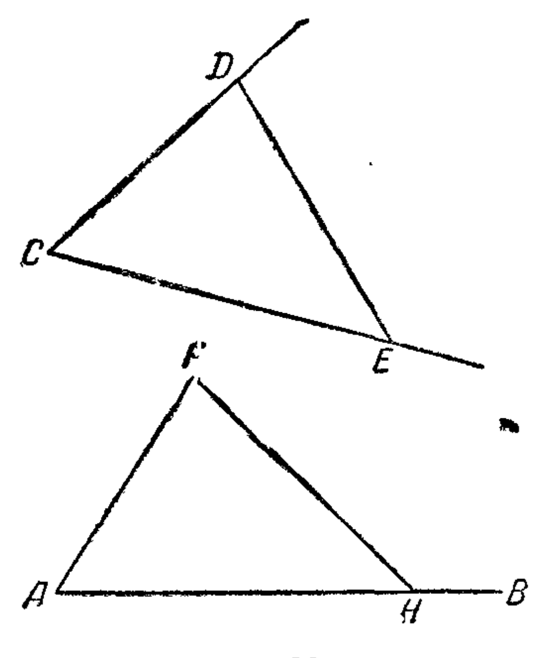


Значит, из трёх прямых *KF*, *FH*, *HK*, которые равны трём заданным прямым *A*, *B*, *C*, составлен треугольник *KFH*, что и требовалось сделать (52).

Предложение 23

На данной прямой при данной её точке построить прямолинейный угол, равный данному прямолинейному углу.

Пусть данная прямая будет *AB*, точка же на ней *A* и заданный прямолинейный угол *DCE*; требуется вот на данной прямой *AB*, при точке её *A*, построить прямолинейный угол, равный данному (черт. 23) прямолинейному углу *DCE*.



Черт. 23.

Возьмём на каждой из прямых *CD* и *CE* какие-нибудь точки *D* и *E* и соединим *DE*; и из трёх прямых, которые равны трём *CD*, *DE*, *CE*, составим треугольник *AFH* (предложение 22), так, чтобы *CD* была равна *AF*, *CE* равна *AH* и затем *DE* равна *FH* (предложение 22).

Поскольку теперь две прямые *DC*, *CE* равны двум прямым *FA* и *AH* каждая каждой, и основание *DE* равно основанию *FH*, то, значит, угол *DCE* будет равен углу *FAH* (предложение 8).

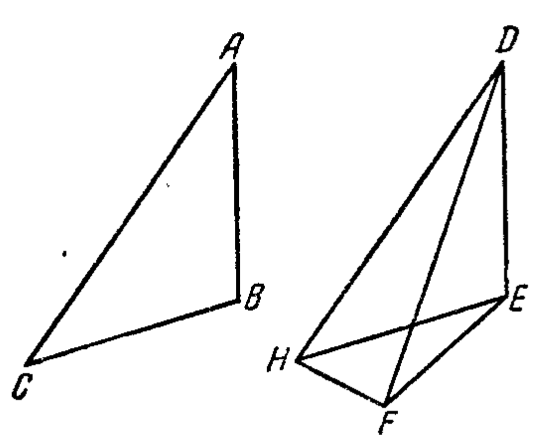
Значит, на данной прямой *AB* при точке её *A* построен прямолинейный угол *FAH*, равный данному прямолинейному углу *DCE*, что и требовалось сделать (53).

Предложение 24

Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, но заключённый между равными сторонами угол ⟨в одном⟩ больше, ⟨чем в

другом⟩, то и основание ⟨в первом⟩ будет больше основания ⟨во втором⟩.

Пусть *ABC*, *DEF* будут два треугольника, имеющих *AB*, *AC*, равные двум сторонам *DE*, *DF* каждая каждой, а именно, *AB*, равную *DE*, *AC*, равную *DF*, угол же при *A* пусть будет больше угла при *D*; я утверждаю, что и основание *BC* больше основания *EF* (черт. 24).



Черт. 24.

Действительно, поскольку угол *BAC* больше угла *EDF*, построим на прямой *DE* при точке её *D* угол *EDH*, равный углу *BAC* (предложение 23), отложим *DH*, равную каждой из *AC* и *DF* (предложение 3), и соединим *EH* и *FH*. Поскольку теперь *AB* равна *DE*, *AC* же *DH*, и вот две прямые *BA*, *AC* равны двум *ED*, *DH* каждая каждой; и угол *BAC* равен углу *EDH*; значит, и основание *BC* равно основанию *EH* (предложение 4). Далее, поскольку *DF* равна *DH*, и угол *DHF* равен углу *DFH* (предложение 5); значит, угол *DFH* больше *EHF*; значит, и подавно угол *EFH* больше *EHF*. И поскольку *EFH* есть треугольник, имеющий угол *EFH* бо́льший, чем *EHF*, бо́льший же угол стягивает бо́льшая сторона (предложение 19), значит, и сторона *EH* больше *EF*. Но *EH* равна *BC*; значит, и *BC* больше *EF*.

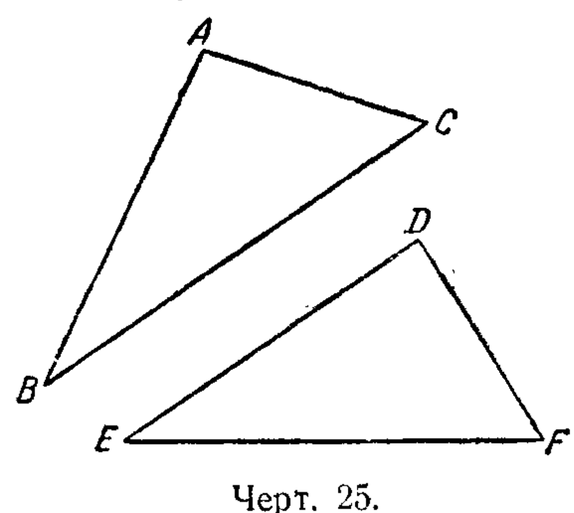
Значит, если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, заключённый же между равными сторонами угол ⟨в одном⟩ больше, ⟨чем в другом⟩, то и основание ⟨в первом⟩ будет больше основания ⟨во втором⟩, что и требовалось доказать (54).

Предложение 25

Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, основание же ⟨в одном⟩ больше, чем основание ⟨в другом⟩, то и угол, заклю-

чённый между равными прямыми ⟨в первом⟩, больше угла ⟨во втором⟩.

Пусть *ABC*, *DEF* будут два треугольника, имеющих две стороны *AB*, *AC*, равные двум сторонам *DE*, *DF* каждая каждой, а именно, *AB*, равную *DE*, и *AC*, равную *DF*; основание же *BC* пусть будет больше основания *EF*; я утверждаю, что и угол *BAC* больше угла *EDF* (черт. 25).



Черт. 25.

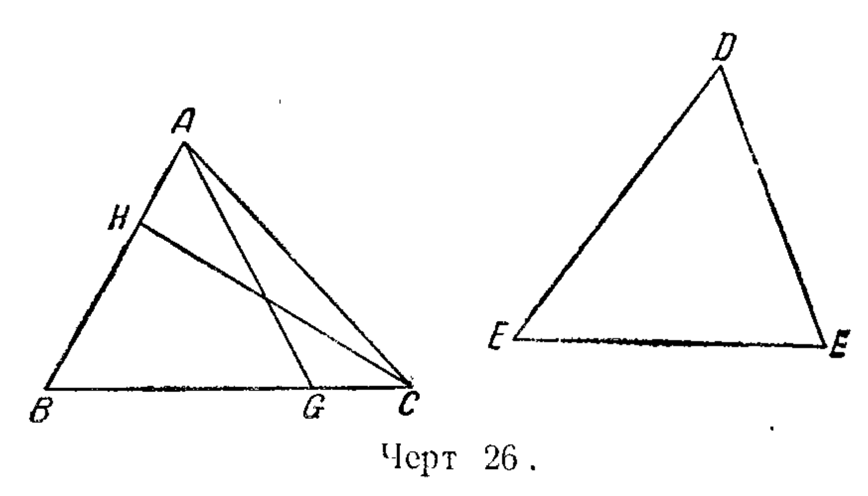
Действительно, если это не так, то он или равен ему или меньше; но равным углу *EDF* угол *BAC* не будет; ибо ⟨тогда⟩ и основание *BC* было бы равно основанию *EF* (предложение 4); но оно не ⟨равно⟩; значит, и угол *BAC* не равен углу *EDF*. Но также угол *BAC* не будет и меньше угла *EDF*; ибо ⟨тогда⟩ и основание *BC* было бы меньше основания *EF* (предложение 24), но оно не ⟨меньше⟩; значит, и угол *BAC* не меньше *EDF*. Но доказано, что он и не равен; значит, угол *BAC* больше угла *EDF*.

Значит, если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, основание же ⟨в одном⟩ больше, чем основание ⟨в другом⟩, то и угол, заключённый между равными прямыми ⟨в первом⟩, больше угла ⟨во втором⟩, что и требовалось доказать (55).

Предложение 26

Если два треугольника имеют два угла, равных двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающейся между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой] и оставшийся угол оставшемуся углу.

Пусть будут два треугольника *ABC*, *DEF*, имеющих два угла *ABC*, *BCA* равные двум углам *DEF*, *EFD* каждый каждому, а именно, угол *ABC* углу *DEF* и угол *BCA* углу *EFD*; пусть также они имеют одну сторону, равную одной стороне, сперва пусть заключающуюся между равными углами, а именно, ⟨сторону⟩ *BC*, ⟨равную⟩ *EF* (черт. 26). Я утверждаю, что они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам каждая каждой, а



Черт 26.

именно, *AB* ⟨стороне⟩ *DE*, *AC* ⟨стороне⟩ *DF* и оставшийся угол оставшемуся углу, а именно, угол *BAC* углу *EDF*.

Действительно, если *AB* не равна *DE*, то одна из них будет большей. Пусть бóльшая сторона будет *AB*; отложим *BH*, равную *DE*, и соединим *HC*.

Поскольку теперь *BH* равна *DE*, а *BC* равна *EF*, то вот две стороны *BH*, *BC* равны двум *DE*, *EF* каждая каждой; и угол *HBC* равен углу *DEF*; значит, основание *HC* равно основанию *DF*, и треугольник *HBC* равен треугольнику *DEF*, и остальные углы равны остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4); значит, угол *HCB* равен углу *DFE*. Но угол *DFE* предполагается равным углу *BCA*; значит, и угол *BCH* равен *BCA*, т. е. меньший большему, чего не может быть (аксиома 8). Значит, не может *AB* быть не равной *DE*; значит, она равна. Но и *BC* равна *EF*; вот две стороны *AB*, *BC* равны двум *DE*, *EF* каждая каждой; и угол *ABC* равен *DEF*; значит, основание *AC* равно основанию *DF* и оставшийся угол *BAC* равен оставшемуся углу *EDF* (предложение 4).

Но вот пусть далее будут равны стороны, стягивающие равные углы, как AB и DE; я утверждаю далее, что и остальные стороны будут равны остальным сторонам, а именно, AC равна DF, BC же EF, и, кроме того, оставшийся угол BAC <равен> оставшемуся углу EDF.

Действительно, если BC не равна EF, то одна из них будет большей. Если это возможно, пусть большей будет BC; отложим BG равной EF и соединим AG.

И поскольку BG равна EF, AB же DE, и вот две стороны AB, BG равны двум DE, EF каждая каждой; и заключают равные углы; значит, основание AG равно основанию DF и треугольник ABG равен треугольнику DEF, и остальные углы будут равны остальным углам, стягиваемым равными сторонами (предложение 4). Значит, угол BGA равен углу EFD.

Но угол EFD равен углу BCA; вот в треугольнике AGC внешний угол BGA равен внутреннему и противолежащему BCA, чего быть не может (предложение 16). Значит, BC не будет не равной EF; значит, она равна. Но и AB равна DE, вот две стороны AB, BC равны двум DE, EF каждая каждой и заключают равные углы. Значит, основание AC равно основанию DF, и треугольник ABC равен треугольнику DEF, и оставшийся угол BAC равен оставшемуся углу EDF.

Значит, если два треугольника имеют два угла, равных двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающейся между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой], и оставшийся угол оставшемуся углу, что и требовалось доказать (56, 57).

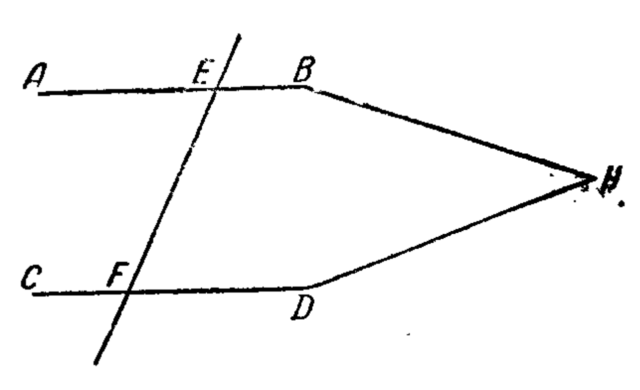
Предложение 27

Если прямая, падающая на) две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу.*

*) У Евклида ἐμπίπτω — впадаю, падаю на.

Пусть прямая EF, падающая на две прямые AB и CD, образует накрестлежащие углы AEF и EFD, равные между собой; я утверждаю, что AB параллельна CD (черт. 27).

Действительно, если это не так, то AB и CD продолженные сойдутся или со стороны B, D или со стороны A, C. Продолжим их и пусть они сойдутся со стороны B, D в точке H. Вот в треугольнике HEF внешний угол AEF равен внутреннему ему противолежащему EFH; это же невозможно (предложение 16); значит, AB, CD продолженные не сойдутся со стороны B, D. Таким же вот образом доказано, что не ⟨сойдутся они⟩ и со стороны A, C; прямые же, которые ни с какой стороны не сходятся, параллельны (определение 23); значит, AB параллельна CD *).



Черт. 27.

Значит, если прямая, падающая на две прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны, что и требовалось доказать (58).

Предложение 28

Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние ⟨углы вместе⟩, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой.

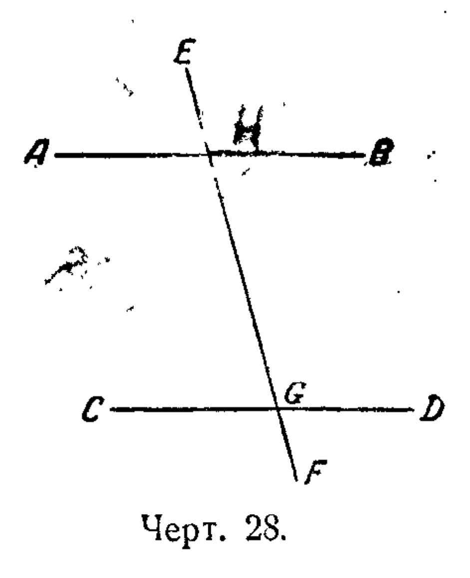
Пусть прямая EF, падающая на две прямые AB, CD, образует внешний угол EHB, равный внутреннему противолежащему ⟨с той же стороны расположенному⟩ углу HGD,

---

*) Кеплер первый мыслит параллельные прямые как пересекающиеся в бесконечности. Введение понятия о бесконечно удалённой точке приписывается Дезаргу, хотя его понимание и не совпадает с современным.

или внутренние односторонние углы *BHG*, *HGD*, <вместе> равные двум прямым; я утверждаю, что *AB* параллельна *CD* (черт. 28).

Действительно, поскольку угол *EHB* равен углу *HGD*, но угол *EHB* равен *AHG* (предложение 15), то значит, и *AHG* равен *HGD* (аксиома 1); и они накрестлежащие; значит, *AB* параллельна *CD* (предложение 27).



Черт. 28.

Далее, поскольку *BHG* и *HGD* <вместе> равны двум прямым, также и углы *AHG* и *BHG* равны двум прямым (предложение 13), то значит, *AHG* и *BHG* <вместе> равны *BHG* и *HGD* (аксиома 1). Отнимем общий угол *BHG*; значит, остаток *AHG* равен остатку *HGD* (аксиома 3); и они накрестлежащие; значит, *AB* параллельна *CD* (предложение 27).

Значит, если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние <углы вместе>, равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 29

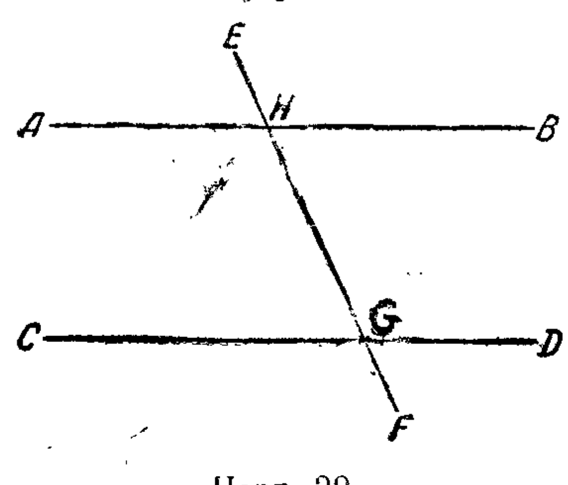
Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым.

Пусть на параллельные прямые *AB*, *CD* падает прямая *EF*; я утверждаю, что она образует накрестлежащие углы *AHG*, *HGD* равные и внешний угол *EHB*, равный внутреннему противолежащему углу *HGD*, и внутренние односторонние углы *BHG*, *HGD*, <вместе> равные двум прямым (черт. 29).

Действительно, если угол *AHG* не равен *HGD*, то один из них больший. Пусть будет больший *AHG*.

Прибавим общий угол *BHG*; значит, *AHG* и *BHG* <вместе> больше *BHG* и *HGD*.

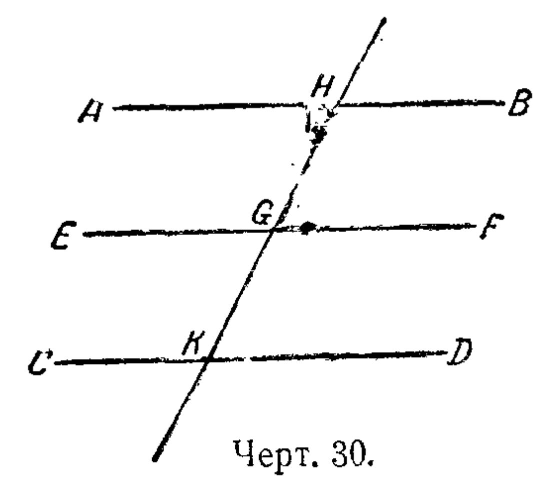
Но *AHG* и *BHG* <вместе> равны двум прямым (предложение 13) [и], значит, *BHG*, *HGD* <вместе> меньше двух прямых. Прямые же, продолжаемые неограниченно, сходятся со стороны, <где углы> меньше двух прямых (постулат 5), значит, *AB*, *CD*, продолжаемые неограниченно, сойдутся; но они не сходятся вследствие того, что предполагаются параллельными; значит, не может *AHG* быть не равным *HGD*; значит, он равен. Но угол *AHG* равен углу *EHB* (предложение 15); и значит, *EHB* равен *HGD* (аксиома 1).



Черт. 29.

Прибавим общий угол *BHG*; значит, *EHB* и *BHG* <вместе> равны *BHG* и *HGD*. Но *EHB* и *BHG* <вместе> равны двум прямым (предложение 13); и значит, *BHG* и *HGD* <вместе> равны двум прямым.

Значит, прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему противолежащему, и внутренние односторонние углы, <вместе> равные двум прямым, что и требовалось доказать (59, 60, 61, 62, 63).



Черт. 30.

Предложение 30

<Прямые>, параллельные той же прямой, параллельны и между собой.

Пусть каждая из *AB*, *CD* параллельна *EF*; я утверждаю, что *AB* параллельна *CD* (черт. 30).

Действительно, пусть на них падает прямая *HK*.

И поскольку на параллельные прямые *AB*, *EF* упала прямая *HK*, то значит, угол *AHK* равен углу *HGF* (предложение 29). Далее, так как на параллельные прямые *EF*, *CD* упала прямая *HK*, то угол *HGF* равен *HKD* (предложение 29). Доказано же, что и угол *AHK* равен *HGF*, и значит, угол *AHK* равен углу *HKD*; и они накрестлежащие. Значит, *AB* параллельна *CD* (предложение 27).

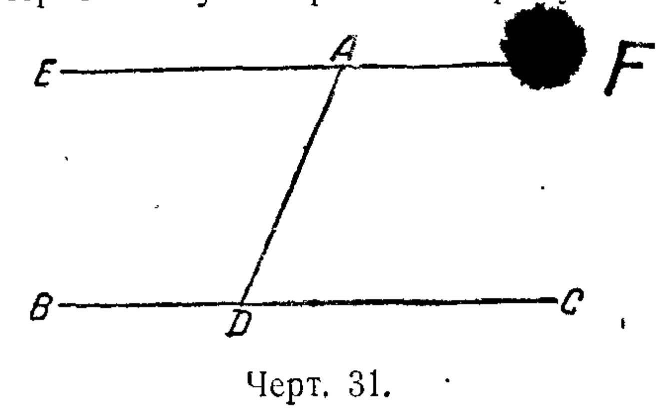
[Значит, параллельные той же прямой, параллельны и между собой]; это и требовалось доказать (64).

Предложение 31

Провести через данную точку прямую линию, параллельную данной прямой.

Пусть данная точка будет *A*, данная же прямая *BC* (черт. 31); требуется вот через точку *A* провести прямую линию, параллельную прямой *BC*.

Возьмём на *BC* какую-нибудь точку *D* и соединим *AD*; и построим на прямой *DA* при её точке *A* угол *DAE*, равный углу *ADC* (предложение 23); и продолжим по одной прямой с *EA* прямую *AF*.



Черт. 31.

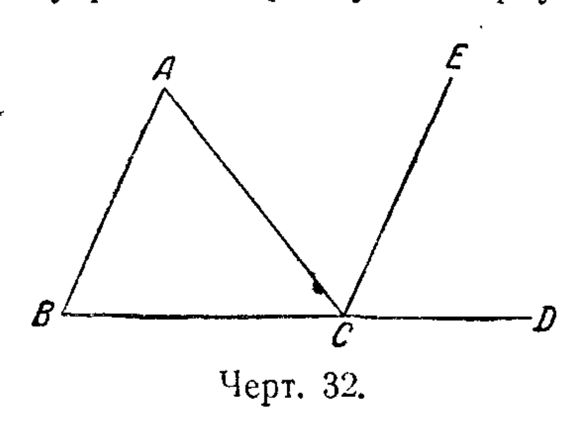
И поскольку прямая *AD*, падающая на две прямые *BC*, *EF*, образовала накрестлежащие углы *EAD*, *ADC*, равные между собой, то значит, *EAF* параллельна *BC* (предложение 27).

Значит, через данную точку *A* проведена прямая линия *EAF*, параллельная данной прямой *BC*, что и требовалось сделать.

Предложение 32

Во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим, и внутренние три угла треугольника <вместе> равны двум прямым.

Пусть треугольник будет *ABC*, продолжим одну его сторону *BC* до *D*; я утверждаю, что внешний угол *ACD* равен двум внутренним и противолежащим *CAB*, *ABC*, и что внутренние три угла треугольника *ABC*, *BCA*, *CAB* ⟨вместе⟩ равны двум прямым (черт. 32). Действительно, проведём через точку *C* прямую *CE*, параллельную *AB*.



Черт. 32.

И поскольку *AB* параллельна *CE* и на них пала *AC*, то накрестлежащие углы *BAC*, *ACE* равны между собой (предложение 29). Далее, поскольку *AB* параллельна *CE* и на них пала прямая *BD*, то внешний угол *ECD* равен внутреннему и противолежащему *ABC* (предложение 29). Но *ACE* по доказанному равен *BAC*; значит, весь угол *ACD* равен двум внутренним и противолежащим углам *BAC* и *ABC*.

Прибавим общий угол *ACB*; значит, углы *ACD* и *ACB* (аксиома 2) равны трём углам *ABC*, *BCA*, *CAB*.

Но *ACD* и *ACB* равны двум прямым (предложение 13); и значит, *ACB*, *CBA*, *CAB* ⟨вместе равны⟩ двум прямым.

Значит, во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим ⟨вместе⟩, и внутренние три угла треугольника ⟨вместе⟩ равны двум прямым; что и требовалось доказать (65, 66).

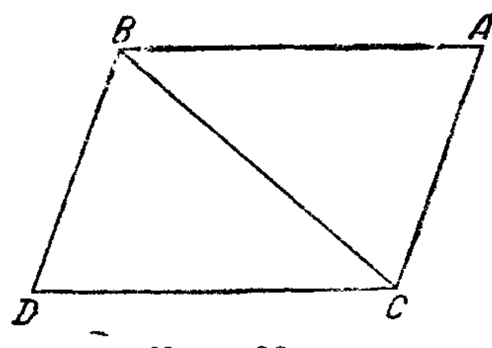
Предложение 33

Прямые, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные ⟨прямые⟩, и сами равны и параллельны.

Пусть равные и параллельные ⟨прямые⟩ будут *AB*, *CD* и пусть их соединяют с одной и той же стороны прямые *AC*, *BD*; я утверждаю, что и *AC* и *BD* равны и параллельны (черт. 33).

Соединим *BC*. И поскольку *AB* параллельна *CD* и на них упала *BC*, то накрестлежащие углы *ABC*, *BCD* равны

между собой (предложение 29). И поскольку AB равна CD, а BC общая, то вот две стороны AB, BC равны двум CD, BC; и угол ABC равен углу BCD; значит, и основание AC равно основанию BD, и треугольник ABC равен треугольнику BCD, и остальные углы равны остальным углам каждый каждому (предложение 4), стягиваемым равными сторонами; значит, угол ACB равен CBD.



Черт. 33.

И поскольку прямая BC, падающая на две прямые AC, BD, образовала равные между собой накрестлежащие углы, то значит, AC параллельна BD (предложение 27). Но она же по доказанному и равна ей.

Значит, прямые, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные ⟨прямые⟩, и сами равны и параллельны, что и требовалось доказать.

Предложение 34

*В ⟨образованных⟩ параллельными линиями площадях *) противоположные стороны и углы равны между собой и диаметр **) разделяет их пополам.*

Пусть ⟨образованная⟩ параллельными линиями площадь будет $ACDB$, диаметр же её BC; я утверждаю, что в параллелограмме $ACDB$ противоположные стороны и углы

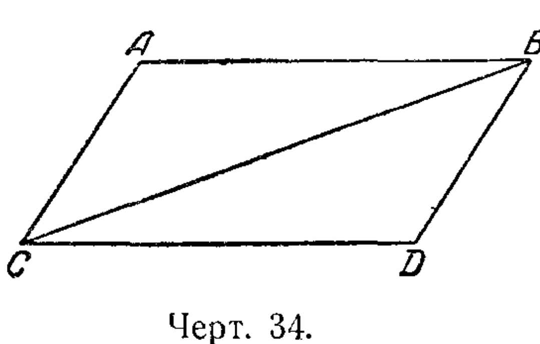
---

*) У Евклида стоит τὸ παραλληλόγραμμον χωρίον — буквально параллельнолинейная (по образцу εὐθύγραμμον — прямолинейная) площадь — часть плоскости, ограниченная двумя парами параллельных прямых. В дальнейшем говорится просто «параллелограмм».

**) У Евклида ἡ διάμετρος — поперечник. Этот термин одинаково относится и к параллелограмму и к кругу; он показывает, что первые геометры мыслили параллелограмм (точнее прямоугольник) вписанным в круг. До Евклида термин «диаметр» употребляется Гиппократом и Платоном (в «Меноне»). Наш термин «диагональ» (διαγώνιος — через углы, подразумевается, проходящий) встречается у Евклида только один раз в нашем смысле этого слова. Тот же смысл имеет это слово у Герона.

равны между собой и диаметр BC делит его пополам (черт. 34).

Действительно, поскольку AB параллельна CD и на них упала прямая BC, то накрестлежащие углы ABC, BCD равны между собой (предложение 29). Далее, поскольку AC параллельна BD и на них упала BC, то накрестлежащие углы ACB и CBD равны между собой (предложение 29). Вот ABC, BCD два треугольника, имеющих два угла ABC, BCA, равных двум углам BCD, CBD каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне между равными углами, а именно, общую сторону BC; и значит, они будут иметь и остальные стороны, равные остальным каждая каждой, и оставшийся угол, равный оставшемуся углу (предложение 26); значит, сторона AB равна CD, AC же BD и ещё угол BAC равен углу CDB. И поскольку угол ABC равен BCD, а CBD углу ACB, значит, весь угол ABD равен всему ACD (аксиома 2). Но угол BAC, как уже доказано, равен CDB.



Черт. 34.

Значит, в ⟨образованных⟩ параллельными линиями площадях противоположные стороны и углы равны между собой. Вот я утверждаю, что и диаметр делит их пополам. Действительно, поскольку AB равна CD и BC общая, то вот две стороны AB, BC равны двум CD, BC каждая каждой; и угол ABC равен углу BCD (предложение 29), и значит, основание AC равно DB (предложение 4), и [значит], треугольник ABC равен треугольнику BCD.

Значит, диаметр BC делит пополам параллелограмм $ABCD$, что и требовалось доказать (67).

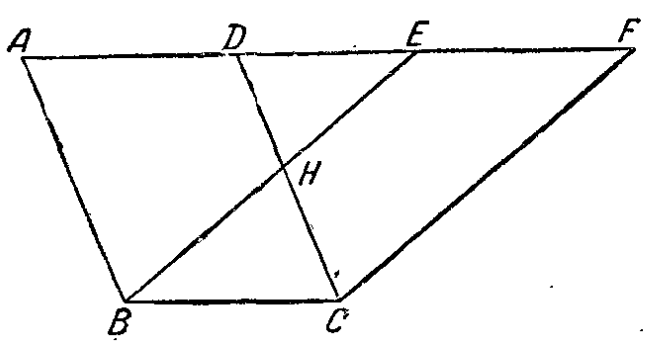
Предложение 35

Параллелограммы, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть $ABCD$, $EBCF$ будут параллелограммы, находящиеся на том же основании BC и между теми же парал-

лельными AF и BC; я утверждаю, что параллелограмм $ABCD$ равен *) параллелограмму $EBCF$ (черт. 35).

Действительно, поскольку $ABCD$ есть параллелограмм, то прямая AD равна BC (предложение 34). Вследствие того же вот и EF равна BC (предложение 34); так что и AD равна EF (аксиома 1), и DE общая; значит, вся AE равна всей DF (аксиома 2).



Черт. 35.

Но и AB равна DC (предложение 34); вот две стороны EA, AB равны двум FD, DC каждая каждой; и угол FDC равен углу EAB (предложение 29) внешний внутреннему; значит, основание EB равно основанию FC, и треугольник EAB будет равен треугольнику DFC (предложение 4). Отнимем общую часть DHE; значит, остаток-трапеция $ABHD$ равна остатку-трапеции $EHCF$ (аксиома 3); прибавим общий треугольник HBC; значит, весь параллелограмм $ABCD$ равен всему параллелограмму $EBCF$ (аксиома 2).

Значит, параллелограммы, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать (68).

Предложение 36

Параллелограммы, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть $ABCD$, $EFHG$ будут параллелограммы, находящиеся на равных основаниях BC и FH и между теми же

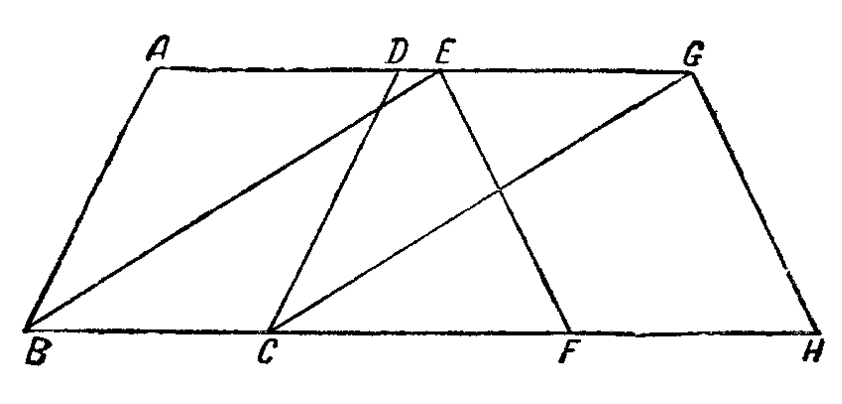
---

*) У Евклида ἴσος — равный.

Поскольку у Евклида фигура рассматривается как часть плоскости, то и равенство фигур понимается как равенство заключённых в них частей плоскости — их площадей.

параллельными AG и BH; я утверждаю, что параллелограмм $ABCD$ равен параллелограмму $EFHG$ (черт. 36).

Действительно, соединим BE, CG. И поскольку BC равна FH, но FH равна EG (предложение 34), и значит, BC равна EG (аксиома 1). Они же и параллельны. И соединяют их EB, GC; прямые же, соединяющие с одной



Черт. 36.

стороны равные и параллельные, и сами равны и параллельны (предложение 33) [и EB, GC, значит, равны и параллельны]. Значит, $EBCG$ параллелограмм. И он равен $ABCD$ (предложение 35); ибо он имеет с ним то же основание BC и находится между теми же параллельными BC, AG (предложение 35).

Вследствие того же самого вот и $EFHG$ равен тому же $EBCG$, так что и параллелограмм $ABCD$ равен параллелограмму $EFHG$ (аксиома 1).

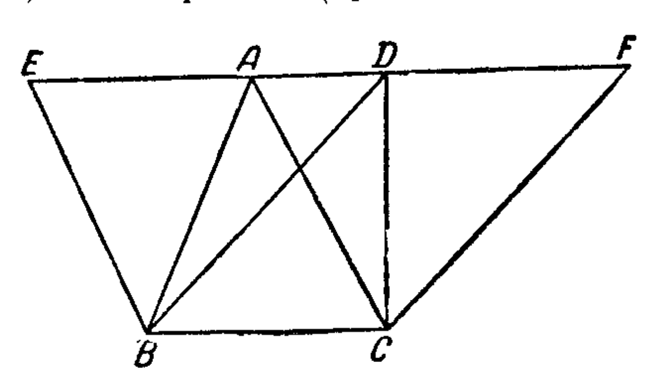
Значит, параллелограммы, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 37

Треугольники, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть треугольники ABC, DBC находятся на том же основании BC и между теми же параллельными AD, BC; я утверждаю, что треугольник ABC равен треугольнику DBC.

Продолжим AD в обе стороны (черт. 37) до E и F и через B проведём прямую BE, параллельную CA (предложение 31), а через C проведём CF, параллельную BD (предложение 31). Значит, каждая из ⟨фигур⟩ $EBCA$ и $DBCF$ — параллелограмм; и они равны (предложение 35), ибо находятся на том же основании BC и между теми же параллельными BC и EF; и половина параллелограмма $EBCA$ есть треугольник ABC, ибо диаметр AB делит его пополам (предложение 34); половина же параллелограмма $DBCF$ — треугольник DBC, ибо диаметр DC делит его пополам (предложение 34); [половины же равных равны между собой] (аксиома 6). Значит, треугольник ABC равен треугольнику DBC.



Черт. 37.

Значит, треугольники, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать.

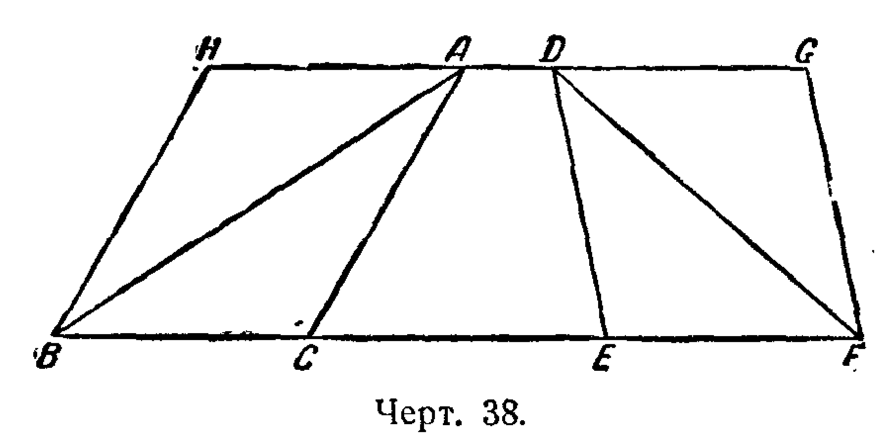
Предложение 38

Треугольники, находящиеся на равных основаниях и между теми же параллельными, равны между собой.

Пусть треугольники ABC, DEF находятся на равных основаниях BC, EF и между теми же параллельными BF и AD; я утверждаю, что треугольник ABC равен треугольнику DEF (черт. 38).

Действительно, продолжим AD в обе стороны до H и G и через B проведём BH, параллельную CA (предложение 31), а через F проведём FG, параллельную DE (предложение 31). Значит, каждая из ⟨фигур⟩ $HBCA$, $DEFG$ — параллелограмм; и $HBCA$ равен $DEFG$ (предложение 36), ибо они находятся на равных основаниях BC и EF и между теми же параллельными BF и HG (предложение 36); и

половина параллелограмма $HBCA$ есть треугольник ABC (предложение 34), ибо диаметр AB рассекает его пополам; половина же параллелограмма $DEFG$ — треугольник FED (предложение 34), ибо диаметр DF рассекает его пополам.



Черт. 38.

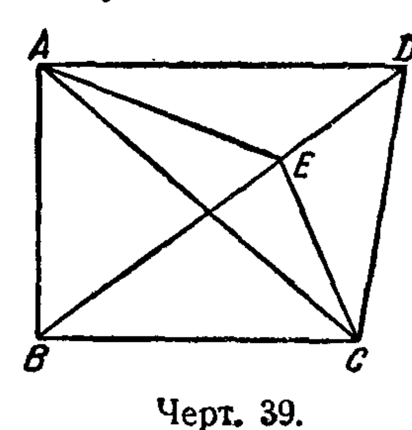
[Половины же равных равны между собой] (аксиома 6); значит, треугольник ABC равен треугольнику DEF.

Значит, треугольники, находящиеся на тех же основаниях между теми же параллельными, равны между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 39

Равные треугольники, находящиеся на том же основании и с той же стороны, находятся и между теми же параллельными.

Пусть ABC, DBC будут равные треугольники, находящиеся на том же основании BC и с той же его стороны (черт. 39); я утверждаю, что они находятся в тех же параллельных. Действительно, соединим AD; я утверждаю, что AD параллельна BC.



Черт. 39.

Действительно, если это не так, то проведём через точку A прямую AE, параллельную BC (предложение 31) и соединим EC. Значит, треугольник ABC равен треугольнику EBC (предложение 37), ибо он находится с ним на том же основании BC и между теми

же параллельными (предложение 37). Но ABC равен DBC; и значит, DBC равен EBC (аксиома 1) — больший меньшему; это же невозможно (аксиома 8); значит, не будет AE параллельна BC.

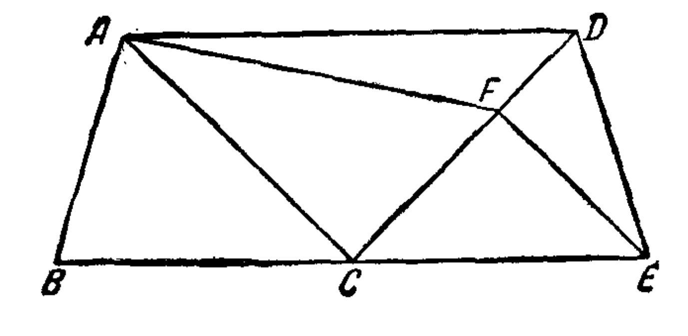
Подобным же вот образом докажем, что и никакая другая <прямая> кроме AD; значит, AD будет параллельна BC.

Значит, равные треугольники, находящиеся на том же основании и с той же стороны, находятся между теми же параллельными, что и требовалось доказать.

Предложение 40 *)

Равные треугольники, находящиеся на равных основаниях и с той же стороны, находятся и между теми же параллельными.

Пусть ABC, CDE будут равные треугольники на равных основаниях BC, CE и с той же стороны (черт. 40); я утверждаю, что они находятся и между теми же параллельными.



Черт. 40.

Действительно, соединим AD; я утверждаю, что AD параллельна BE.

Действительно, если это не так, проведём через A прямую AF, параллельную BE (предложение 31), и соединим FE. Значит, треугольник ABC равен треугольнику FCE (предложение 38), ибо они находятся на равных основаниях BC и CE и между теми же параллельными BE и AF (предложение 38). Но треугольник ABC равен треугольнику DCE; и, значит, треугольник DCE равен треуголь-

*) Это предложение является позднейшей добавкой, как это установил Гейберг на основании найденных вновь египетских папирусов уже после выхода его издания Начал.

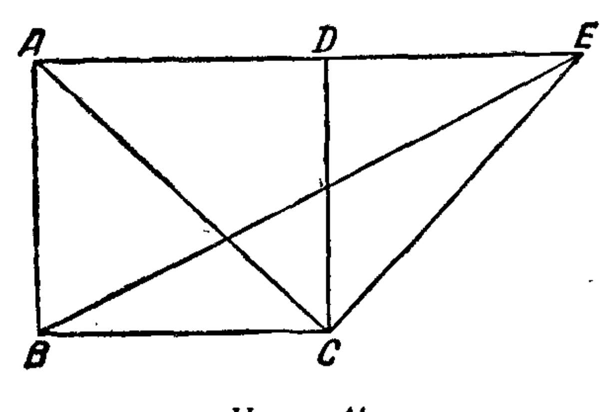
нику *FCE* (аксиома 1), больший меньшему, это же невозможно (аксиома 8); значит, не будет *AF* параллельна прямой *BE*. Подобным же вот образом докажем, что и никакая другая <прямая>, кроме *AD*; значит, *AD* параллельна *BE*.

Значит, равные треугольники, находящиеся на равных основаниях и с той же стороны, находятся между теми же параллельными, что и требовалось доказать.

Предложение 41

Если параллелограмм имеет с треугольником одно и то же основание и находится между теми же параллельными, то параллелограмм будет вдвое большим треугольника.

Пусть параллелограмм *ABCD* с треугольником *EBC* имеет одно и то же основание *BC*, и пусть он находится между теми же параллельными *BC*, *AE*; я утверждаю, что параллелограмм *ABCD* будет вдвое большим треугольника *BEC* (черт. 41).



Черт. 41.

Действительно, соединим *AC*. Вот треугольник *ABC* равен треугольнику *EBC* (предложение 37), ибо он с ним на том же основании *BC* и между теми же параллельными *BC*, *AE* (предложение 37). Но параллелограмм *ABCD* вдвое больше треугольника *ABC*, ибо диаметр *AC* делит его пополам (предложение 34); так что параллелограмм *ABCD* вдвое больше и треугольника *EBC*.

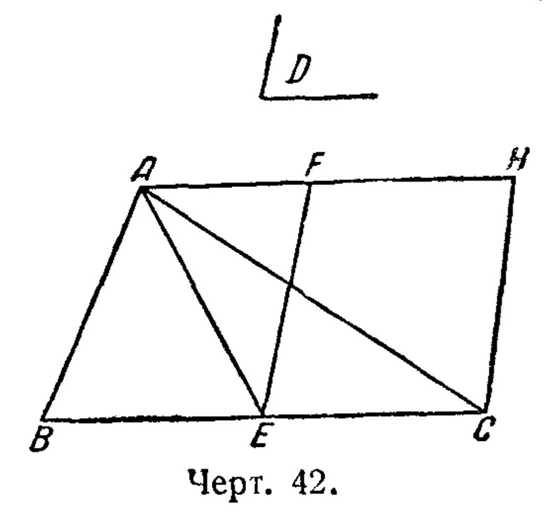
Значит, если параллелограмм имеет с треугольником одно и то же основание и находится между теми же параллельными, то параллелограмм будет вдвое больше треугольника, что и требовалось доказать (69).

Предложение 42

Построить) равный данному треугольнику параллелограмм в данном прямолинейном угле.*

Пусть данный треугольник будет *ABC*, данный же прямолинейный угол *D*; требуется вот построить равный треугольнику *ABC* параллелограмм в угле, равном прямолинейному углу *D* (черт. 42).

Рассечём *BC* пополам в *E* (предложение 10), соединим *AE*, построим на прямой *EC* при её точке *E* угол *CEF*, равный *D* (предложение 23); и через *A* проведём *AH*, параллельную *EC* (предложение 31); через *C* же проведём *CH*, параллельную *EF* (предложение 31); значит, *FECH* есть параллелограмм. И поскольку *BE* равна *EC*, то и треугольник *ABE* равен треугольнику *AEC* (предложение 38), ибо они находятся на равных основаниях *BE*, *EC* и между теми же параллельными *BC*, *AH* (предложение 38); значит, треугольник *ABC* вдвое больше треугольника *AEC*. Но и параллелограмм *FECH* вдвое больше треугольника *AEC* (предложение 41), ибо имеет с ним то же основание и находится с ним между теми же параллельными; значит, параллелограмм *FECH* равен треугольнику *ABC* и имеет угол *CEF*, равный данному *D*.



Черт. 42.

Значит, построен равный данному треугольнику *ABC* параллелограмм *FECH* в угле *CEF*, который равен углу *D*, что и требовалось сделать.

---

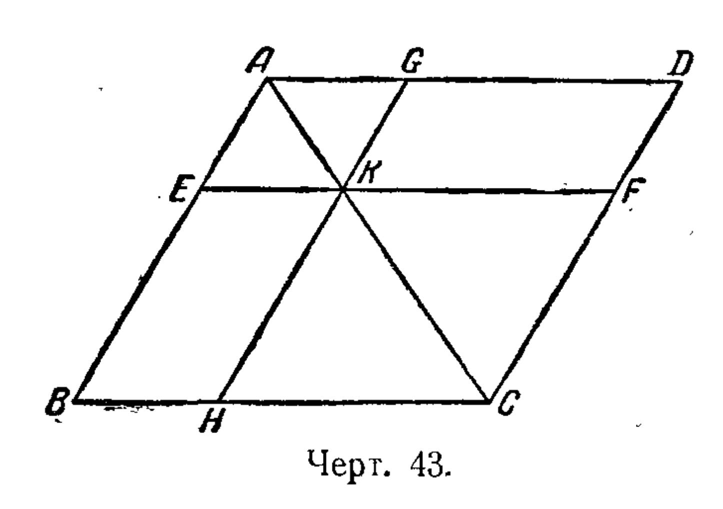
*) У Евклида συστήσασθαι — составить; термин, применяющийся к треугольнику и параллелограмму.

При построении квадрата (предложение 46) Евклид употребляет слово ἀναγράψαι ἀπό — начертить на. Эту разницу подчёркивает Прокл.

Предложение 43

Во всяком параллелограмме «дополнения» *) *расположенных по диаметру параллелограммов равны между собой.*

Пусть будет параллелограмм *ABCD*, диаметр же его *AC*, по *AC* же пусть будут параллелограммы *EG*, *FH*, так называемые же «дополнения» — *BK*, *KD*, я утверждаю, что дополнение *BK* равно дополнению *KD* (черт. 43).



Черт. 43.

Действительно, поскольку *ABCD* — параллелограмм, диаметр же его *AC*, то треугольник *ABC* равен треугольнику *ACD* (предложение 34). Далее, поскольку *EG* — параллелограмм, диаметр же его *AK*, то треугольник *AEK* равен треугольнику *AGK* (предложение 34). Вследствие того же вот и треугольник *KFC* равен треугольнику *KHC* (предложение 34). Поскольку теперь треугольник *AEK* равен треугольнику *AGK*, а *KFC* равен *KHC*, то треугольник *AEK* вместе с *KHC* равен треугольнику *AGK* вместе с *KFC* (аксиома 2); и весь треугольник *ABC* равен всему *ADC*; значит, остающееся «дополнение» *BK* равно остающемуся «дополнению» *KD* (аксиома 3).

Значит, во всяком параллелограмме «дополнения» расположенных по диаметру параллелограммов равны между собой, что и требовалось доказать.

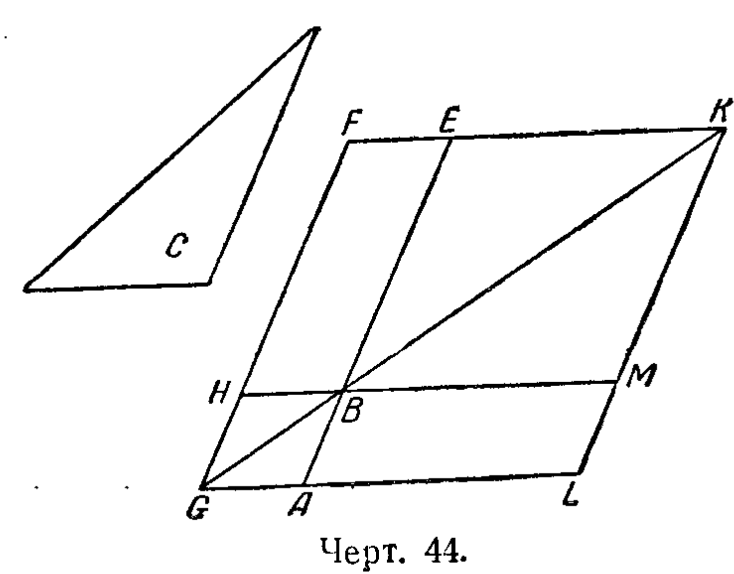
---

*) У Евклида παραπληρώματα. Термин объяснён в тексте предложения.

Предложение 44

К данной прямой «приложить» *) *равный данному треугольнику параллелограмм в данном прямолинейном угле.*

Пусть данная прямая будет *AB* (черт. 44), данный же треугольник *C*, данный же прямолинейный угол *D*; требуется вот к данной прямой *AB* «приложить» параллело-



Черт. 44.

грамм, равный данному треугольнику *C*, в угле, равном *D* (черт. 44).

Построим равный треугольнику *C* параллелограмм *BEFH* в угле *EBH*, который равен *D* (предложение 42); и поместим его так, чтобы *BE* была по одной прямой с *AB*, доведём *FH* до *G*, через *A* проведём *AG*, параллельную как *BH*, так *EF* (предложение 31), и соединим *GB*. И поскольку на параллельные *AG* и *EF* упала прямая *GF*, значит, углы *AGF* и *GFE* ⟨вместе⟩ равны двум прямым (предложение 29); значит, *BGH* и *HFE* ⟨вместе⟩ меньше двух прямых; со стороны же углов, меньших чем два прямых, продолженные неограниченно ⟨прямые⟩ сходятся; значит, *GB*, *FE* при продолжении сойдутся. Продолжим их и пусть они сойдутся в *K*; через точку *K* проведём *KL*, параллельную как *EA*, так *FG* (предложение 31), и продолжим *GA*, *HB* до точек *L*, *M*.

---

*) У Евклида παραβαλεῖν — буквально «прикинуть».

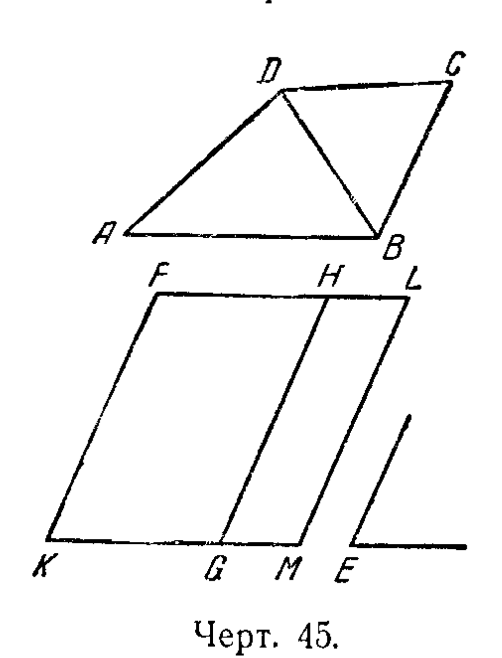
Значит, *GLKF* будет параллелограмм, диаметр же его *GK*, по *GK* же два параллелограмма *AH*, *ME*, так называемые же «дополнения» *LB*, *BF*; значит, *LB* равно *BF* (предложение 43). Но *BF* равно треугольнику *C*; и значит, *LB* равно *C*. И поскольку угол *HBE* равен *ABM*, а *HBE* равен *D*, то значит, и *ABM* равен углу *D*.

Значит, к данной прямой *AB* приложен равный треугольнику *C* параллелограмм *LB* в угле *ABM*, который равен *D*, что и требовалось сделать.

Предложение 45

Построить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм в данном прямолинейном угле.

Пусть данная прямолинейная фигура будет *ABCD*, данный же прямолинейный угол *E*; требуется вот построить равный прямолинейной фигуре *ABCD* параллелограмм в угле, равном *E* (черт. 45).



Черт. 45.

Соединим *DB* и построим равный треугольнику *ABD* параллелограмм *FG* в угле *GKF*, который равен *E* (предложение 42); и приложим к прямой *HG* равный треугольнику *DBC* параллелограмм *HM* в угле *HGM*, который равен *E* (предложение 44).

И поскольку угол *E* равен каждому из *GKF*, *HGM*, то значит, и *GKF* равен *HGM* (аксиома 1). Прибавим общий угол *KGH*; значит, *FKG*, *KGH* ⟨вместе⟩ равны *KGH*, *HGM* (аксиома 2). Но *FKG*, *KGH* равны двум прямым (предложение 29); значит, и *KGH*, *HGM* равны двум прямым (аксиома 1). Вот при некоторой прямой *HG* в точке её *G* две прямые *KG*, *GM*, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные ⟨вместе⟩ двум прямым; значит, *KG* будет по одной прямой с *GM* (предложение 14).

И поскольку на параллельные *KM*, *FH* упала прямая *GH*, то накрестлежащие углы *MGH*, *GHF* равны между собой (предложение 29). Прибавим общий угол *GHL*; значит, углы *MGH*, *GHL* ⟨вместе⟩ равны *GHF*, *GHL* (аксиома 2). Но *MGH*, *GHL* ⟨вместе⟩ равны двум прямым (предложение 29); значит, и *GHF* и *GHL* равны двум прямым (аксиома 1, предложение 29); значит, *FH* будет по одной прямой с *HL* (предложение 14). И поскольку *FK* равна и параллельна *GH*, но *GH* ⟨равна и параллельна⟩ также и *ML*, то значит, и *KF* равна и параллельна *ML* (аксиома 1, предложение 30); и соединяют их прямые *KM*, *FL*; и значит, *KM*, *FL* равны и параллельны (предложение 33); значит, *KFLM* — параллелограмм. И поскольку треугольник *ABD* равен параллелограмму *FG*, а *DBC* параллелограмму *HM*, то значит, вся прямолинейная ⟨фигура⟩ *ABCD* равна всему параллелограмму *KFLM* (аксиома 2).

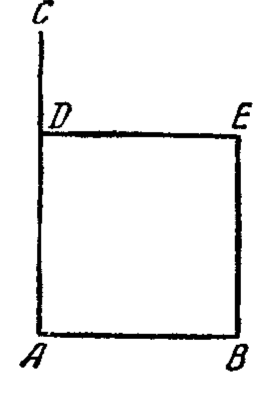
Значит, построен равный данной прямолинейной фигуре *ABCD* параллелограмм *KFLM* в угле *FKM*, который равен данному *E*, что и требовалось сделать (70).

Предложение 46

На данной прямой надстроить) квадрат.*

Пусть данная прямая будет *AB*, требуется на прямой *AB* надстроить квадрат (черт. 46).

Проведём к прямой *AB* от её точки *A* под прямым углом ⟨прямую⟩ *AC* (предложение 11) и отложим *AD*, равную *AB* (предложение 3); и через точку *D* параллельно *AB* проведём *DE* (предложение 31), через же точку *B* параллельно *AD* проведём *BE* (предложение 31).



Черт. 46.

Значит, *ADEB* есть параллелограмм; значит, *AB* равна *DE*, а *AD* равна *BE* (предложение 34). Но *AB* равна *AD*; значит, четыре ⟨прямые⟩ *BA*, *AD*, *DE*, *EB* равны между собой; значит, параллелограмм *ADEB* равносторонний. Я утверждаю вот, что он и прямоугольный.

---

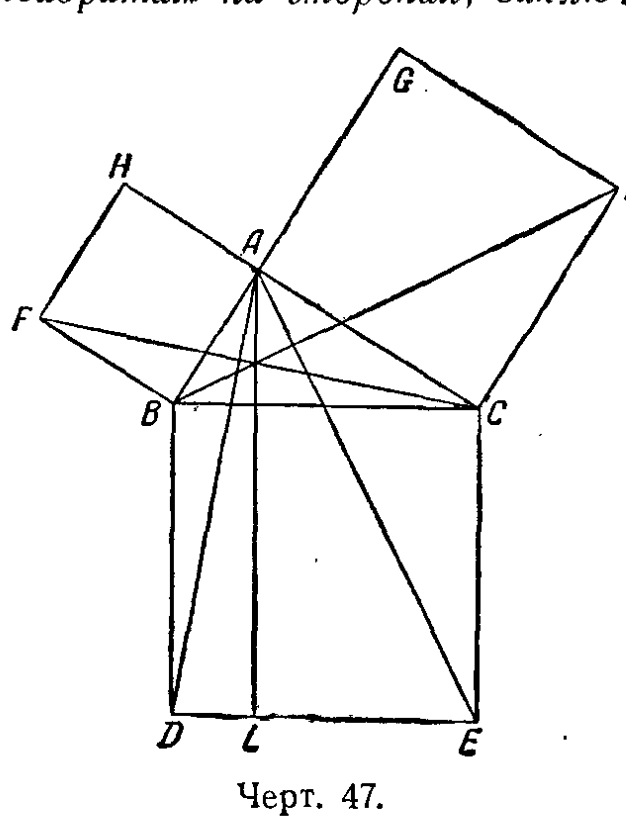
*) У Евклида ἀναγράψαι — см. примечание к предложению 42.

Действительно, поскольку на параллельные AB, DE упала прямая AD, значит, углы BAD и ADE ⟨вместе⟩ равны двум прямым (предложение 29). Угол же BAD прямой; значит, прямой и ADE. В ⟨образованных⟩ же параллельными линиями площадях противоположные стороны и углы равны между собой (предложение 34); значит, и каждый из противоположных углов ABE, BED прямой; значит, $ADEB$ прямоуголен.

Доказано же, что он и равносторонен; значит, он квадрат (определение 22) и надстроен на AB, что и требовалось сделать (71).

Предложение 47

В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол), равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.*



Черт. 47.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, имеющий прямой угол BAC; я утверждаю, что квадрат на BC равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на BA и AC (черт. 47).

Действительно, надстроим на BC квадрат $BDEC$, а на BA, AC надстроим ⟨квадраты⟩ HB, GC (предложение 46); и через A проведём AL, параллельную как BD, так и CE (предложение 31); соединим AD, FC. И поскольку каждый из углов BAC, BAH прямой (определение 10), то вот на некоторой

*) Точный перевод евклидова ἡ πλευρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα — отсюда наш термин «гипотенуза».

прямой BA при её точке A две прямые AC, AH, расположенные не по одну сторону, образуют смежные углы, <вместе> равные двум прямым; значит, CA будет по <одной> прямой с AH (предложение 14). Вследствие того же вот и BA будет по одной прямой с AG. И поскольку угол DBC равен углу FBA (аксиома 1), ибо каждый из них прямой, то прибавим общий угол ABC; значит, весь угол DBA равен всему FBC (аксиома 2). И поскольку DB равна BC, а FB равна BA (определение 22), то вот две стороны DB, BA равны двум сторонам BC, FB каждая каждой; и угол DBA равен углу FBC; значит, и основание (предложение 4) AD равно основанию FC, и треугольник ABD равен треугольнику FBC (предложение 4). И удвоенный треугольник ABD есть параллелограмм BL (предложение 41), ибо они имеют то же основание BD и расположены между теми же параллельными BD, AL (предложение 41). Удвоенный же треугольник FBC (предложение 41) есть квадрат HB; ибо они имеют то же основание FB и расположены между теми же параллельными FB и HC; [но удвоенные равных величин равны между собой (аксиома 5)]; значит, и параллелограмм BL равен квадрату HB. Подобным же вот образом, соединяя AE, BK, будет доказано, что и параллелограмм CL равен квадрату GC; значит, весь квадрат $BDEC$ равен двум квадратам HB и GC вместе взятым. И $BDEC$ есть квадрат, надстроенный на BC, а HB, GC — на BA, AC; значит, квадрат на стороне BC равен <вместе взятым> квадратам на сторонах BA, AC.

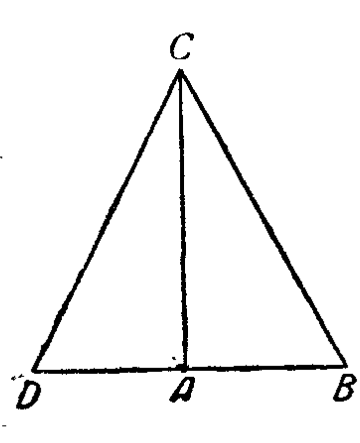
Значит, в прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен <вместе взятым> квадратам на сторонах, заключающих прямой [угол]; что и требовалось доказать (72, 73).

Предложение 48

Если в треугольнике квадрат на одной стороне равен <вместе взятым> квадратам на остальных двух сторонах, то заключённый между остальными двумя сторонами треугольника угол есть прямой.

Пусть в треугольнике ABC квадрат на одной стороне BC равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на сторонах BA и AC; я утверждаю, что угол BAC прямой (черт. 48).

Действительно, проведём от точки A под прямым углом к AC ⟨прямую⟩ AD (предложение 11), отложим AD, равную BA, и соединим DC. Поскольку DA равна AB, то и квадрат на DA равен квадрату на AB. Прибавим общий квадрат на AC; значит, квадраты на DA, AC равны квадратам на BA, AC (аксиома 2). Но квадратам на DA, AC равен квадрат на DC (предложение 47), ибо угол DAC прямой; квадратам же на BA, AC равен квадрат на BC, ибо так предполагается; значит, квадрат на DC равен квадрату на BC, так что и сторона DC равиа BC; и поскольку DA равиа AB, AC же общая, то вот две стороны DA, AC равны двум BA, AC; и основание DC равно основанию BC; значит (предложение 8), и угол DAC [будет] равеи BAC. Угол же DAC прямой, значит, прямой и BAC.



Черт. 48.

Значит, если в треугольнике квадрат на одной стороие равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на остальиых двух сторонах, то заключённый между остальными двумя сторонами треугольника угол — прямой, что и требовалось доказать (74).



КНИГА ВТОРАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. О всяком прямоугольном параллелограмме говорят, что он *заключается* между двумя прямыми, образующими прямой угол.

2. Во всякой же ⟨образованной⟩ параллельными линиями площади каждый из ⟨расположенных⟩ на её диаметре параллелограммов вместе с двумя «дополнениями» будем называть *«гномоном»* (1).

Предложение 1

Если имеются две прямые и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков *), *то прямоугольник, заключающийся между* **) *этими двумя прямыми, равен ⟨вместе взятым⟩ прямоугольникам, заключённым между нерассечённой прямой и каждым из отрезков* (2).

Пусть две прямые будут A, BC и пусть BC рассечена как-либо в точках D, E; я утверждаю, что прямоугольник, заключающийся между A и BC, равен вместе взятым прямо-

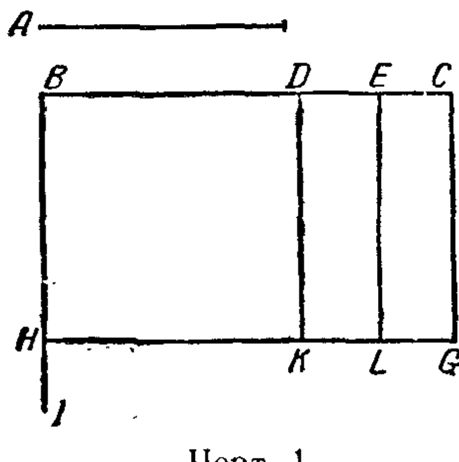
---

*) У Евклида τμήματα — отрезки: подразумевается отрезаиная часть некоторой ограиичеиной (πεπερασμένη) прямой. Евклид различает эти два понятия; для нас, подразумевающих под термином «прямая» всегда неограиичеиную прямую, это различеиие уже не имеет смысла.

) Евклидово ὑπό — под, или предлог нашего творительного падежа, нельзя переводить «на». Прямоугольник $ABCD$ по Евклиду ие построен *на* AB и BC, но *«заключается* **между» **или** даже «содержится между AB и BC».

угольнику, заключённому между A и BD, <затем> между A и DE, и ещё между A и EC (черт. 1).

В самом деле, проведём BI от B под прямыми углами к BC (предложение 11 книги I), отложим BH, равную A, и проведём через H параллельную BC прямую HG (предложение 31 книги I), через же D, E, C параллельные BH прямые DK, EL, CG.



Черт. 1.

Вот <прямоугольник> BG равен BK, DL, EG. И BG есть прямоугольник между A и BC, ибо он заключается между HB и BC, BH же равна A; BK же прямоугольник между A и BD, ибо он заключается между HB и BD, BH же равна A. DL же прямоугольник между A и DE, ибо DK, то-есть BH (по 34 предложению книги I), равна A. И ещё подобным же образом EG прямоугольник между A и EC; значит, прямоугольник между A и BC равен прямоугольникам между A и BD, между A и DE, и ещё между A и EC.

Значит, если имеются две прямые и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков, прямоугольник, заключённый между этими двумя прямыми, равен <вместе взятым> прямоугольникам, заключённым между не рассечённой прямой и каждым из отрезков, что и требовалось доказать.

Предложение 2

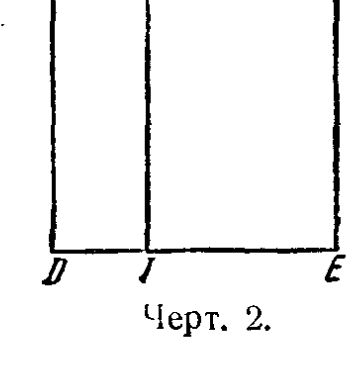
Если прямая линия как-либо рассечена, то прямоугольники, заключённые между целой линией и каждым из отрезков, равны вместе квадрату на всей линии.

В самом деле, пусть AB как-либо рассечена в точке C (черт. 2). Я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между AB и BC, вместе с прямоугольником, заключённым между BA и AC, равен квадрату на BC.

Действительно, надстроим на AB квадрат $ADEB$ (предложение 46 книги I) и проведём через C параллельную

каждой из AD, BE прямую CI (предложение 31 книги I).

Вот AE равна AI и CE. И AE квадрат на AB, AI же прямоугольник, заключённый между BA и AC, ибо он заключается между DA и AC; AD же равна AB (определение 22 книги I); а CE <прямоугольник> между AB и BC, ибо BE равна AB. Значит, прямоугольник между BA и AC вместе с прямоугольником между AB и BC равен квадрату на AB.

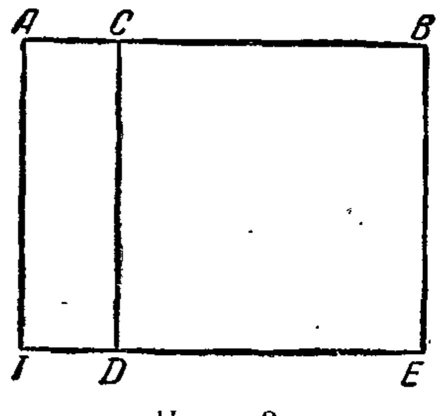


Черт. 2.

Значит, если прямая линия как-либо рассечена, то прямоугольники, заключённые между целой линией и каждым из отрезков, равны вместе квадрату на всей линии, что и требовалось доказать (3).

Предложение 3

Если прямая линия как-либо рассечена, то прямоугольник, заключённый между всей прямой и одним из отрезков, равен прямоугольнику, заключённому между отрезками, и квадрату на ранее упомянутом отрезке.



Черт. 3.

В самом деле, пусть прямая AB (черт. 3) как-либо рассечена в точке C; я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между AB и BC, равен прямоугольнику, заключённому между AC и CB, вместе с квадратом иа BC.

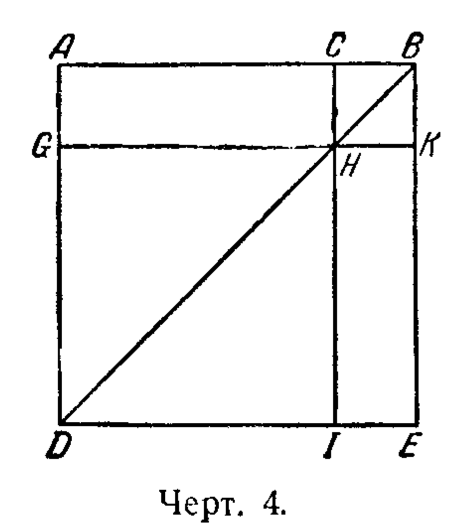
Действительно, надстроим на CB квадрат $CDEB$ (предложение 46 книги I), продолжим ED до I и через A параллельно каждой из CD, BE проведём AI (предложение 31 книги I). Вот <площадь> AE равна AD и CE; и AE — прямоугольник, заключённый между AB и BC, ибо он заключается между AB, BE, BE же равна BC; AD же — прямоугольник между AC и CB, ибо DC равна CB; DB

же квадрат на *CB*; значит, прямоугольник, заключённый между *AB* и *BC*, равен прямоугольнику, заключённому между *AC*, *CB* вместе с квадратом на *BC*.

Значит, если прямая линия как-либо рассечена, то прямоугольник, заключённый между всей прямой и одним из отрезков, равен прямоугольнику, заключённому между отрезками, и квадрату на ранее упомянутом отрезке, что и требовалось доказать (4).

Предложение 4

Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей ⟨прямой⟩ равен квадратам на отрезках вместе с дважды ⟨взятым⟩ прямоугольником, заключённым между отрезками.



Черт. 4.

В самом деле, пусть прямая линия *AB* как-либо рассечена в точке *C*. Я утверждаю, что квадрат на *AB* равен квадратам на *AC*, *CB* вместе с дважды ⟨взятым⟩ прямоугольником, заключённым между *AC*, *CB* *) (черт. 4).

Действительно, надстроим на *AB* квадрат *ADEB* (предложение 46 книги I), соединим *BD* и через *C*, параллельную каждой из *AD*, *EB*, проведём *CH*, через же *H*, параллельную каждой из *AB*, *DE*, проведём *GK* (предложения 30 и 31 книги I). И поскольку *CI* параллельна *AD* и на них упала *BD*, то внешний угол *CHB* равен внутреннему и противолежащему *ADB* (предложение 29 книги I). Но угол *ADB* равен *ABD*, поскольку и сторона *BA* равна *AD* (предложение 5 книги I); и значит, угол *CHB* равен *HBC*, так что и сторона *BC* равна стороне *CH* (предложение 6 книги I); но *CB* равна *HK* (предложение 34 книги I), *CH* же равна *KB*; и значит, *HK* равна *KB*; зна-

*) У Евклида. τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Точнее было бы «дважды между *AC* и *CB* заключённым прямоугольником».

чит, ⟨площадь⟩ *CHKB* равносторонняя. Вот я утверждаю, что она и прямоугольная. Действительно, поскольку *CH* параллельна *BK* [и на них упала прямая *BC*], то значит, углы *KBC* и *HCB* ⟨вместе⟩ равны двум прямым (предложение 29 книги I). Угол же *KBC* прямой; значит, прямой и *BCH*; так что и противоположные углы *CHK*, *HKB* прямые (предложение 34 книги I).

Значит, *CHKB* — прямоугольна. Доказано же, что она и равносторонняя; значит, она квадрат; и она на *CB*. Вследствие того же вот и *GI* *) квадрат; и он на *GH*, т. е. на *AC* (предложение 34 книги I); значит, *GI*, *KC* квадраты на *AC*, *CB*. И поскольку *AH* равно *HE* (предложение 43 книги I), и *AH* прямоугольник между *AC* и *CB*, ибо *HC* равна *CB*; и значит, *HE* равен прямоугольнику между *AC* и *CB*; значит, *AH* и *HE* ⟨вместе⟩ равны дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику между *AC*, *CB*. И *GI*, *CK* суть квадраты на *AC*, *CB*; значит, четыре площади *GI*, *CK*, *AH*, *HE* равны квадратам на *AC*, *CB* и дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику, заключённому между *AC*, *CB*. Но *GI*, *CK*, *AH*, *HE* в целом есть *ADEB*, который будет квадратом на *AB*; значит, квадрат на *AB* равен квадратам на *AC*, *CB* и дважды взятому прямоугольнику, заключённому между *AC*, *CB*.

Значит, если прямая линия как-либо рассечена, квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды ⟨взятым⟩ прямоугольником, заключённым между отрезками, что и требовалось доказать (5, 6, 7, 8).

[Следствие

Вот из этого ясно, что в квадратных площадях параллелограммы на диаметре суть квадраты].

Предложение 5

Если прямая линия рассечена на равные и неравные ⟨отрезки⟩, то прямоугольник, заключённый между неравными ⟨отрезками⟩ всей прямой, вместе с квадратом

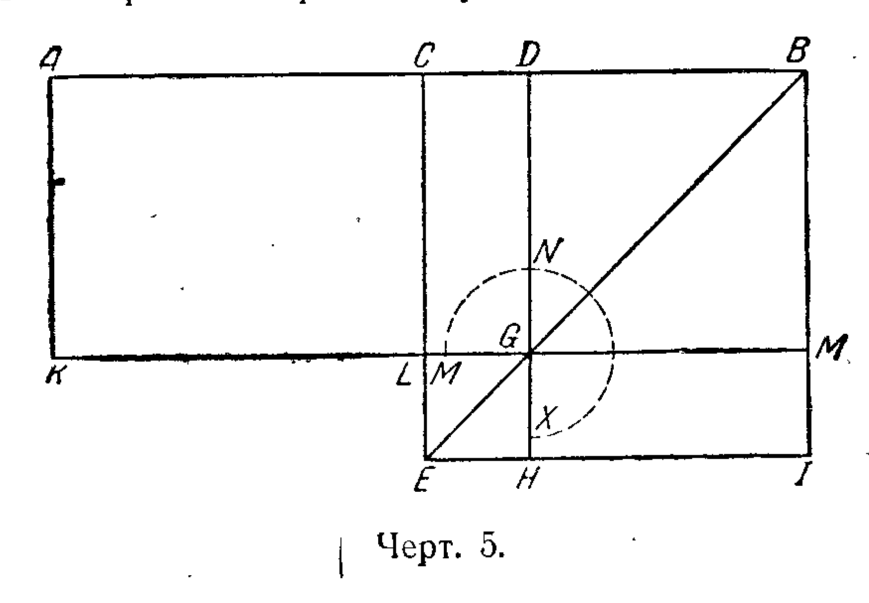
---

*) Отметим недостаток евклидовой символики: двумя буквами он обозначает и отрезок, и прямоугольник (беря буквы двух противоположных вершин). Там, где это может привести к недоразумению, мы будем прибавлять слово «прямоугольник».

на отрезке между сечениями равен квадрату на половине.

В самом деле, пусть какая-либо прямая *AB* рассечена на равные части в *C*, на неравные же в *D*; я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между *AD* и *DB* вместе с квадратом на *CD*, равен квадрату на *CB* (черт. 5).

Действительно, надстроим на *CB* квадрат *CEIB*, соединим *BE* и через *D* параллельную каждой из *CE*, *BI* про-



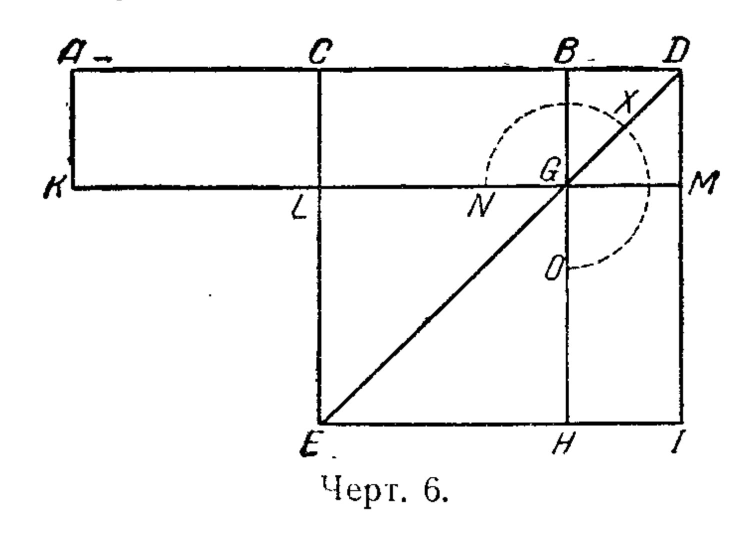
Черт. 5.

ведём *DH*, через же *G* — параллельную каждой из *AB*, *EI*, далее проведём *KM* (предложения 30, 31 книги I) и далее через *A* параллельную каждой из *CL*, *BM* проведём *AK*. И поскольку «дополнение» *CG* равно «дополнению» *GI* (предложение 43 книги I), прибавляем общую *DM*; значит, вся *CM* равна всей *DI*. Но *CM* равна *AL*, поскольку и *AC* равна *CB*; и значит, *AL* равна *DI*. Прибавим общую *CG*; значит, вся *AG* равна гномону *MNX*. Но *AG* прямоугольник между *AD* и *DB*, ибо *DG* равна *DB*; и значит, гномон *MNX* равен прямоугольнику между *AD* и *DB*. Прибавим общий *LH*, который равен квадрату на *CD*; значит, гномон *MNX* и *LH* ⟨вместе⟩ равны прямоугольнику, заключённому между *AD*, *DB* и квадрату на *CD*. Но гномон *MNX* и *LH* в целом квадрат *CEIB*, который на *CB*; значит, прямоугольник, заключённый между *AD*, *DB* ⟨вместе⟩ с квадратом на *CD*, равен квадрату на *CB*.

Значит, если прямая линия рассечена на равные и неравные ⟨отрезки⟩, то прямоугольник, заключённый между неравными ⟨отрезками⟩ вместе с квадратом на отрезке между сечениями, равен квадрату на половине, что и требовалось доказать (9, 10).

Предложение 6

Если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приложена какая-либо другая прямая, то



Черт. 6.

прямоугольник, заключённый между всей прямой с приложенной и самой приложенной, вместе с квадратом на половине равен квадрату на ⟨прямой⟩, составленной из половины и приложенной.

В самом деле, пусть какая-либо прямая AB рассечена пополам в точке C, к ней же «по прямой» приложена какая-либо другая BD (черт. 6); я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между AD, DB вместе с квадратом на CB, равен квадрату на CD.

Действительно, надстроим на CD квадрат $CEID$, соединим DE и через точку B, параллельную каждой из EC, DI, проведём BH, через же точку G, параллельную каждой из AB, EI, проведём KM, и ещё через A, параллельную каждой из CL и DM, проведём AK.

Поскольку теперь AC равна CB, то и AL равна CG. Но CG равна GI (предложение 43 книги I); и значит, AL

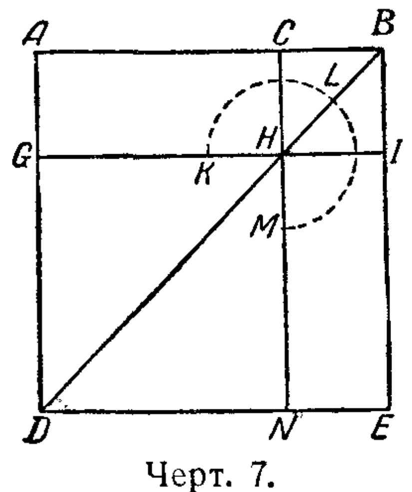
равна GI. Прибавим общую CM; значит, вся площадь AM равна гномону NXO. Но AM есть прямоугольник между AD и DB, ибо DM равна DB; и значит, гномон NXO равен прямоугольнику между AD и DB. Прибавим общую LH, которая равна квадрату на BC; значит, прямоугольник, заключённый между AD и DB, вместе с квадратом на CB, равен гномону NXO и LH.

Но гномон NXO и LH в целом квадрат $CEID$, который на CD; значит, прямоугольник, заключённый между AD и DB вместе с квадратом на CB, равен квадрату на CD.

Значит, если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приложена другая какая-либо прямая, то прямоугольник, заключённый между всей прямой, с приложенной и самой приложенной вместе с квадратом на половине, равен квадрату на <прямой>, составленной из половины и приложенной, что и требовалось доказать (11, 12).

Предложение 7

Если прямая линия как-либо рассечена, то вместе взятые квадрат на всей и квадрат на одном из отрезков равны дважды взятому прямоугольнику, заключённому между всей прямой и упомянутым отрезком, и квадрату на другом отрезке.



Черт. 7.

В самом деле, пусть некоторая прямая AB рассечена как-либо в точке C; я утверждаю, что квадраты на AB и BC <вместе> равны дважды взятому прямоугольнику, заключённому между AB и BC, и квадрату на CA (черт. 7).

Действительно, надстроим на AB квадрат $ADEB$ и вычертим ту же фигуру *).

*) В тексте τὸ σχῆμα, т. е. известную, определённую фигуру, ту же самую, что в предыдущих предложениях: проведём диа-

Поскольку теперь прямоугольник AH равен HE (предложение 43 книги I), то прибавим к обоим CI; значит, весь прямоугольник AI равен всему прямоугольнику CE; значит, AI и CE равны дважды взятому AI. Но AI, CE составляют гномон KLM и квадрат CI; значит, гномон KLM и CI равны дважды взятому AI. Но удвоенное AI есть дважды взятый прямоугольник между AB, BC, ибо BI равна BC; значит, гномон KLM и квадрат CI равны дважды взятому прямоугольнику между AB, BC. Прибавим общий DH, который является квадратом на AC; значит, гномон KLM и квадраты BH, HD равны дважды взятому прямоугольнику, заключённому между AB и BC, и квадрату на AC. Но гномон KLM и квадраты BH, HD в целом составляют $ADEB$ и CI, которые являются квадратами на AB и BC; значит, квадраты на AB и BC равны дважды взятому прямоугольнику, заключённому между AB и BC вместе с квадратом на AC.

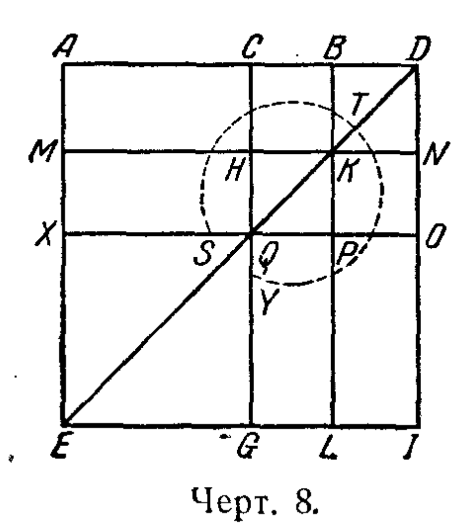
Значит, если прямая линия как-либо рассечена, то вместе взятые квадрат на всей и квадрат на одном из отрезков равны дважды взятому прямоугольнику, заключённому между всей прямой и упомянутым отрезком, и квадрату другого отрезка, что и требовалось доказать (13, 14).

Предложение 8

Если прямая линия как-либо рассечена, то учетверённый прямоугольник, заключённый между всей ⟨прямой⟩ и одним из отрезков, вместе с квадратом на оставшемся отрезке равен квадрату, надстроенному на всей прямой и упомянутом отрезке, как на одной ⟨прямой⟩.

метр BHD, ведём прямые AD, BE, параллельные CN, и прямые AB, DE, параллельные GI. Важно отметить, что соответствующую фигуру надо искать не в 6-м, а в 4-м предложении. Вставка предложений 5 и 6 разорвала естественную связь предложений 4, 7 и 8, образующих единое целое и, без сомнения, бывших таковым у какого-то из предшественников Евклида.

В самом деле, пусть некоторая прямая *AB* как-либо рассечена в точке *C* (черт. 8); я утверждаю, что учетверённый прямоугольник, заключённый между *AB* и *BC* вместе с квадратом на *AC*, равен квадрату, надстроенному на *AB* и *BC*, как на одной прямой.



Черт. 8.

Действительно, продолжим *BD* по прямой [к прямой *AB*], отложим *BD*, равную *CB*, надстроим на *AD* квадрат *AEID* и вычертим дважды ту же фигуру *).

Поскольку теперь *CB* равна *BD*, но *CB* равна *HK*, *BD* же равна *KN*, и значит, *HK* равна *KN*. Вследствие того же вот и *QP* равно *PO*. И поскольку *BC* равна *BD*, *HK* же равна *KN*, то значит, и ⟨площадь⟩ *CK* будет равна *KD*, *HP* же равна *PN*. Но *CK* равна *PN*, ибо они «дополнения» в параллелограмме *CO* (предложение 43 книги I); и значит, *KD* равна *HP*; значит, четыре ⟨площади⟩ *DK*, *CK*, *HP*, *PN* равны между собой. Значит, все четыре будут учетверённое *CK*.

Далее, поскольку *CB* равна *BD*, но *BD* равна *BK*, то-есть *CH*, *CB* же равна *HK*, то-есть *HQ*, значит, и *CH* равна *HQ*. И поскольку *CH* равна *HQ*, *QP* же равна *PO*, то и ⟨площадь⟩ *AH* равняется *MQ* (предложение 36 книги I), а *QL* ⟨площади⟩ *PI*.

Но *MQ* равна *QL*, ибо они «дополнения» в параллелограмме *ML*; и значит, *AH* равно *PI*; значит, четыре площади *AH*, *MQ*, *QL*, *PI* равны между собой; значит, все четыре ⟨вместе⟩ — учетверённое *AH*. Доказано же, что и четыре *CK*, *KD*, *HP*, *PN* ⟨вместе⟩ учетверённое *CK*; значит, эти восемь ⟨площадей⟩, которые заключают гномон *STY*, — учетверённое *AK*. И поскольку *AK* есть пря-

*) Т. е. построим не один гномон, как в предложении 7, а два — при точке *Q* и при точке *K*, т. е. проведём диаметр *DE* и прямые *BL*, *CG*, параллельные *DI*, *AE*, и *MN*, *XO*, параллельные *AD*, *EI*.

моугольник между AB, BD, ибо BK равна BD, значит, четырежды ⟨взятый⟩ прямоугольник между AB и BD равен учетверённому AK.

Доказано же, что учетверённое AK есть и гномон STY; значит, учетверённый прямоугольник между AB и BD равен гномону STY. Прибавим общий XG, который равен квадрату на AC; значит, учетверённый прямоугольник, заключённый между AB и BD вместе с квадратом на AC, равен гномону STY и XG. Но гномон STY и XG в целом составляют квадрат $AEID$, который будет на AD; значит, четырежды ⟨взятый⟩ прямоугольник между AB и BD вместе с квадратом на AC равны квадрату на AD; BD же равна BC. Значит, четырежды ⟨взятый⟩ прямоугольник, заключённый между AB и BC вместе с квадратом на AC, равны квадрату на AD, т. е. квадрату, надстроенному на AB и BC как на одной ⟨прямой⟩.

Значит, если прямая линия как-либо рассечена, то учетверённый прямоугольник, заключённый между всей ⟨прямой⟩ и одним из отрезков, вместе с квадратом на оставшемся отрезке равен квадрату, надстроенному на всей прямой и упомянутом отрезке, как на одной ⟨прямой⟩, что и требовалось доказать.

Предложение 9

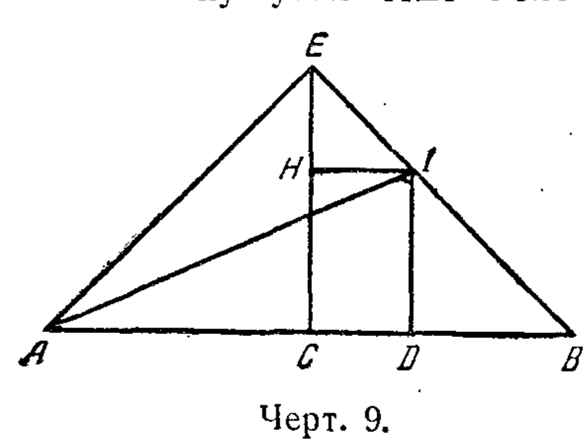
Если прямая линия рассечена на равные и на неравные ⟨части⟩, то квадраты на неравных отрезках всей ⟨прямой⟩ ⟨вместе⟩ вдвое больше квадрата на половине вместе с квадратом на ⟨прямой⟩ между сечениями.

В самом деле, пусть какая-либо прямая AB рассечена на равные части в C, на неравные же в D; я утверждаю, что квадраты на AD и DB ⟨вместе⟩ вдвое больше квадратов на AC и CD (черт. 9).

Действительно, из C под прямыми углами к AB проведём CE (предложение 11 книги I) и отложим её равной каждой из AC и CB, соединим EA и EB и через D, параллельную EC, проведём DI, а через I, параллельную AB, проведём IH и соединим AI. И поскольку AC равна CE,

то и угол EAC равен AEC (предложение 5 книги I). И поскольку угол при C прямой, то значит, остальные углы EAC и AEC ⟨вместе⟩ равны одному прямому (предложение 32 книги I); и они равны; значит, каждый из углов CEA и CAE есть половина прямого.

Вследствие того же вот и каждый из углов CEB, EBC — половина прямого; значит, весь угол AEB прямой. И поскольку угол HEI половина прямого; угол же EHI прямой; ибо он равен внутреннему противолежащему ECB (по предложению 29 книги I); значит, остающийся угол EIH есть половина прямого; значит, угол HEI равен EIH; так что сторона EH равна HI (предложение 6 книги I). Далее, поскольку угол при B — половину прямого, угол же IDB прямой, ибо он опять равен внутреннему и противолежащему углу ECB (по предложению 29 книги I); значит, остающийся угол BID — половина прямого; значит, угол при B равен DIB; так что и сторона ID равна стороне DB (предложение 6 книги I). И поскольку AC равна CE, то и квадрат на AC равен квадрату на CE; значит, квадраты на AC и CE составляют удвоенный квадрат на AC. Квадратам же на AC и CE равен квадрат на EA, ибо угол ACE прямой; значит, квадрат на EA вдвое больше квадрата на AC. Далее, поскольку EH равна HI (предложение 34 книги I), то и квадрат на EH равен квадрату на HI; значит, квадраты на EH, HI вдвое больше квадрата на HI. Квадратам же на EH, HI равен квадрат на EI; значит, квадрат на EI вдвое больше квадрата на HI. Но HI равна CD; значит, квадрат на EI есть удвоенный квадрат на CD. Но и квадрат на EA есть удвоенный квадрат на AC; значит, квадраты на AE и EI ⟨вместе⟩ в два раза больше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на AC и CD. Квадратам же на AE и EI ⟨вместе⟩ равен квадрат на AI, ибо угол AEI прямой (предложение 47 книги I); значит, квадрат на AI



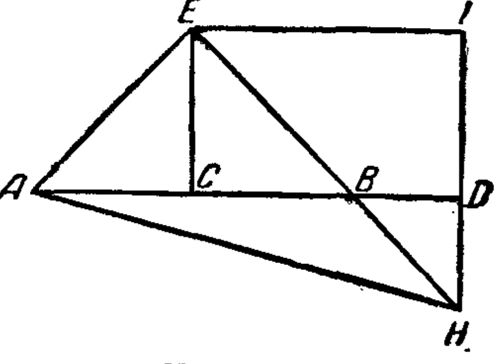
Черт. 9.

вдвое больше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на AC и CD. Квадрату же на AI равны квадраты на AD и DI, ибо угол при D прямой; значит, квадраты на AD и DI вдвое больше квадратов на AC и CD. Но DI равна DB; значит, квадраты на AD и DB вдвое больше квадратов на AC и CD.

Значит, если прямая рассечена на равные и на неравные ⟨части⟩, то квадраты на неравных отрезках всей ⟨прямой⟩ ⟨вместе⟩ вдвое больше квадрата на половине вместе с квадратом на ⟨прямой⟩ между сечениями, что и требовалось доказать (15, 16, 17, 18).

Предложение 10

Если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приставлена какая-нибудь другая прямая, то квадрат на всей прямой с приставленной и квадрат на приставленной ⟨вместе взятые⟩ вдвое больше квадрата на половине и квадрата, надстроенного на половине и приставленной как на одной прямой.



Черт. 10.

В самом деле, пусть какая-либо прямая AB рассечена пополам в C, к ней же «по прямой» приставлена какая-нибудь другая прямая BD (черт. 10); я утверждаю, что квадраты на AD и DB ⟨вместе взятые⟩ вдвое больше квадратов на AC и CD.

Действительно, из точки C под прямыми углами к AB проведём CE, отложим её равной каждой из AC, CB и соединим EA и EB; и через E, параллельную AD, проведём EI, через же D, параллельную CE, проведём ID. И поскольку на параллельные прямые EC и ID упала некоторая прямая EI, то значит, углы CEI и EID ⟨вместе⟩ равны двум прямым (предложение 29 книги I); значит, углы IEB и EID вместе меньше двух прямых; прямые же, продолженные в сторону углов, меньших двух прямых,

сходятся; значит, *EB*, *ID*, продолженные в сторону *B* и *D*, сойдутся. Продолжим их и пусть они сойдутся в *H*; соединим *AH*. И поскольку *AC* равна *CE*, и угол *EAC* равен *AEC* (предложение 5 книги I); и угол при *C* прямой; значит, каждый из углов *EAC*, *AEC* — половина прямого (предложение 32 книги I). Вследствие того же вот и каждый из углов *CEB*, *EBC* — половина прямого; значит, угол *AEB* прямой. И поскольку угол *EBC* — половина прямого, то значит, и угол *DBH* половина прямого (предложение 15 книги I). Но и угол *BDH* прямой, ибо он равен углу *DCE*; они накрестлежащие (предложение 29 книги I); значит, остающийся угол *DHB* половина прямого; значит, угол *DHB* равен *DBH*, так что и сторона *BD* равна стороне *HD* (предложение 6 книги I). Далее, поскольку угол *EHI* — половина прямого, угол же при *I* прямой, ибо он равен противоположному углу при *C* (предложение 34 книги I); значит, остающийся угол *IEH* — половина прямого (предложение 32 книги I); значит, угол *EHI* равен *IEH*, так что и сторона *HI* равна стороне *EI*. И поскольку [*EC* равна *CA* и] квадрат на *EC* равен квадрату на *CA*; значит, квадраты на *EC* и *CA* ⟨вместе⟩ вдвое больше квадрата на *CA*. Квадратам же на *EC* и *CA* равен квадрат на *EA* (предложение 47 книги I); значит, квадрат на *EA* вдвое больше квадрата на *AC*. Далее, поскольку *IH* равна *EI*, и квадрат на *IH* равен квадрату на *IE*, значит, квадраты на *HI* и на *IE* ⟨вместе⟩ вдвое больше квадрата на *EI*. Квадратам же на *HI* и *IE* ⟨вместе⟩ равен квадрат на *EH* (предложение 47 книги I); значит, квадрат на *EH* вдвое больше квадрата на *EI*. Но *EI* равна *CD* (предложение 34 книги I), значит квадрат на *EH* вдвое больше квадрата на *CD*. Доказано же, что и квадрат на *EA* вдвое больше квадрата на *AC*, значит, квадраты на *AE* и *EH* ⟨вместе⟩ вдвое больше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на *AC* и *CD*. Квадратам же на *AE* и *EH* равен квадрат на *AH* (предложение 47 книги I); значит, квадрат на *AH* вдвое больше квадратов на *AC* и *CD*. Квадрату же на *AH* равны ⟨вместе взятые⟩ квадраты на *AD* и *DH*; значит, квадраты на *AD* и на *DH* вдвое больше квадратов на *AC* и *CD*. Но *DH* равна *DB*; значит, квадраты

на AD и DB ⟨вместе⟩ вдвое больше квадратов на AC и CD.

Значит, если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приставлена какая-нибудь прямая, то квадрат на всей прямой с приставленной и квадрат на приставленной ⟨вместе взятые⟩ вдвое больше квадрата на половине и квадрата, надстроенного на половине и приставленной как на одной прямой, что и требовалось доказать (19).

Предложение 11

Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке *).

Пусть данная прямая будет AB (черт. 11); вот требуется AB рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

Надстроим на AB квадрат $ABDC$ (предложение 46 книги I), рассечём AC пополам в точке E, соединим BE, продолжим CA до I, отложим EI, равную BE, надстроим на AI квадрат IG и продолжим HG до K; я утверждаю, что AB рассечена в G так, что прямоугольник, заключённый между AB, BG, она делает равным квадрату на AG.

Черт. 11.

Действительно, поскольку AC рассечена пополам в E и к ней прикладывается IA, то значит, прямоугольник, заключённый между CI, IA, вместе с квадратом на AE, равен квадрату на EI (предложение 6). EI же равна EB; значит, прямоугольник между CI, IA, вместе с квадратом

*) Это так называемое золотое сечение или деление в среднем и крайнем отношении, когда линия делится так, что больший отрезок является средней пропорциональной между всей линией и меньшим отрезком. Современное решение читатель может найти в любом учебнике геометрии.

на AE, равен квадрату на EB. Но квадрату на EB равны квадраты на BA и AE ⟨вместе⟩; ибо угол при A прямой (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между CI, IA, вместе с квадратом на AE, равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на BA и на AE. Отнимем общий квадрат на AE; значит, остающийся прямоугольник, заключённый между CI, IA, равен квадрату на AB. И прямоугольник между CI, IA есть IK, ибо AI равна IH; квадрат же на AB есть AD; значит, IK равно AD. Отнимем общий AK, значит, остаток IG равен GD. И GD есть прямоугольник между AB, BG, ибо AB равна BD; IG же есть квадрат на AG; значит, прямоугольник, заключённый между AB и BG, равен квадрату на GA.

Значит, данная прямая AB рассечена в G так, что прямоугольник, заключённый между AB, BG, она делает равным квадрату на GA, что и требовалось сделать (20, 21).

Предложение 12

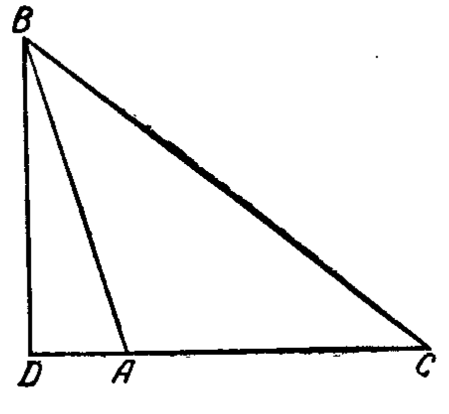
В тупоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей тупой угол, больше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на сторонах, содержащих тупой угол, на дважды взятый прямоугольник, заключённый между одной из сторон при тупом угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром снаружи отрезком при тупом угле.

Пусть тупоугольный треугольник будет ABC, имеющий тупой угол BAC, и пусть из точки B на продолженную CA будет опущен перпендикуляр BD.

Я утверждаю, что квадрат на BC больше квадратов на BA и AC ⟨вместе⟩ на дважды взятый прямоугольник, заключённый между CA, AD (черт. 12).

Действительно, поскольку прямая CD рассечена как-нибудь в точке A, то значит (по предложению 4), квадрат на DC равен квадратам на CA и AD и дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику между CA, AD. Прибавим общий квадрат на DB; значит, квадраты на CD и DB ⟨вместе⟩ равны квадратам на CA, на AD, на DB и дважды ⟨взятому⟩ [прямоугольнику, заключённому] между CA, AD. Но квад-

ратам на *CD* и *DB* равен квадрат на *CB*, ибо угол при *D* прямой (предложение 47 книги I); квадратам же на *AD* и *DB* ⟨вместе⟩ равен квадрат на *AB*; значит, квадрат на *CB* равен квадратам на *CA* и *AB* и дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику, заключённому между *CA*, *AD*; так что квадрат на *CB* больше квадратов на *CA* и *AB* на дважды ⟨взятый⟩ прямоугольник, заключённый между *CA*, *AD*.



Черт. 12.

Значит, в тупоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей тупой угол, больше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на сторонах, содержащих тупой угол, на дважды ⟨взятый⟩ прямоугольник, заключённый между одной из сторон при тупом угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром снаружи отрезком при тупом угле, что и требовалось доказать.

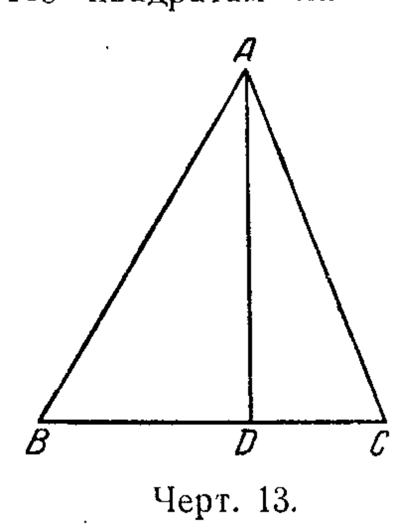
Предложение 13

В остроугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей острый угол, меньше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на заключающих острый угол сторонах на дважды взятый прямоугольник, заключённый между одной из сторон при остром угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром внутрь отрезком при остром угле.

Пусть остроугольный треугольник будет *ABC*, имеющий острый угол при *B*, и пусть из точки *A* на *BC* будет проведён перпендикуляр *AD* (черт. 13); я утверждаю, что квадрат на *AC* меньше квадратов на *CB* и *BA* ⟨вместе⟩ на дважды ⟨взятый⟩ прямоугольник, заключённый между *CB*, *BD*.

Действительно, поскольку прямая *CB* рассечена как-нибудь в точке *D*, то значит (по предложению 7), квадраты на *CB* и *BD* равны удвоенному прямоугольнику,

заключённому между CB, BD и квадрату на DC. Прибавим общий квадрат на DA; значит, квадраты на CB, на DB, на DA ⟨вместе⟩ равны дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику, заключённому между CB, BD, и квадратам на AD и DC. Но квадратам на BD и DA равен квадрат на AB, ибо угол при D прямой (предложение 47 книги I); квадратам же на AD и DC равен квадрат на AC; значит, квадраты на CB и AB ⟨вместе⟩ равны квадрату на AC и дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику между CB, BD, так что один только квадрат на AC меньше квадратов на CB и BA на дважды ⟨взятый⟩ прямоугольник, заключённый между CB, BD.



Черт. 13.

Значит, в остроугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей острый угол, меньше ⟨вместе взятых⟩ квадратов на заключающих острый угол сторонах на дважды ⟨взятый⟩ прямоугольник, заключённый между одной из сторон при остром угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром внутрь отрезком при остром угле, что и требовалось доказать (22, 23, 24, 25).

Предложение 14

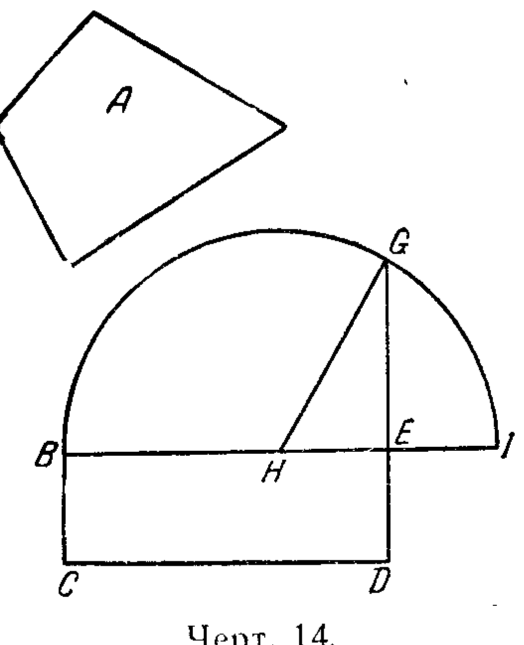
Построить квадрат, равный данной прямолинейной фигуре.

Пусть данная прямолинейная ⟨фигура⟩ будет A; вот требуется построить квадрат, равный прямолинейной фигуре A (черт. 14).

Построим равный прямолинейной фигуре A прямоугольный параллелограмм BD (предложение 45 книги I); если теперь BE будет равно ED, то заданное было бы выполнено. Действительно, построен равный данной прямолинейной фигуре A квадрат BD; если же нет, то одна из BE, ED будет большей. Пусть большей будет BE, продолжим её до I и отложим EI, равную ED; рассечём BI пополам в H (предложение 10 книги I); из центра H раствором

одним из BH или HI опишем полукруг BGI, продолжим DE до G и соединим HG.

Поскольку теперь прямая BI рассечена на равные <отрезки> в H, а на неравные в E, то (предложение 5) значит, прямоугольник, заключённый между BE, EI вместе с квадратом на EH, равен квадрату на HI.



Черт. 14.

HI же равна HG; значит, прямоугольник между BE, EI вместе с квадратом на EH равен квадрату на HG. Квадрату же на HG равны квадраты на GE и EH <вместе> (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между BE, EI вместе с квадратом на HE равен квадратам на GE и EH. Отнимем общий квадрат на HE; тогда остающийся прямоугольник, заключённый между BE, EI, равен квадрату на EG. Но прямоугольник между BE, EI есть BD, ибо EI равна ED; значит, параллелограмм BD равен квадрату на GE.

BD же равен прямолинейной фигуре A. И значит, прямолинейная фигура A равна квадрату, который будет надстраиваться на EG.

Значит, построен равный данной прямолинейной фигуре A квадрат, <именно тот>, который будет надстраиваться на EG, что и следовало сделать (26, 27).



КНИГА ТРЕТЬЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Равные круги* суть те, у которых диаметры равны или <прямые> из центра *) равны (1).

2. Утверждают **), что *прямая касается* ***) *круга*, если она встречает круг, но при продолжении не пересекает круга (2).

3. Утверждают, что *круги касаются друг друга*, если они, встречаясь, не пересекают друг друга.

4. Утверждают, что в круге *прямые равноотстоят от центра*, если прямые перпендикуляры, проведённые к ним из центра, равны.

5. Утверждают, что *отстоит больше* та, на которую падает больший перпендикуляр (3).

6. *Сегмент круга* ****) есть фигура, заключающаяся между прямой и обводом *****) круга.

---

*) У Евклида нет термина «радиус»; вместо него он пользуется выражением ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (подразумевая ἠγμένη—проведённая).

**) У Евклида λέγεται. Термин λέγω, повидимому, употребляется в том же смысле, как при изложении хода доказательства, где λέγω значит «я утверждаю». Так как определение носит явно аксиоматический оттенок, то не следует переводить «говорят» (Гейберг) или «называется» (Петрушевский).

***) У Евклида ἐφάπτομαι — дотрагиваюсь сверху, в противоположность более общему ἅπτω — трогаю, которое в этом определении и в следующем переводится просто «встречает».

****) Τμῆμα — буквально «отрезок», латинское segmentum является буквальным переводом греческого термина.

*****) Слово περιφέρεια у Евклида употребляется как в смысле полной окружности круга, так и её части — дуги. Ввиду того, что

7. *Угол же сегмента* тот, который заключается между прямой и обводом круга (4).

8. *Угол же в сегменте* будет угол, заключающийся между соединяющими прямыми, если взять какую-нибудь точку на обводе сегмента и соединить её прямыми с концами той прямой, которая является *основанием сегмента.*

9. Если же заключающие угол прямые отсекают какой-нибудь обвод, то говорят, что угол на него *опирается* *).

10. *Сектор же круга* **) есть фигура, которая, если построить при центре круга угол, заключается между прямыми, заключающими этот угол, и отсекаемым ими обводом.

11. *Подобные сегменты кругов* суть вмещающие равные углы или в которых углы равны между собой (определение 8).

Предложение 1

Найти центр данного круга.

Пусть данный круг будет ABC; вот требуется найти центр круга ABC.

Проведём как-нибудь в нём некоторую прямую AB, рассечём её пополам в точке D, из D под прямыми углами к AB проведём DC (предложение 11 книги I), продолжим до E и рассечём CE пополам в I (черт. 1). Я утверждаю, что I есть центр [круга] ABC.

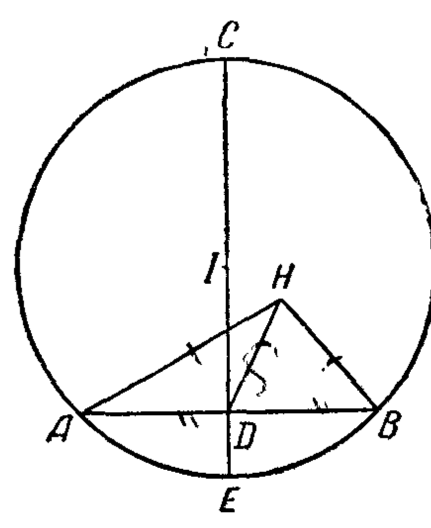
Действительно, пусть не так, но, если возможно, пусть будет H <центром>; соединим HA, HD, HB. И поскольку

это обстоятельство очень характерно для изложения Евклида, мы в дальнейшем будем пользоваться термином «обвод», представляющим буквальный перевод греческого περιφέρεια (περι + + φέρομαι — несусь кругом).

*) У Евклида βεβηκέναι — производная форма от βαίνω — шагаю, ступаю. Форма βέβηκα обозначает, что я ступил и стою неподвижно.

**) У Евклида τομεύς, т. е. резец. Латинское sector представляет буквальный перевод этого слова.

AD равна *DB*, а *DH* общая, то вот две прямые *AD*, *DH* равны двум *HD*, *DB* каждая каждой; и основание *HA* равно основанию *HB* (ибо ⟨обе⟩ «из центра»*)); значит (предложение 8 книги I), угол *ADH* равен *HDB*. Если же прямая, восставленная на прямой, образует смежные углы, равные между собой, то каждый из равных углов прямой (определение 10 книги I); значит, угол *HDB* прямой. Но и *IDB* прямой; значит, *IDB* равен *HDB* — больший меньшему, что невозможно. Значит, *H* не есть центр круга *ABC*. Подобным образом докажем, что и никакая другая точка, кроме *I*.



Черт. 1.

Значит, точка *I* есть центр [круга] *ABC*.

Следствие

Из этого вот ясно, что если в круге какая-либо прямая рассекает другую прямую пополам и под прямым углом, то на секущей прямой находится центр круга — это и требовалось сделать **) (5).

Предложение 2

Если на обводе круга взять какие-либо две точки, то прямая, соединяющая эти точки, попадёт внутрь круга.

Пусть круг будет *ABC* и на обводе его взяты какие-либо две точки *A*, *B*. Я утверждаю, что соединяющая *A* с *B* прямая попадёт внутрь круга (черт. 2).

Действительно, пусть не так, но, если возможно, пусть упадёт вне ⟨круга⟩, как *AEB*; возьмём центр круга *ABC* (предложение 1), и пусть он будет *D*; соединим *DA*, *DB* и продолжим *DIE*.

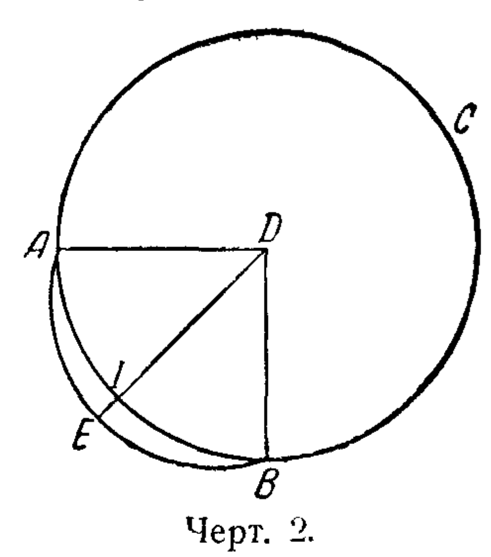
---

*) Т. е. радиусы.

**) ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Эти слова представляют заключение предложения 1 и должны предшествовать следствию.

Поскольку теперь DA равно DB, то, значит, и угол DAE равен DBE (предложение 5 книги I); и поскольку в треугольнике DBE продолжена одна сторона AEB, то, значит, угол DEB будет больше DAE (предложение 16 книги I).

Угол же DAE равен DBE; значит, DEB больше DBE. Больший же угол стягивается большей стороной (предложение 19 книги I); значит, DB больше DE. DB же равна DI. Значит, DI больше DE, меньшая большей, что невозможно. Значит, соединяющая A с B прямая не попадёт вне круга. Подобным вот образом докажем, что и не на самый обвод; значит, внутрь.



Черт. 2.

Значит, если на обводе круга взять две какие-либо точки, то прямая, их соединяющая, попадёт внутрь круга, что и требовалось доказать.

Предложение 3

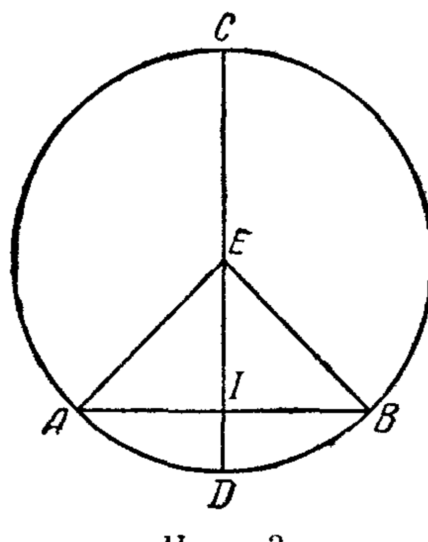
Если в круге некоторая ⟨проходящая⟩ через центр прямая другую, не ⟨проходящую⟩ через центр прямую сечёт пополам, то сечёт её и под прямыми углами; и если сечёт её под прямыми углами, то сечёт её и пополам.

Пусть круг будет ABC и в нём некоторая (черт. 3) ⟨проходящая⟩ через центр прямая CD другую, не ⟨проходящую⟩ через центр прямую AB сечёт пополам в точке I; я утверждаю, что она сечёт её и под прямыми углами.

Действительно, возьмём центр круга ABC (предложение 1), и пусть он будет E, соединим EA, EB.

И поскольку AI равна IB, IE же общая, то две ⟨стороны⟩ равны двум; и основание EA равно основанию EB; значит, угол AIE равен углу BIE (предложение 8 книги I). Если же прямая, восставленная на прямой, образует смежные углы, равные между собой, то каждый из равных углов прямой (определение 10 книги I). Следовательно,

каждый из углов AIE, BIE прямой. Значит, прямая CD, проходящая через центр, секущая пополам прямую AB, не проходящую через центр, сечёт её и под прямыми углами.



Черт. 3.

Но вот пусть CD сечёт AB под прямыми углами; я утверждаю, что она сечёт её и пополам, т. е. что AI равна IB.

Действительно, если сделать те же самые построения, то поскольку EA равна EB и угол EAI равен EBI (предложение 5 книги I). Но и прямой угол AIE равен прямому BIE; значит, существуют два треугольника EAI, EIB, имеющих два угла равными двум углам и одну сторону, равную одной стороне, ⟨именно⟩, общую их сторону EI, стягивающую один из равных углов; значит, и остальные стороны они будут иметь равными остальным сторонам (предложение 26 книги I); значит, AI равна IB.

Значит, если в круге некоторая ⟨проходящая⟩ через центр прямая другую, не ⟨проходящую⟩ через центр прямую сечёт пополам, то сечёт её под прямыми углами, и если сечёт её под прямыми углами, то сечёт её и пополам, что и требовалось доказать.

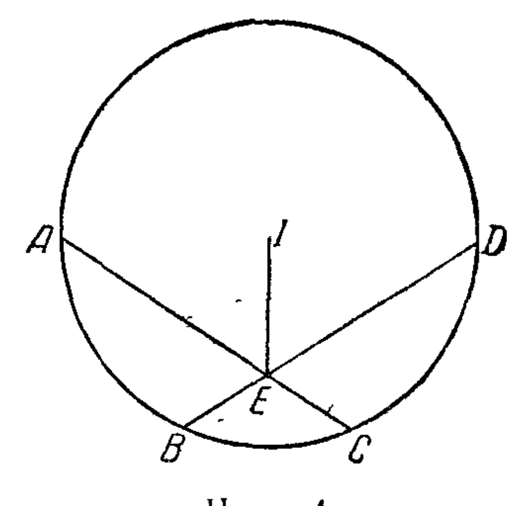
Предложение 4

Если в круге секут друг друга две прямые, не проходящие через центр, то они не секут друг друга пополам.

Пусть будет круг $ABCD$ и в нём две прямые AC, BD, не проходящие через центр, секут друг друга в E; я утверждаю, что они не секут друг друга пополам (черт. 4).

Действительно, если возможно, пусть они секут друг друга пополам, так что AE равна EC, а BE равна ED; возьмём центр круга $ABCD$ (предложенне 1), пусть он будет I, и соединим IE.

Поскольку теперь некоторая проходящая через центр прямая IE другую, не проходящую через центр прямую AC сечёт пополам, то она сечёт её и под прямыми углами; значит, угол IEA прямой; далее, поскольку некоторая прямая IE сечёт другую прямую BD пополам, то она сечёт её и под прямыми углами; значит, угол IEB прямой. Доказано же, что и IEA прямой; значит, IEA равен IEB, меньший большему, что невозможно. Значит, AC и BD не секут друг друга пополам.



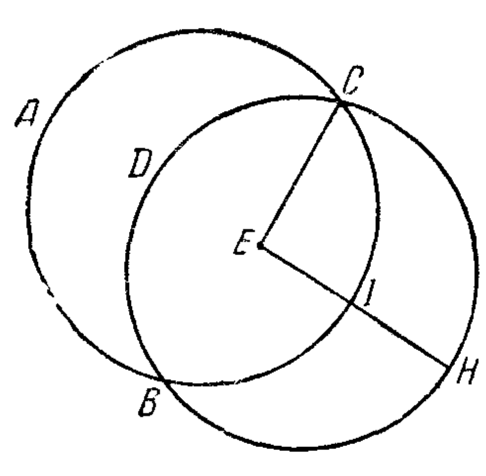
Черт. 4.

Значит, если в круге секут друг друга две прямые, не проходящие через центр, то они не секут друг друга пополам, что и требовалось доказать.

Предложение 5

Если два круга секут друг друга, то у них не будет один и тот же центр.

Пусть два круга ABC, CDH секут друг друга в точках B, C. Я утверждаю, что у них не будет один и тот же центр (черт. 5).



Черт. 5.

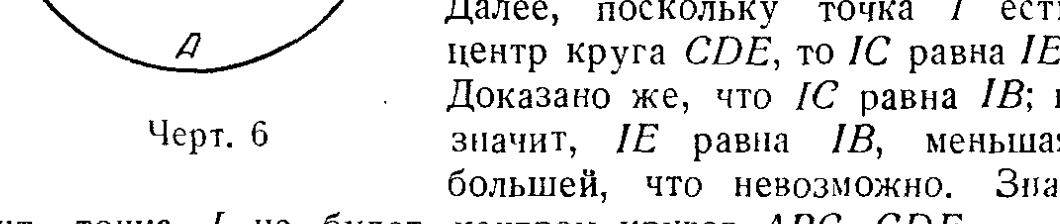
Действительно, если возможно, пусть он будет в E; соединим EC и проведём какнибудь EIH. И поскольку точка E — центр круга ABC, EC равна EI. Далее, поскольку точка E центр круга CDH, EC равна EH; доказано же, что EC равна и EI; значит, и EI равно EH, меньшая большей, что невозможно. Значит, точка E не будет центром кругов ABC, CDH.

Значит, если два круга секут друг друга, то у них не будет один и тот же центр, что и требовалось доказать.

Предложение 6

Если два круга касаются друг друга, то у них не будет один и тот же центр.

Пусть два круга ABC, CDE касаются друг друга в точке C. Я утверждаю, что у них не будет один и тот же центр (черт. 6).



Черт. 6

Действительно, если возможно, пусть будет I; соединим IC и проведём как-нибудь IEB.

Поскольку теперь точка I есть центр круга ABC, то IC равна IB. Далее, поскольку точка I есть центр круга CDE, то IC равна IE. Доказано же, что IC равна IB; и значит, IE равна IB, меньшая большей, что невозможно. Значит, точка I не будет центром кругов ABC, CDE.

Значит, если два круга касаются друг друга, то у них не будет один и тот же центр, что и требовалось доказать (6, 7, 8).

Предложение 7

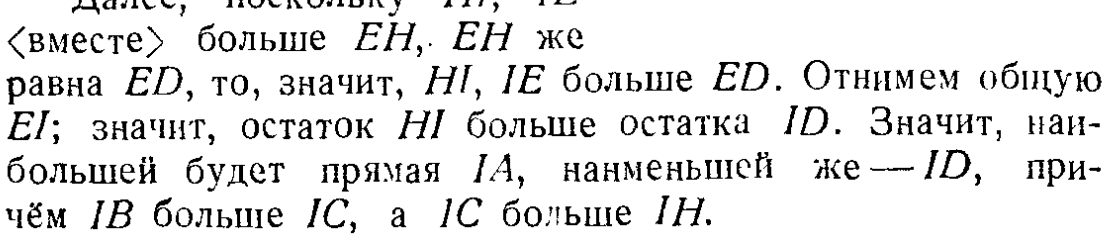
*Если в круге на диаметре взята некоторая точка, которая не будет центром круга, и из этой точки выходят**) *к кругу несколько прямых, то наибольшей будет та, на которой центр, наименьшей же — её остаток. Из других же более близкая к ⟨проходящей⟩ через центр всегда больше более удалённой, и только ⟨по⟩ две равные прямые выйдут из этой точки к кругу ⟨по одной⟩ с каждой стороны от наименьшей.*

---

*) προσπίπτωσιν — более точно было бы «устремляются» (πίπτω — падаю).

Пусть круг будет *ABCD*, диаметр же его *AD* и на *AD* взята некоторая точка *I*, которая не будет центром круга (черт. 7), центр же круга пусть будет *E*, и из *I* пусть выходят к кругу *ABCD* несколько прямых *IB*, *IC*, *IH*; я утверждаю, что наибольшей будет *IA*, а наименьшей *ID*, из других же *IB* больше *IC*, а *IC* больше *IH*.

Действительно, соединим *BE*, *CE*, *HE*. И поскольку во всяком треугольнике две стороны ⟨вместе⟩ больше оставшейся (предложение 20 книги I), то, значит, *EB* ⟨вместе с⟩ *EI* больше *BI*. *AE* же равна *BE* [значит, *BE*, *EI* равны *AI*]; значит, *AI* больше *BI*. Далее, поскольку *BE* равна *CE*, *IE* же общая, то вот две *BE*, *EI* вместе равны двум *CE*, *EI*. Но и угол *BEI* больше угла *CEI*; значит, и основание *BI* больше основания *CI* (предложение 24 книги I). Вследствие того же вот и *CI* больше *IH*.



Черт. 7.

Далее, поскольку *HI*, *IE* ⟨вместе⟩ больше *EH*, *EH* же равна *ED*, то, значит, *HI*, *IE* больше *ED*. Отнимем общую *EI*; значит, остаток *HI* больше остатка *ID*. Значит, наибольшей будет прямая *IA*, наименьшей же — *ID*, причём *IB* больше *IC*, а *IC* больше *IH*.

Я утверждаю также, что из точки *I* выйдут к кругу *ABCD* только ⟨по⟩ две равные прямые ⟨по одной⟩ с каждой стороны от наименьшей *ID*. Действительно, построим на прямой *EI* при её точке *E* угол *IEG*, равный *IEH* (предложение 23 книги I), и соединим *IG*. Поскольку теперь *HE* равна *EG*, *EI* же общая, то вот две ⟨стороны⟩ *HE*, *EI* равны двум *GE*, *EI*; и угол *HEI* равен углу *GEI*; значит, основание *IH* равно основанию *IG*. Вот я утверждаю, что другой, равной *IH*, не выйдет к кругу из точки *I*. Действительно, если возможно, пусть выйдет к кругу такая *IK*. И поскольку *IK* равна *IH*, но *IG* [равна] *IH*, то, значит, *IK* равна *IG*, т. е. ближайшая к центру

равна более удалённой; это же невозможно*); значит, из точки I не выйдет к кругу никакой другой равной HI прямой; значит, только одна.

Значит, если в круге на диаметре взята некоторая точка, которая не будет центром круга, и из этой точки выходят к кругу несколько прямых, то наибольшей будет та, на которой центр, наименьшей же — её остаток, из других же более близкая к ⟨проходящей⟩ через центр всегда больше более удалённой и только ⟨по⟩ две равные прямые выйдут из этой точки к кругу ⟨по одной⟩ с каждой стороны от наименьшей; это и требовалось доказать (9).

Предложение 8

Если взята вне круга некоторая точка и из этой точки проводятся к кругу несколько прямых, из которых одна через центр, а другие как-нибудь, то из прямых, направленных к вогнутому обводу, наибольшая та, которая через центр, а из других более близкая к проходящей через центр всегда больше более удалённой, из прямых же, направленных к выпуклому обводу, наименьшая та, которая находится между данной точкой и диаметром, а из других более близкая к наименьшей всегда меньше более удалённой и только ⟨по⟩ две равные прямые выходят из этой точки к кругу ⟨по одной⟩ с каждой стороны наименьшей.

Пусть круг будет ABC, и пусть вне круга ABC взята некоторая точка D и из неё проводятся несколько прямых DA, DE, DI, DC, и пусть DA будет через центр. Я утверждаю (черт. 8), что из прямых, направленных к вогнутому обводу $AEIC$, наибольшая та, которая через центр —

---

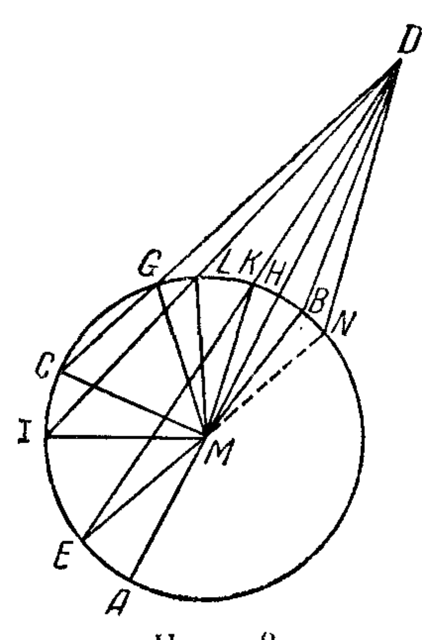
*) В этом месте в некоторых рукописях стоит следующий абзац, который Гейберг не относит к первоначальному тексту Евклида, помещая его в приложении:

«Или и таким образом. Соединим EK. И поскольку HE равна EK, EI же общая, и основание IH равно основанию IK, то, значит, угол HEI равен углу KEI. Но угол HEI равен углу GEI; и, значит, он равен углу KEI — меньший большему; что невозможно».

DA, DE же больше DI, DI же больше DC, из прямых же, направленных к выпуклому обводу $GLKH$, наименьшая DH, которая между точкой и диаметром AH, более же близкая к наименьшей DH всегда меньше более удалённой, ⟨а именно⟩, DK меньше DL, DL же меньше DG.

Возьмём центр круга ABC, и пусть он будет M; соединим ME, MI, MC, MK, ML, MG.

И поскольку AM равна EM, прибавим общую MD; значит, AD равна EM, MD. Но EM, MD ⟨вместе⟩ больше ED (предложение 20 книги I); и значит, AD больше ED. Далее, поскольку ME равна MI, MD же общая, то, значит, EM, MD равны IM, MD; и угол EMD больше угла IMD. Значит, основание ED больше основания ID. Таким же вот образом докажем, что и ID больше CD; значит, наибольшая DA, DE же больше DI (предложение 24 книги I), DI же больше DC.



Черт. 8.

И поскольку MK и KD ⟨вместе⟩ больше MD (предложение 20 книги I), MH же равна MK, то, значит, остаток KD больше остатка HD; так что HD меньше KD; и поскольку в треугольнике MLD на одной из сторон внутри восставлены две прямые MK, KD, то значит, MK, KD ⟨вместе⟩ меньше ML, LD (предложение 21 книги I); MK же равна ML; значит, остаток DK меньше остатка DL. Таким же вот образом докажем, что и DL меньше DG; значит, наименьшая DH, DK же меньше DL и DL меньше DG. Я утверждаю, что только ⟨по⟩ две равные прямые направляются из точки D к кругу ⟨по одной⟩ с каждой стороны наименьшей DH.

Построим на прямой MD и при её точке M угол DMB, равный углу KMD (предложение 23 книги I), и соединим DB. И поскольку MK равна MB, MD же общая, то вот две ⟨стороны⟩ KM, MD равны двум BM, MD

каждая каждой; и угол KMD равен углу BMD; значит, основание DK равно основанию DB (предложение 4 книги I). Я утверждаю, что никакая другая равная DK прямая не выйдет к кругу из точки D. Действительно, если возможно, пусть выйдет и будет DN. Поскольку теперь DK равна DN, но DK равна DB, и значит, DB равна DN, ⟨т. е.⟩ более близкая к наименьшей DH равна более удалённой, что, как доказано, невозможно*).

Значит, не более двух равных прямых выходят к кругу ABC из точки D по одной с каждой стороны наименьшей DH.

Значит, если взята вне круга некоторая точка и из этой точки проводятся к кругу несколько прямых, из которых одна через центр, а другие — как-нибудь, то из прямых, направленных к вогнутому обводу, наибольшая та, которая через центр, а из других более близкая к проходящей через центр всегда больше более удалённой; из прямых же, направленных к выпуклому обводу, наименьшая та, которая находится между данной точкой и диаметром, а из других более близкая к наименьшей всегда меньше более удалённой, и только ⟨по⟩ две равные прямые выходят из этой точки к кругу по одной с каждой стороны наименьшей, что и требовалось доказать.

Предложение 9

Если внутри круга взята некоторая точка и из этой точки к кругу выходят более чем две равные прямые, то взятая точка есть центр круга.

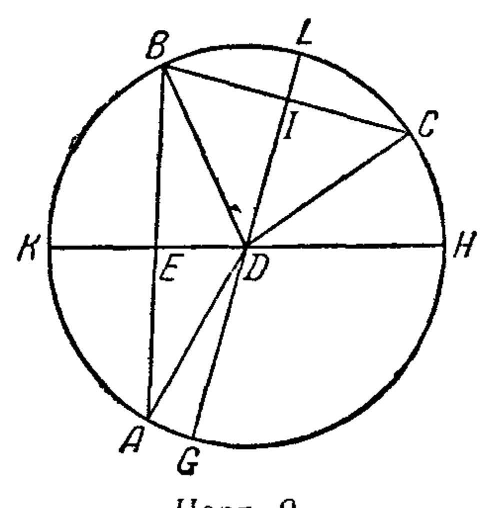
Пусть круг будет ABC, точка же внутри его D, и из D к кругу ABC выходят более чем две равные прямые:

*) В этом месте в некоторых рукописях находятся следующие слова, которые Гейберг удаляет из основного текста: «Или и иначе. Соединим MN. Поскольку KM равна MN, MD же общая, и основание DK равно основанию DN, то, значит, угол KMD равен углу DMN. Но угол KMD равен углу BMD; и, значит, угол BMD равен углу NMD — меньший большему; это же невозможно».

DA, DB, DC; я утверждаю, что точка D есть центр круга ABC (черт. 9).

Действительно, соединим AB, BC и рассечём их пополам в точках E и I, и соединяющие ED, ID продолжим до точек H, K, G, L.

Поскольку теперь AE равна EB, ED же общая, то вот две ⟨стороны⟩ AE, ED равны двум BE, ED и основание DA равно основанию DB; значит, угол AED равен углу BED (предложение 8 книги I); значит, каждый из углов AED, BED прямой (определение 10 книги I); значит, HK сечёт AB пополам и под прямыми углами. И поскольку если в круге некоторая прямая сечёт некоторую прямую пополам и под прямыми углами, то на секущей находится центр круга, значит, на HK находится центр круга. Вследствие того же вот и на GL находится центр круга ABC. И никакой другой общей ⟨точки⟩, кроме D, не имеют прямые HK, GL; значит, точка D есть центр круга ABC.



Черт. 9.

Значит, если внутри круга взята некоторая точка и из этой точки к кругу выходят более чем две равные прямые, то взятая точка есть центр круга, что и требовалось доказать (10, 11).

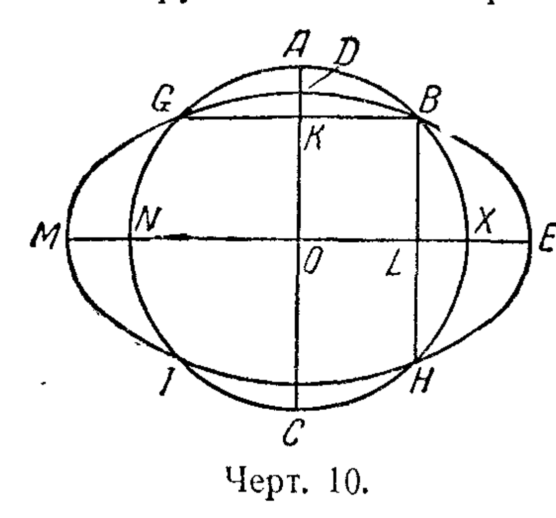
Предложение 10

Круг не сечёт круга более чем в двух точках.

Действительно, если возможно, пусть круг ABC сечёт круг DEI больше, чем в двух точках B, H, I, G; и соединяющие прямые BG и BH пусть будут разделены пополам в точках K и L; и проведённые из K и L под прямыми углами к BG, BH прямые KC, LM пусть будут продолжены до точек A, E (черт. 10).

Поскольку теперь в круге ABC некоторая прямая AC сечёт некоторую прямую BG пополам и под прямыми

углами, то, значит, на *AC* находится центр круга *ABC* (следствие предложения 1). Далее, поскольку в том же самом круге *ABC* некоторая прямая *NX* сечёт некоторую прямую *BH* пополам и под прямыми углами, то, значит, на *NX* находится центр круга *ABC*.



Черт. 10.

Доказано же, что он и на *AC*, и прямые *AC* и *NX* нигде не встречаются, кроме как в *O*; значит, точка *O* есть центр круга *ABC*.

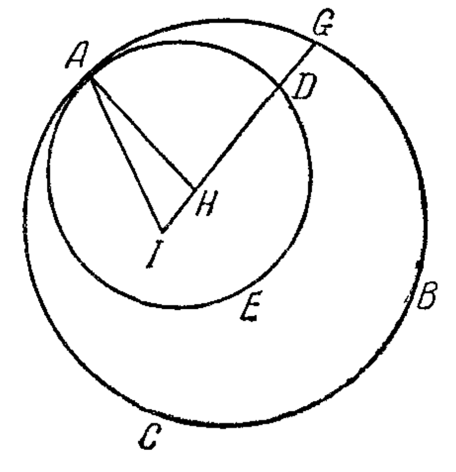
Таким же вот образом докажем, что *O* есть также центр и круга *DEI*; значит, у двух взаимно пересекающихся кругов *ABC*, *DEI* один и тот же центр *O*; это же невозможно (предложение 5).

Значит, круг не сечёт круга более, чем в двух точках, что и требовалось доказать (12).

Предложение 11

Если два круга касаются между собой изнутри и взяты их центры, то соединяющая их центры прямая при продолжении упадёт в точку касания кругов).*

Пусть два круга *ABC*, *ADE* касаются друг друга изнутри в точке *A* и взяты круга *ABC* — центр *I*, круга же *ADE* — центр *H*; я утверждаю, что прямая, соединяющая *H* с *I*, при продолжении упадёт в *A* (черт. 11).



Черт. 11.

---

*) У Евклида ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται — строго говоря не в точку касания, а в место или область касания (συναφή — просто «соприкосновение»).

Действительно, пусть это не так, но, если возможно, пусть она упадёт, как *IHG*; соединим *AI*, *AH*.

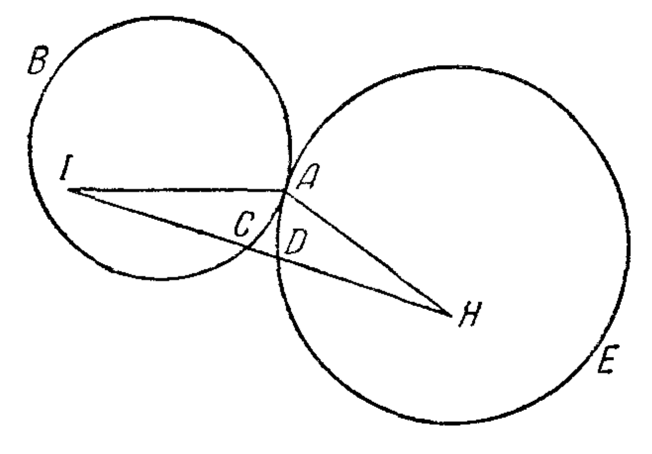
Поскольку теперь *AH*, *HI* ⟨вместе⟩ больше *IA*, то-есть *IG*, то отнимем общую *IH*; значит, остаток *AH* больше остатка *HG*. *AH* же равна *HD*; и значит, *HD* больше *HG* — меньшая большей, что невозможно; следовательно, соединяющая *I* с *H* прямая не упадёт во вне; значит, она упадёт в точку *A* касания.

Значит, если два круга касаются между собой изнутри и взяты их центры, то соединяющая их центры прямая при продолжении упадёт в точку касания кругов, что и требовалось доказать (13).

Предложение 12

Если два круга касаются друг друга извне, то прямая, соединяющая их центры, пройдёт через точку касания *).

Пусть два круга *ABC*, *ADE* касаются друг друга извне в точке *A* и пусть взяты круга *ABC* центр *I*, круга же *ADE* центр *H*; я утверждаю, что прямая, соединяющая *I* с *H*, пройдёт через точку касания *A* (черт. 12).



Черт. 12.

Действительно, пусть это не так, но, если возможно, пусть она пройдёт как *ICDH*; соединим *AI*, *AH*.

Поскольку тёперь точка *I* центр круга *ABC*, то *IA* равна *IC*. Далее, поскольку точка *H* центр круга *ADE*, то *AH* равна *HD*. Доказано же, что и *IA* равна *IC*; значит, *IA*, *AH* ⟨вместе⟩ равны *IC*, *HD*; так что вся *IH*

*) У Евклида ἐπαφή — внешнее касание в противоположность συναφή предыдущего предложения, в котором говорилось о внутреннем касании.

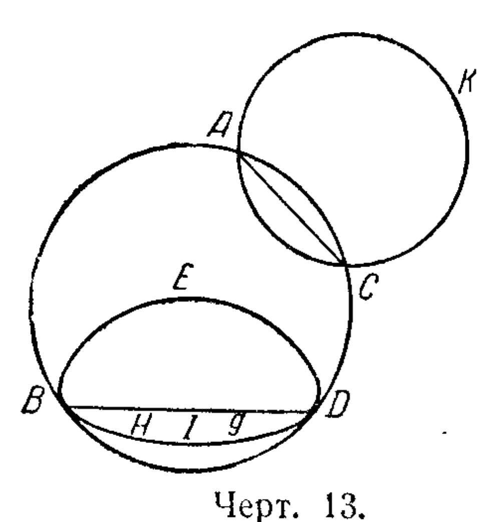
больше *IA*, *AH*; но она и меньше (предложение 20 книги I), что невозможно. Значит, соединяющая *I* с *H* прямая не пройдёт вне точки касания *A*; значит, через неё.

Значит, если два круга касаются друг друга извне, то прямая, соединяющая их центры, пройдёт через точку касания, что и требовалось доказать.

Предложение 13

Круг не касается круга более чем в одной точке, как изнутри, так и извне.

Действительно, если возможно, пусть круг *ABCD* касается круга *EBID* сперва изнутри больше, чем в одной точке, в *D*, *B* (черт. 13).



Черт. 13.

И возьмём круга *ABCD* центр *H*, *EBID* же центр *G*. Значит, прямая, соединяющая *H* с *G*, упадёт в *B* и *D* (предложение 11). Пусть она упадёт как *BHGD*. И поскольку точка *H* есть центр круга *ABCD*, то *BH* равна *HD*; значит, *BH* больше *GD*; значит, подавно *BG* больше *GD*. Далее, поскольку точка *G* центр круга *EBID*, то *BG* равна *GD*; доказано же, что она и подавно больше, что невозможно; значит, круг касается круга изнутри не более, чем в одной точке.

Я утверждаю вот, что то же и извне.

Действительно, если возможно, пусть круг *ACK* касается круга *ABCD* извне больше, чем в одной точке, в *A*, *C*; соединим *AC*.

Поскольку теперь у кругов *ABCD*, *ACK* взяты на обводе каждого две какие-нибудь точки *A*, *C*, то прямая, соединяющая эти точки, упадёт внутри каждого (предложение 2); но она упала внутри *ABCD* и вне *ACK* (предложение 3), что нелепо; значит, круг не касается круга

извне более чем в одной точке. Доказано же, что так же и изнутри.

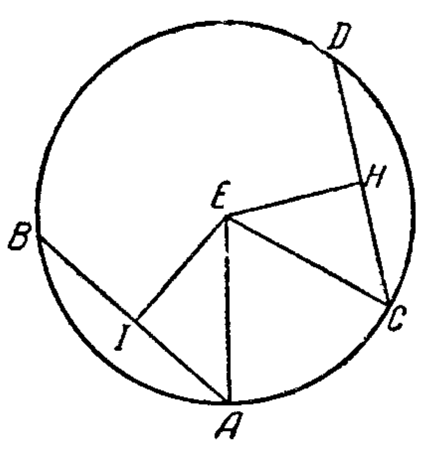
Значит, круг не касается круга более чем в одной точке, как изнутри, так и извне, что и требовалось доказать (14).

Предложение 14

В круге равные прямые равно отстоят от центра и равноотстоящие от центра равны между собой.

Пусть будет круг *ABCD* и в нём равные прямые *AB*, *CD*; я утверждаю, что *AB*, *CD* равно отстоят от центра (черт. 14).

Действительно, возьмём центр круга *ABCD* и пусть он будет *E*, и из *E* к *AB* и *CD* проведём перпендикуляры *EI* и *EH* и соединим *AE*, *EC*.



Черт. 14.

Поскольку теперь некоторая проведённая через центр прямая *EI* некоторую не проходящую через центр прямую *AB* сечёт под прямыми углами, то она сечёт её и пополам (предложение 3). Значит, *AI* равна *IB*; значит, *AB* удвоенная *AI*. Вследствие того же вот и *CD* удвоенная *CH*, и *AB* равна *CD*; значит, и *AI* равна *CH*. И поскольку *AE* равна *EC*, то и квадрат на *AE* равен квадрату на *EC*. Но квадрату на *AE* равны квадраты на *AI*, *EI* ⟨вместе⟩, ибо угол при *I* прямой (предложение 47 книги I); квадрату же на *EC* равны квадраты на *EH*, *HC* ⟨вместе⟩, ибо угол при *H* прямой; значит, квадраты на *AI* и *IE* ⟨вместе⟩ равны квадратам на *CH*, *HE*, из которых квадрат на *AI* равен квадрату на *CH*, ибо *AI* равна *CH*; значит, остающийся квадрат на *IE* равен квадрату на *EH*; значит, *EI* равна *EH*. В круге же равноотстоящими от центра называются прямые, если проведённые из центра к ним перпендикуляры равны (определение 4); значит, *AB*, *CD* равно отстоят от центра.

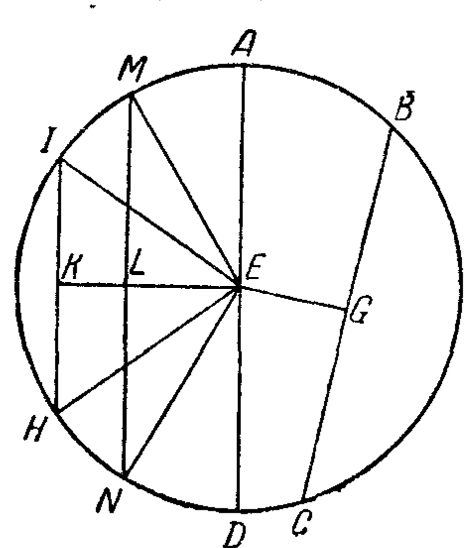
Но вот пусть прямые *AB*, *CD* равно отстоят от центра, т. е. *EI* равна *EH*. Я утверждаю, что и *AB* равна *CD*.

Действительно, сделав те же самые построения, подобным же образом докажем, что AB вдвое больше AI, а CD вдвое больше GH; и поскольку AE равна CE, то квадрат на AE равен квадрату на CE; но квадрату на AE равны квадраты на EI, IA ⟨вместе⟩ (предложение 47 книги I), квадрату же на CE равны квадраты на EH, HC ⟨вместе⟩. Значит, квадраты на EI, IA ⟨вместе⟩ равны квадратам на EH, HC; из них квадрат на EI равен квадрату на EH, ибо EI равна EH; значит, остающийся квадрат на AI равен квадрату на CH; значит, AI равна CH; и удвоенная AI будет AB, удвоенная же CH будет CD; значит, AB равна CD.

Значит, в круге равные прямые равно отстоят от центра и равноотстоящие от центра равны между собой, что и требовалось доказать (15).

Предложение 15

В круге наибольшая ⟨прямая⟩ — диаметр, из других же всегда более близкая к центру больше более удалённой.



Черт. 15.

Пусть круг будет $ABCD$, диаметр же его AD, центр же E, и пусть более близкая к диаметру AD прямая будет BC, а более удалённая IH; я утверждаю, что наибольшей будет AD, BC же больше IH (черт. 15).

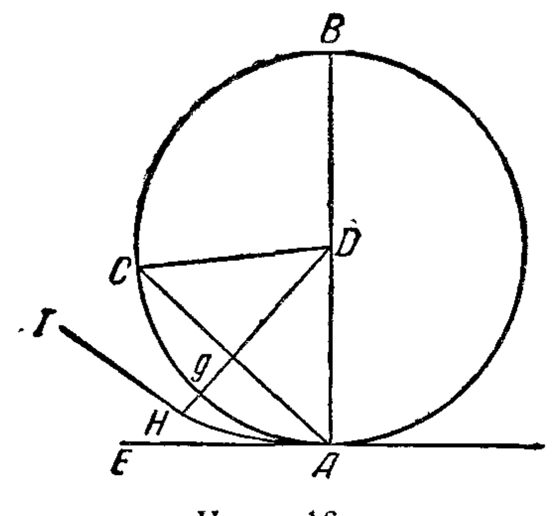
Действительно, проведём из центра E к BC, IH перпендикуляры EG, EK. И поскольку BC ближе к центру, IH же дальше, то, значит, EK больше EG (определение 5). Отложим EL, равную EG, и проведённую через L под прямыми углами к EK прямую LM продолжим до N и соединим ME, EN, IE, EH. И поскольку EG равна EL, то и BC равна MN (предложение 14). Далее, поскольку AE равна EM, ED же равна EN, то, значит, AD равна

ME, *EN* ⟨вместе взятым⟩. Но *ME*, *EN* ⟨вместе⟩ больше *MN* (предложение 20 книги I) [и *AD* больше *MN*], *MN* же равна *BC*; значит, *AD* больше *BC*. И поскольку две стороны *ME*, *EN* равны двум *IE*, *EN*, и угол *MEN* больше угла *IEH*, то значит, основание *MN* больше основания *IH* (предложение 24 книги I). Но доказано, что *MN* равна *BC* [и *BC* больше *IH*]. Значит, наибольшая ⟨прямая⟩ — диаметр *AD*, и *BC* больше *IH*.

Значит, в круге наибольшая ⟨прямая⟩ — диаметр, из других же всегда более близкая к центру больше более удалённой, что и требовалось доказать.

Предложение 16

Прямая, проведённая под прямыми углами к диаметру круга в ⟨его⟩ концах), упадёт вне круга, и в пространстве между прямой и обводом не поместится**) никакая другая прямая, и угол полукруга больше всякого прямолинейного острого угла, а остаток меньше.*



Черт. 16.

Пусть *ABC* круг около центра *D* с диаметром *AB*; я утверждаю, что прямая, проведённая из *A* под прямыми углами к *AB* в концах, упадёт вне круга (черт. 16).

Действительно, пусть это не так, но если возможно, пусть она упадёт внутри, как *AC*; соединим *DC*.

Поскольку *DA* равна *DC*, то и угол *DAC* равен *ACD* (предложение 5 книги I). Угол же *DAC* прямой; значит, и угол *ACD* прямой. Вот в треугольнике *ACD* два угла *DAC*, *ACD* ⟨вместе⟩ равны двум прямым, что невозможно

*) ἄκρον — край, конец, вершина.

**) οὐ παρεμπεσεῖται — не впадёт между.

(предложение 17 книги I). Значит, прямая, проведённая из точки *A* под прямыми углами к *BA*, не упадёт внутри круга.

Подобным же вот образом докажем, что и не по обводу; значит, ⟨она упадёт⟩ вне.

Пусть она упадёт, как *AE*; вот я утверждаю, что в пространстве между прямой *AE* и обводом *CGA* не поместится никакая другая прямая.

Действительно, если это возможно, то пусть поместится как *IA*; проведём из точки *D* к *IA* перпендикуляр *DH*. И поскольку угол *AHD* прямой, угол же *DAH* меньше прямого, то значит, *AD* больше *DH* (предложение 19 книги I).

DA же равна *DG*; значит, *DG* больше *DH*, меньшая — большей, что невозможно. Значит, в пространстве между прямой и окружностью никакая другая прямая не поместится.

Я утверждаю, что и угол полукруга, ⟨то-есть⟩ заключённый между прямой *BA* и обводом *CGA*, больше всякого прямолинейного острого угла, остаток же, заключённый между обводом *CGA* и прямой *AE*, меньше всякого прямолинейного острого угла.

Действительно, если существует некоторый прямолинейный угол, больший угла, заключённого между прямой *BA* и обводом *CGA*, или меньший угла, заключённого между обводом *CGA* и прямой *AE*, то в пространстве между обводом *CGA* и прямой *AE* поместится прямая, которая образует заключённый между прямыми угол, больший угла, заключённого между прямой *AB* и обводом *CGA*, или меньший угла, заключённого между обводом *CGA* и прямой *AE*. Но ⟨такая прямая⟩ не помещается. Значит, не будет острого заключённого между прямыми угла, большего угла, заключённого между прямой *BA* и обводом *CGA*, или меньшего угла, заключённого между обводом *CGA* и прямой *AE* (16, 17).

Следствие

Вот из этого ясно, что прямая, проведённая **к диаметру** круга в концах под прямыми углами, **касается*) круга**

*) ἐφάπτεται — т. е. касается снаружи.

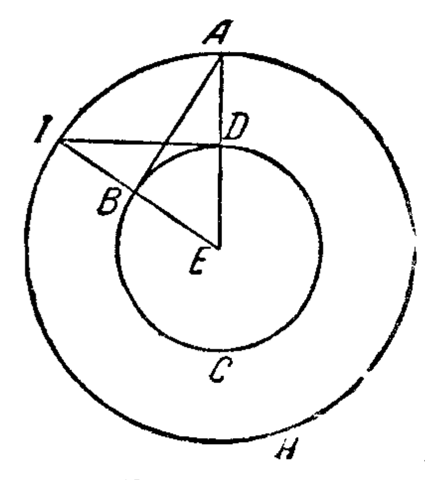
[и что прямая касается круга только в одной точке, поскольку доказано, что прямая, соединяющая две его точки, упадёт внутри его], что и требовалось сделать *).

Предложение 17

Из данной точки к данному кругу провести касательную прямую линию.

Пусть данная точка будет A, данный же круг BCD; вот требуется из точки A к кругу BCD провести касательную прямую линию (черт. 17).

Действительно, возьмём центр круга E, соединим AE, и из центра E раствором EA опишем круг AIH, и из D под прямыми углами к EA проведём DI и соединим EI, AB; я утверждаю, что из точки A к кругу BCD проведена касательная AB.



Черт 17.

Действительно, поскольку E — центр кругов BCD, AIH, то значит, EA равна EI, ED же равна EB; вот две <стороны> AE, EB равны двум IE, ED; и они заключают общий угол при E; значит, основание DI равно основанию AB, и треугольник DEI равен треугольнику EBA, и остальные углы равны остальным (предложение 4 книги I); значит, угол EDI равен углу EBA. Угол же EDI прямой; значит, и угол EBA прямой. И BE есть <прямая> «из центра»; прямая же, проведённая к диаметру круга под прямыми углами в концах, касается круга (предложение 16, следствие); значит, AB касается круга BCD.

Значит, из данной точки A к данному кругу BCD проведена касательная прямая линия AB, что и требовалось сделать (17, 18, 19, 20).

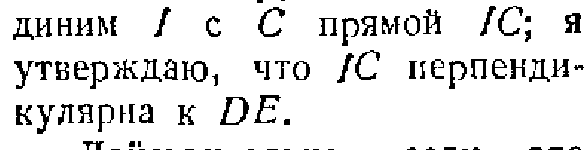
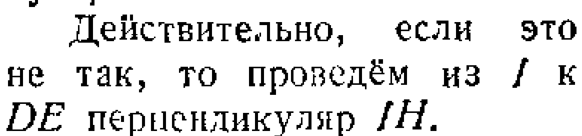
---

*) Свойство перпендикулярности касательной к радиусу было известно уже другу Платона Архиту Тарентскому (1-я половина IV в. до н. э.).

Предложение 18

Если некоторая прямая касается круга и центр соединён прямой с касанием, то соединяющая прямая будет перпендикулярной к касательной.

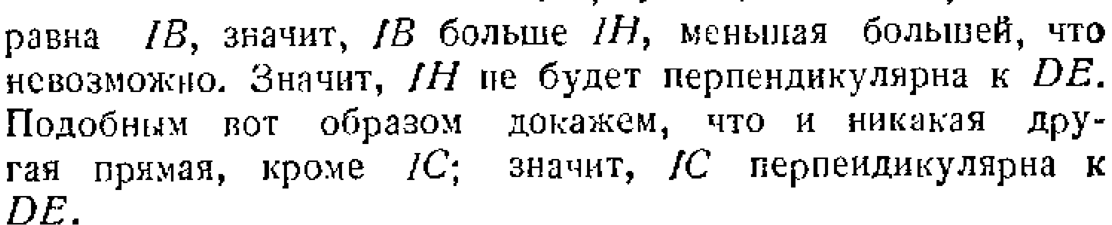
Пусть некоторая прямая DE касается круга ABC (черт. 18) в точке C, возьмём центр I круга ABC и соединим I с C прямой IC; я утверждаю, что IC перпендикулярна к DE.

Черт. 18.

Действительно, если это не так, то проведём из I к DE перпендикуляр IH.

Поскольку теперь угол IHC прямой, то значит, угол ICH острый (предложение 17 книги I); больший же угол стягивается и большей стороной (предложение 19 книги I); значит, IC больше IH; IC же равна IB, значит, IB больше IH, меньшая большей, что невозможно. Значит, IH не будет перпендикулярна к DE. Подобным вот образом докажем, что и никакая другая прямая, кроме IC; значит, IC перпендикулярна к DE.



Значит, если некоторая прямая касается круга и центр соединён прямой с касанием, то соединяющая прямая будет перпендикулярна к касательной, что и требовалось доказать.

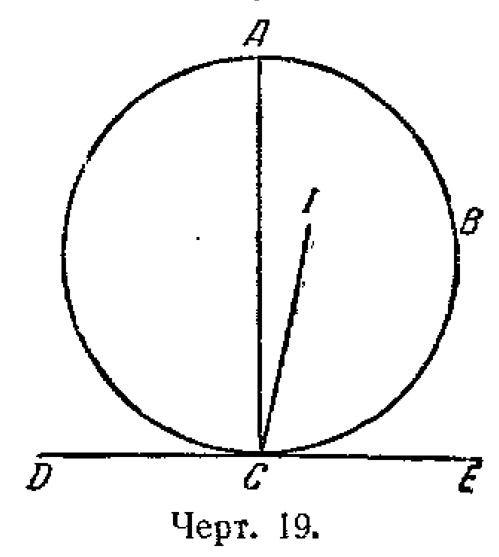
Предложение 19

Если некоторая прямая касается круга и из точки касания под прямыми углами к касательной проведена прямая линия, то центр круга будет на проведённой прямой.

Пусть некоторая прямая DE касается круга ABC в точке C, и пусть через C под прямыми углами к DE проведена CA; я утверждаю, что центр круга находится на AC (черт. 19).

Действительно, пусть это не так, но, если возможно, пусть он будет I; соединим CI.

Поскольку [теперь] некоторая прямая DE касается круга ABC и центр соединён с точкой касания прямой IC, то значит, IC перпендикулярна к DE (предложение 18); значит, угол ICE прямой. Прямой же и угол ACE; значит, угол ICE равен ACE, меньший большему, что невозможно. Значит, I не есть центр круга ABC.



Черт. 19.

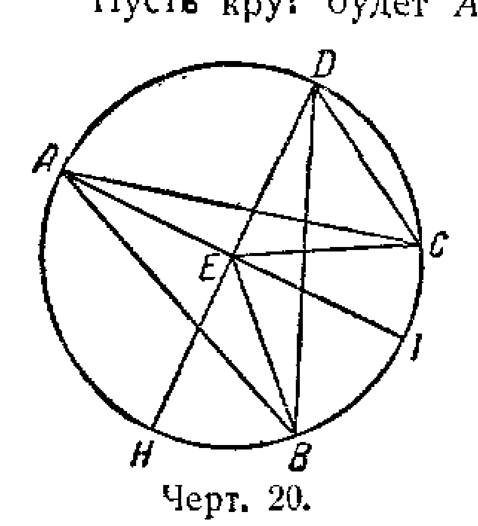
Подобным вот образом докажем, что и никакая другая ⟨точка⟩, кроме как на AC.

Значит, если некоторая прямая касается круга и из точки касания под прямыми углами к касательной проведена прямая линия, то центр круга будет на проведённой прямой, что и требовалось доказать.

Предложение 20

В круге угол при центре вдвое больше угла при обводе, если эти углы имеют основанием тот же самый обвод.

Пусть круг будет ABC и угол при центре его пусть будет BEC, при окружности же BAC, пусть они имеют основанием тот же самый обвод BC; я утверждаю, что BEC вдвое больше BAC (черт. 20).



Черт. 20.

Действительно, соединяющую AE продолжим до I.

Поскольку теперь EA равна EB, то и угол EAB равен EBA (предложение 5 книги I); значит, углы EAB, EBA ⟨вместе⟩ вдвое больше EAB. Угол же BEI равен ⟨вместе взятым⟩ углам EAB, EBA (предложение 32 книги I); и значит, угол BEI вдвое больше EAB. Вследствие

того же вот и *IEC* вдвое больше *EAC*; значит, весь угол *BEC* вдвое больше всего угла *BAC*.

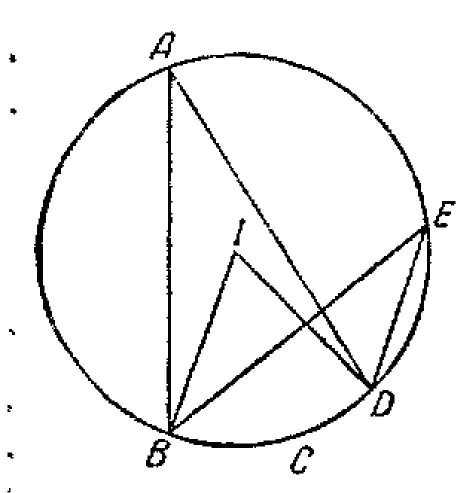
Вот проведём далее другую ломаную*) и пусть другой угол будет *BDC*; соединяющую *DE* продолжим до *H*. Подобным вот образом докажем, что угол *HEC* вдвое больше *EDC*; у них угол *HEB* вдвое больше *HDB*; значит, остаток *BEC* вдвое больше *BDC*.

Значит, в круге угол при центре вдвое больше угла при обводе, если эти углы имеют основанием тот же самый обвод, что и требовалось доказать**).

Предложение 21

В круге углы в одном и том же сегменте равны между собой.

Пусть круг будет *ABCD* и в одном и том же сегменте *BAED* пусть будут углы *BAD* и *BED*. Я утверждаю, что углы *BAD*, *BED* равны между собой (черт. 21).



Черт. 21.

Действительно, возьмём центр круга *ABCD* и пусть он будет *I*, и соединим *BI* и *ID*. И поскольку угол *BID* находится при центре, угол же *BAD* при обводе и ⟨оба они⟩ имеют в основании тот же обвод *BCD*, то значит (предложение 20), угол *BID* вдвое больше *BAD*. Вследствие того же вот угол *BID* вдвое больше и угла *BED*; значит, угол *BAD* равен углу *BED*.

Значит, в круге углы в одном и том же сегменте равны между собой, что и требовалось доказать (21).

---

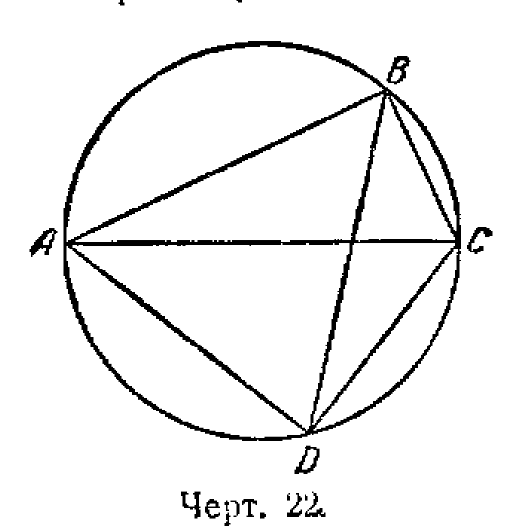
*) У Евклида необычайно сжато: κεκλάσθω δὴ πάλιν — вот сломаем снова (подразумевается другую прямую). Этот технический термин встречается у Аристотеля *Analyt. posteriora* I, 10.

**) Предложениями 20 и 21 пользуется ещё Гиппократ Хиосский в теории квадратуры луночек.

Предложение 22

У четырёхсторонников, ⟨вписанных⟩ в кругах, противоположные углы ⟨вместе⟩ равны двум прямым.

Пусть круг будет *ABCD* и четырёхсторонник в нём *ABCD*; я утверждаю, что противоположные углы ⟨вместе⟩ равны двум прямым (черт. 22).



Черт. 22.

Соединим *AC*, *BD*.

Поскольку теперь во всяком треугольнике три угла равны двум прямым (предложение 32 книги I), то значит, в треугольнике *ABC* три угла *CAB*, *ABC* и *BCA* равны двум прямым. Но угол *CAB* равен *BDC*, ибо они в одном и том же сегменте *BADC* (предложение 21); угол же *ACB* равен *ADB*, ибо они в одном и том же сегменте *ADCB*. Значит, весь угол *ADC* равен *BAC*, *ACB* ⟨вместе взятым⟩. Прибавим общий угол *ABC*; значит, *ABC*, *BAC*, *ACB* ⟨вместе⟩ равны *ABC*, *ADC*. Но углы *ABC*, *BAC*, *ACB* равны двум прямым. И значит, *ABC*, *ADC* вместе равны двум прямым. Подобным же вот образом докажем, что и углы *BAD*, *DCB* ⟨вместе⟩ равны двум прямым.

Значит, у четырёхсторонников, ⟨вписанных⟩ в кругах, противоположные углы ⟨вместе⟩ равны двум прямым, что и требовалось доказать*) (22).

Предложение 23

На той же прямой с той же стороны нельзя построить два подобных и неравных сегмента кругов.

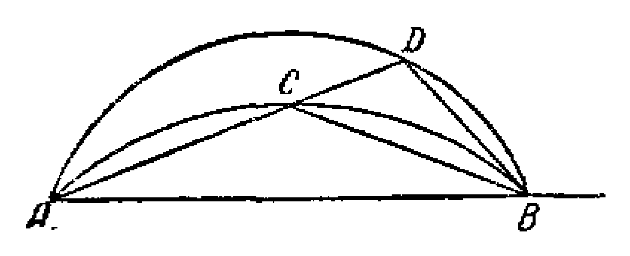
---

*) Обратная теорема, состоящая в том, что указываемый Евклидом признак является достаточным для возможности вписания четырёхугольника в круг, принадлежит Птоломею. В элементарную геометрию эта теорема внесена Л. Бертраном (1778).

Действительно, если возможно, то пусть на той же прямой AB с той же стороны будут построены два подобных и неравных сегмента кругов (черт. 23).

Продолжим ACD и соединим CB и DB.

Поскольку теперь сегмент ACB подобен сегменту ADB, подобные же сегменты кругов суть вмещающие равные



Черт. 23.

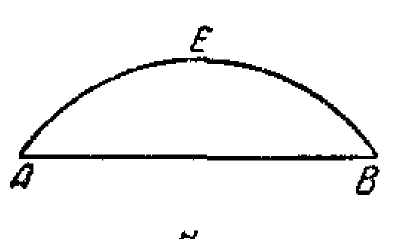
углы (определение 11), то значит, угол ACB равен углу ADB, т. е. внешний внутреннему, что невозможно (предложение 16 книги I).

Значит, на той же прямой с той же стороны нельзя построить два подобных и неравных сегмента кругов, что и требовалось доказать (23).

Предложение 24

На равных прямых подобные сегменты кругов равны между собой.

Пусть на равных прямых AB, CD будут подобные сегменты кругов AEB, CID; я утверждаю, что сегмент AEB равен сегменту CID (черт. 24).



Черт. 24.

Действительно, если совмещать сегмент AEB с CID и поместить точку A в C, а прямую AB на CD, то и точка B совместится с D вследствие того, что AB равна CD.

Но при совмещении же AB с CD и сегмент AEB совместится с CID. Действительно, если прямая AB совместится с CD, сегмент же AEB не совместится с CID, то он попадёт или внутрь его или наружу, или сместится

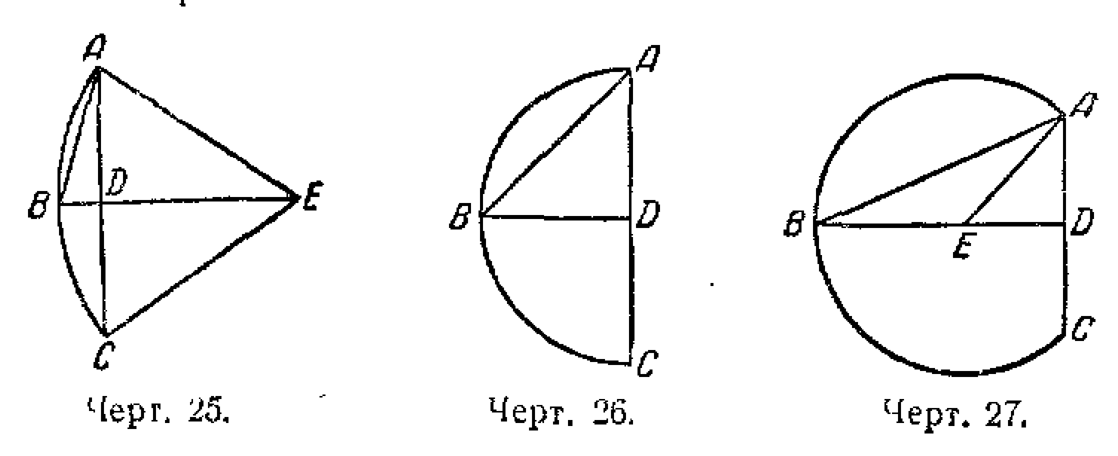
вбок *), как CHD, и круг пересечёт круг более чем в двух точках, что невозможно (предложение 10). Значит, при совмещении прямой AB с CD и сегмент AEB не будет не совмещаться с CID; значит, он совместится и будет ему равен (аксиома 7 книги I).

Итак, на равных прямых подобные сегменты кругов равны между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 25

К данному сегменту круга пристроить круг, сегментом которого он является.

Пусть данный сегмент круга будет ABC (черт. 25); вот требуется к сегменту ABC пристроить круг, сегментом которого он является.



Черт. 25. Черт. 26. Черт. 27.

Рассечём AC пополам в D, проведём из точки D под прямыми углами к AC прямую DB и соединим AB; значит, угол ABD или больше угла BAD или равен, или меньше.

Пусть он сперва будет больше; построим на прямой BA при её точке A угол BAE, равный ABD (предложение 23 книги I), продолжим DB до E и соединим EC. Поскольку теперь угол ABE равен BAE, то значит, и прямая EB равна EA (предложение 6 книги I). И поскольку AD равна DC и DE общая, то вот две <стороны> AD

*) У Евклида просто παραλλάξει — сместится, уклонится (отсюда астрономический термин «параллакс»).

и DE равны двум CD и DE каждая каждой; и угол ADE равен CDE, ибо каждый из них прямой; значит, основание AE равно основанию CE (предложение 4 книги I). Но AE, как доказано, равна BE; и значит, BE равна CE; значит, три прямые AE, EB и EC равны между собой; значит, круг, описанный из центра E раствором, равным одной из прямых AE, EB, EC, пройдёт и через остальные точки и будет пристроенным (предложение 9). Значит, к данному сегменту круга пристроен круг. И ясно, что сегмент ABC меньше полукруга, так как центр E оказался вне его.

Подобным же образом, если угол ABD равен BAD, прямая AD сделается равной каждой из BD, DC, три прямые DA, DB, DC будут равны между собой (предложение 6 книги I) и D будет центр пристроенного круга и вот ясно, что ABC будет полукругом (черт. 26).

Если же угол ABD меньше BAD и на прямой BA при её точке A построим угол, равный углу ABD (предложение 23 книги I) (черт. 27), то центр попадёт внутрь сегмента ABC на DB и вот ясно, что сегмент ABC будет больше полукруга.

Значит, к данному сегменту круга пристроен круг, что и требовалось сделать.

Предложение 26

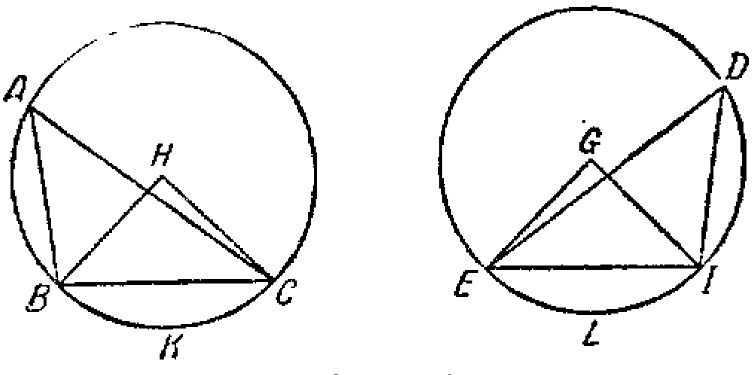
В равных кругах равные углы опираются на равные обводы, стоят ли они при центре или же при обводах.

Пусть равные круги будут ABC, DEI и пусть в них BHC, EGI будут равные углы при центрах, а BAC, EDI при обводах; я утверждаю, что обвод BKC равен обводу ELI (черт. 28).

Действительно, соединим BC, EI.

И поскольку круги ABC, DEI равны, то равны ⟨прямые, исходящие⟩ «из центров»; вот две ⟨прямые⟩ BH, HC равны двум EG, GI; и угол H равен углу при G; значит, основание BC равно основанию EI (предложение 4 книги I). И поскольку угол при A равен углу при D, то

значит, сегмент *BAC* подобен сегменту *EDI* (определение 11); и они на равных прямых *BC* и *EI*; на равных же прямых подобные сегменты кругов равны между собой (предложение 24); значит, сегмент *BAC* равен *EDI*. Но и весь



Черт. 28.

круг *ABC* равен всему кругу *DEI*, значит, остающийся обвод *BKC* равен обводу *ELI*.

Значит, в равных кругах равные углы опираются на равные обводы, будут ли они находиться при центре или же при обводах, что и требовалось доказать.

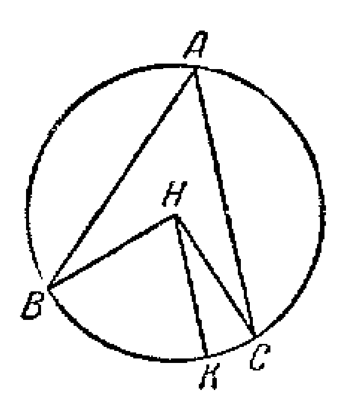
Предложение 27

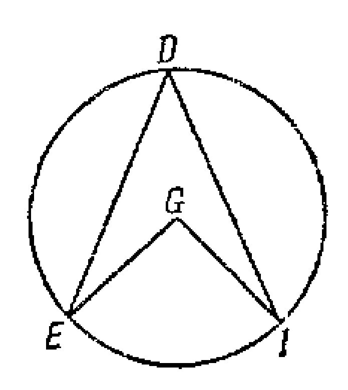
В равных кругах углы, опирающиеся на равные обводы, равны между собой, стоят ли они при центрах или же при обводах.

Пусть в равных кругах *ABC*, *DEI* будут опираться на равные обводы *BC*, *EI* при центрах *H*, *G* углы *BHC* и *EGI*, при обводах же углы *BAC*, *EDI*; я утверждаю, что угол *BHC* равен *EGI*, угол же *BAC* равен *EDI* (черт. 29).

Действительно, если угол *BHC* не равен углу *EGI*, то один из них больше. Пусть будет больше *BHC*, и построим на прямой *BH* при её точке *H* угол *BHK*, равный *EGI* (предложение 23 книги I). Равные же углы опираются на равные обводы, если они будут при центрах (предложение 26); значит, обвод *BK* равен обводу *EI*. Но *EI* равен *BC*; и значит, *BK* равен *BC*, т. е. меньший боль-

шему, что невозможно. Значит, не будет угол BHC не равен EGI; значит, равен. И угол при A будет половиной угла BHC, угол же при D — половиной EGI





Черт. 29.

(предложение 20); значит, и угол при A равен углу при D.

Значит, в равных кругах углы, опирающиеся на равные обводы, равны между собой, стоят ли они при центрах или при обводах, что и требовалось доказать (24).

Предложение 28

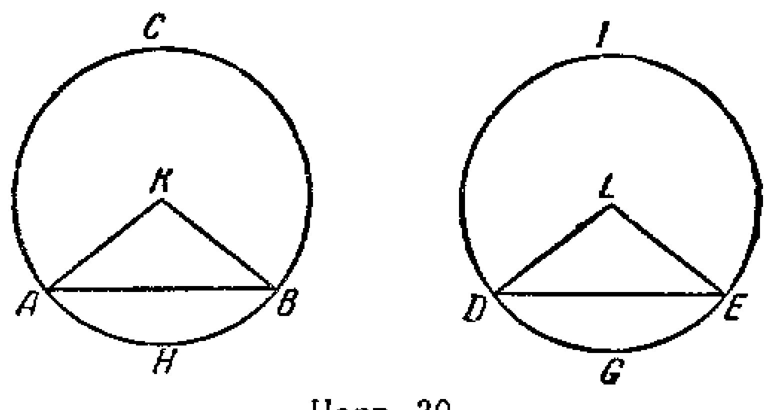
В равных кругах равные прямые отделяют равные обводы, больший равный большему, меньший же меньшему.

Пусть равные круги будут ABC, DEI и в этих кругах пусть будут равные прямые AB, DE, отделяющие обводы ACB, DIE большие, и AHB, DGE меньшие; я утверждаю, что больший обвод ACB равен большему обводу DIE, меньший же AHB равен DGE (черт. 30).

Действительно, возьмём центры кругов K, L и соединим AK, KB, DL, LE.

И поскольку круги равны, то равны и ⟨прямые, проведённые⟩ из центров (определение 1); вот две ⟨прямые⟩ AK, KB равны двум DL, LE; и основание AB равно основанию DE; значит, угол AKB равен углу DLE (предложение 8 книги I). Равные же углы опираются на равные обводы, если они стоят при центрах (предложение 26);

значит, обвод AHB равен DGE. Но и целый круг ABC равен целому кругу DEI; значит, и остающийся обвод ACB равен остающемуся обводу DIE.



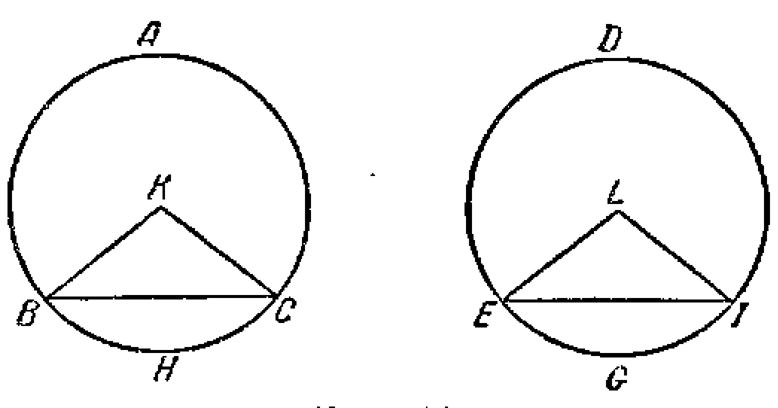
Черт. 30.

Значит, в равных кругах равные прямые отделяют равные обводы, больший равный большему, а меньший меньшему, что и требовалось доказать.

Предложение 29

В равных кругах равные обводы стягивают равные прямые *).

Пусть равные круги будут ABC, DEI и в них выделены



Черт. 31.

равные обводы BHC, EGI (черт. 31) и соединены BC, EI; я утверждаю, что BC равна EI.

---

*) В тексте τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. Теорема обратная 28-й, но формулирована очень близко к 28-й; мы употребили бы страдательный оборот «стягиваются».

Действительно, возьмём центры кругов и пусть они будут *K*, *L*; соединим *BK*, *KC*, *EL*, *LI*.

И поскольку обвод *BHC* равен обводу *EGI*, то и угол *BKC* равен *ELI* (предложение 27). И поскольку круги *ABC*, *DEI* равны, то будут равны и «прямые из центров» (определение 1); вот две ⟨стороны⟩ *BK*, *KC* равны двум *EL*, *LI* и заключают равные углы; значит, основание *BC* равно основанию *EI* (предложение 4 книги I).

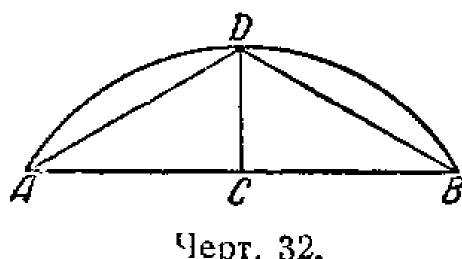
Значит, в равных кругах равные обводы стягивают равные прямые, что и требовалось доказать (25).

Предложение 30

Рассечь данный обвод пополам.

Пусть данный обвод будет *ADB*; вот должно обвод *ADB* рассечь пополам (черт. 32).

Соединим *AB* и рассечём в *C* пополам (предложение 10 книги I); из точки *C* под прямыми углами к прямой *AB* проведём *CD* и соединим *AD* и *DB*.



Черт. 32.

И поскольку *AC* равна *CB*, *CD* же общая, то вот две ⟨прямые⟩ *AC*, *CD* равны двум *BC*, *CD* и угол *ACD* равен углу *BCD*, ибо оба прямые; значит, основание *AD* равно основанию *DB* (предложение 4 книги I).

Равные же прямые отделяют равные обводы, больший равный большему и меньший меньшему (предложение 28); и каждый из обводов *AD*, *DB* меньше полукруга; значит, обвод *AD* равен обводу *DB*.

Значит, данный обвод рассечён пополам в точке *D*, что и требовалось сделать.

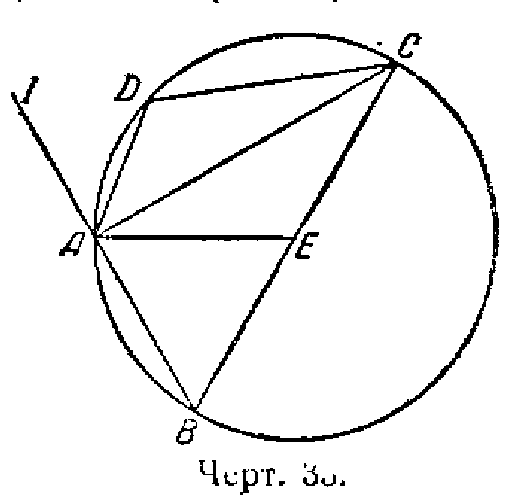
Предложение 31

В круге угол, ⟨заключённый⟩ в полукруге, — прямой, в большем сегменте — меньше прямого, в меньшем же — больше прямого; и кроме того, угол большего сегмента больше прямого, меньшего же — меньше.

Пусть круг будет $ABCD$, диаметр же его — BC, а центр E (черт. 33); соединим AB, AC, AD, DC; я утверждаю, что в полукруге BAC угол BAC прямой; в большем же чем полукруг сегменте ABC угол ABC меньше прямого, в меньшем же чем полукруг сегменте ADC угол ADC больше прямого.

Соединим AE и продолжим BA до I.

И поскольку BE равно EA, то и угол ABE равен BAE (предложение 5 книги I). Далее, поскольку CE равна EA, то и угол ACE равен CAE; значит, весь угол BAC равен двум ABC, ACB. Но и угол IAC ⟨как⟩ внешний угол треугольника ABC равен двум углам ABC и ACB (предложение 32 книги I); значит, и угол BAC равен IAC; значит, каждый ⟨из них⟩ прямой (определение 10 книги I); значит, в полукруге BAC угол BAC прямой.



Черт. 33.

И поскольку в треугольнике ABC два угла ABC, BAC ⟨вместе⟩ меньше двух прямых (предложение 17 книги I), угол же BAC прямой, то значит, угол ABC меньше прямого; и он ⟨заключён⟩ в сегменте ABC, большем полукруга.

И поскольку $ABCD$ есть четырёхсторонник в круге, у четырёхсторонников же в кругах противоположные углы ⟨вместе⟩ равны двум прямым [и значит, углы ABC, ADC равны двум прямым (предложение 22)], и угол ABC меньше прямого; значит, остающийся угол ADC больше прямого; и он ⟨заключён⟩ в сегменте ADC, меньшем полукруга.

Я утверждаю, что и угол большего сегмента, заключённый между обводом ABC и прямой AC, больше прямого, угол же меньшего сегмента, заключённый между обводом $AD[C]$ и прямой AC, меньше прямого. И это само собой очевидно. Действительно, поскольку угол между прямыми BA, AC прямой, то значит, угол, заключённый между дугой ABC и прямой AC, больше прямого. Далее,

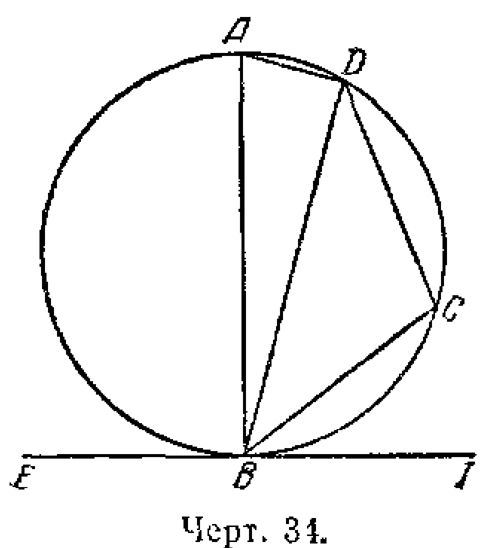
поскольку угол между прямыми AC, AI прямой, то значит, угол, заключённый между прямой CA и обводом $AD[C]$, меньше прямого. Значит, в круге угол, ⟨заключённый⟩ в полуокружности, прямой, в большем сегменте — меньше прямого, в меньшем же [сегменте] — больше прямого и, кроме того, угол большего сегмента больше прямого, угол же меньшего сегмента меньше прямого, что и требовалось доказать (26).

[Следствие

Вот из этого ясно, что когда один угол треугольника равен двум остальным, то он будет прямым вследствие того, что и внешний для него угол будет равен тем же самым двум углам; когда же смежные углы равны, то они прямые.]

Предложение 32

Если некоторая прямая касается круга и от точки касания внутрь круга проведена некоторая секущая круг прямая, то углы, которые эта прямая образует с касательной, будут равны углам в накрестлежащих сегментах круга.



Черт. 34.

Пусть некоторая прямая EI касается круга $ABCD$ (черт. 34) в точке B и пусть от точки B внутрь круга $ABCD$ проведена некоторая секущая его прямая BD. Я утверждаю, что углы, которые BD образует с касательной EI, будут равны углам в накрестлежащих сегментах круга, то-есть что угол IBD равен углу в сегменте BAD, угол же EBD равен углу в сегменте DCB.

Действительно, проведём из B под прямыми углами к EI прямую BA, на обводе BD возьмём какую-либо точку C и соединим AD, DC, CB. И поскольку некоторая прямая EI касается круга $ABCD$ в B, и от точки касания под

прямыми углами к касательной проведена *BA*, то значит, центр круга *ABCD* будет находиться на *BA* (предложение 19). Значит, *BA* есть диаметр круга *ABCD*; значит, угол *ADB*, <как> находящийся в полукруге, будет прямым (предложение 31). Значит, остальные углы *BAD*, *ABD* вместе равны одному прямому (предложение 32 книги I). Но и угол *ABI* прямой; значит, угол *ABI* равен *BAD*, *ABD* <вместе>. Отнимем общий угол *ABD*; значит, остающийся угол *DBI* равен <находящемуся> в накрестлежащем сегменте круга углу *BAD*. И поскольку *ABCD* четырёхсторонник в круге, то противоположные его углы <вместе> равны двум прямым (предложение 22).

Но и углы *DBI*, *DBE* <вместе> равны двум прямым (предложение 13 книги I); значит, *DBI*, *DBE* равны *BAD*, *BCD*, из которых *BAD* равен, как доказано, *DBI*; значит, остающийся угол *DBE* равен <находящемуся> в накрестлежащем сегменте *DCB* углу *DCB*.

Значит, если некоторая прямая касается круга и от точки касания внутрь круга проведена какая-нибудь секущая круг прямая, то углы, которые эта прямая образует с касательной, будут равны углам в накрестлежащих сегментах круга, что и требовалось доказать (27).

Предложение 33

На данной прямой описать сегмент круга, вмещающий угол, равный данному прямолинейному углу.

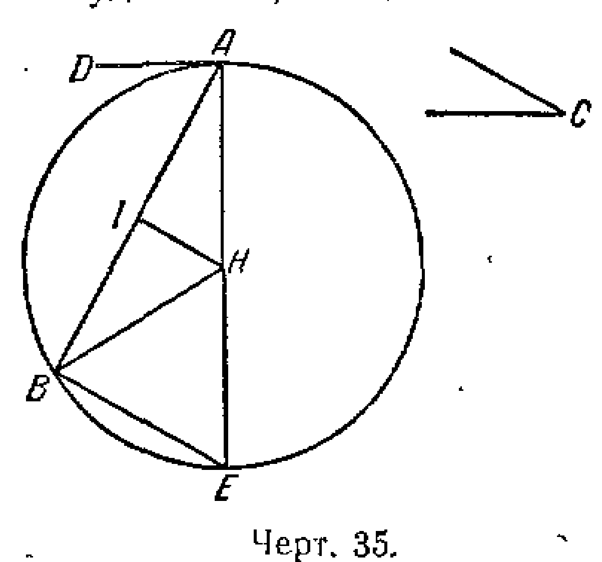
Пусть данная прямая будет *AB*, данный же прямолинейный угол тот, который при *C* (черт. 35); требуется вот на данной прямой *AB* построить сегмент круга, заключающий угол, равный углу, который при *C*.

Вот [угол] при *C* или острый, или прямой, или тупой; пусть он сперва будет острый; и, как на первом чертеже *), построим на прямой *AB* и при точке *A* угол *BAD*, равный углу при *C* (предложение 23 книги *I*); значит, и угол *BAD* будет острым. Проведём к *DA* под прямыми углами *AE*,

*) Т. е. на черт. 35.

разделим AB пополам в I, проведём из точки I к AB под прямыми углами IH и соединим HB.

И поскольку AI равна IB, IH же общая, то вот две ⟨прямые⟩ AI, IH равны двум BI, IH и угол AIH равен [углу] BIH; значит, основание AH равно основанию BH (предложение 4 книги I). Значит, круг, описанный из центра H раствором HA, пройдёт и через B. Опишем его, и пусть он будет ABE; соединим EB. Поскольку теперь в конце диаметра AE прямая AD будет под прямыми углами к AE, то значит, AD касается круга ABE (предложение 16, следствие); поскольку теперь круга ABE касается некоторая прямая AD и из точки касания A во внутрь круга ABE проведена некоторая прямая AB, то значит, угол DAB равен ⟨находящемуся⟩ в накрестлежащем сегменте углу AEB (предложение 32). Но угол DAB равен углу при C; и значит, угол при C равен углу AEB.



Черт. 35.

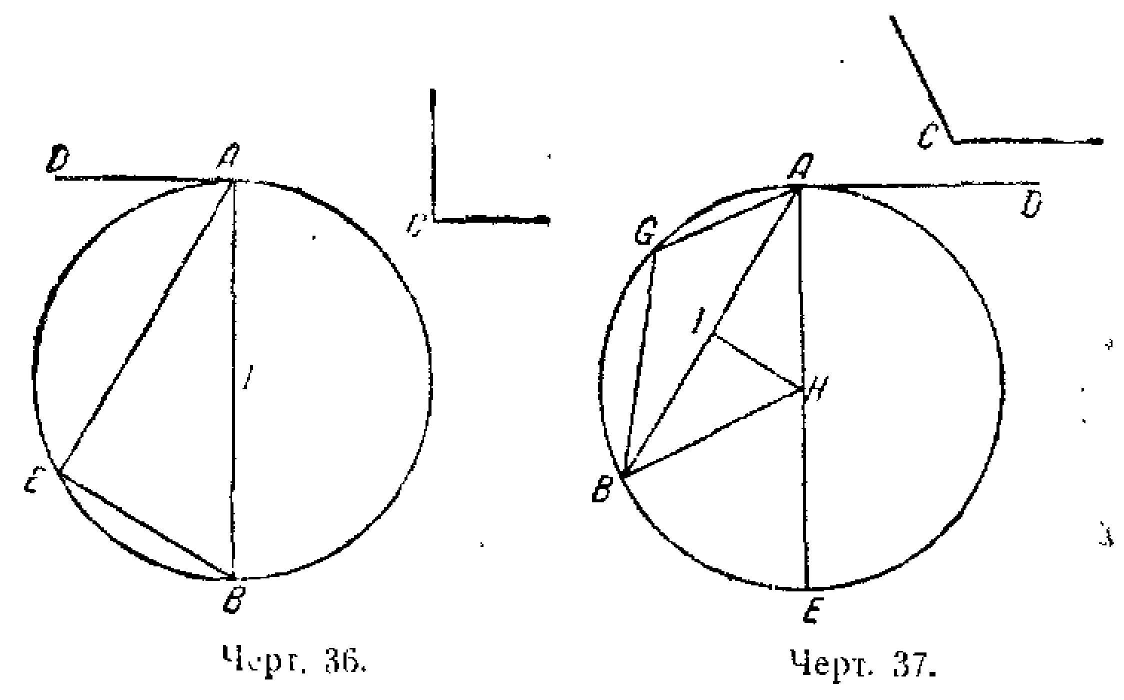
Значит, на данной прямой AB описан сегмент круга AEB, вмещающий угол AEB, равный данному углу при C.

Но вот пусть угол C будет прямым (черт. 36); и пусть требуется снова на AB описать сегмент круга, вмещающий угол, равный прямому [углу] при C. [Снова] построим угол BAD, равный прямому углу при C, как это имеется на втором чертеже *), рассечём AB в I пополам и из центра I раствором каким-нибудь из IA, IB опишем круг ABE. Значит, прямая AD касается круга ABE вследствие того, что угол при A прямой (предложение 16, следствие). И угол BAD равен углу в сегменте AEB, ибо и он прямой как находящийся в полукруге (предложение 31). Но и угол BAD равен углу при C. И значит, угол в AEB равен углу при C.

*) Т. е. на черт. 36.

Значит, снова на *AB* описан сегмент круга, вмещающий угол, равный тому, который при *C*.

Но вот пусть угол при *C* будет тупой (черт. 37); и построим на прямой *AB* при точке *A* равный ему угол *BAD*, как имеется на третьем чертеже *), под прямыми углами к *AD* проведём *AE*, снова рассечём *AB* пополам в *I*, под прямыми углами к *AB* проведём *IH* и соединим *HB*.



Черт. 36. Черт. 37.

И поскольку снова *AI* равна *IB* и *IH* общая, то вот две ⟨прямые⟩ *AI*, *IH* равны двум *BI*, *IH*; и угол *AIH* равен углу *BIH*; значит, основание *AH* равно основанию *BH* (предложение 4 книги I); значит, круг, описанный из центра *H* раствором *HA*, пройдёт также через *B*.

Пусть он пройдёт как *AEB*. И поскольку к диаметру *AE* в конце прямая *AD* будет под прямыми углами, то значит, *AD* касается круга *AEB* (предложение 16, следствие). И от точки касания в *A* проведена *AB*; значит, угол *BAD* равен углу, построенному в накрестлежащем сегменте (предложение 32) круга *AGB*. Но угол *BAD* равен углу при *C*. И значит, угол в сегменте *AGB* равен тому, который при *C*.

---

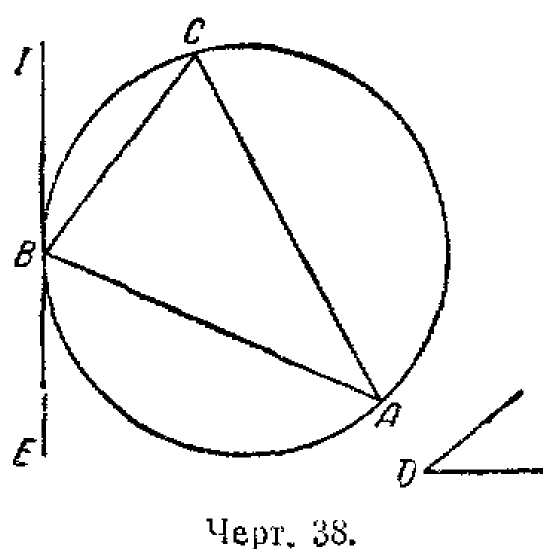
*) Т. е. на черт 37.

Значит, на данной прямой AB описан сегмент круга AGB, вмещающий угол, равный тому, который при C, что и требовалось сделать.

Предложение 34

От данного круга отнять сегмент, вмещающий угол, равный данному прямолинейному углу.

Пусть данный круг будет ABC, а данный прямолинейный угол тот, который при D; требуется вот от круга ABC отнять сегмент, вмещающий угол, равный данному прямолинейному углу, который при D (черт. 38).



Черт. 38.

Проведём к ABC касательную EI в точке B и построим на прямой IB при её точке B угол IBC, равный углу, который при D (предложение 23 книги I).

Поскольку теперь круга ABC касается некоторая прямая EI и от касания в B проведена BC, то значит, угол IBC равен углу BAC, построенному в накрестлежащем сегменте (предложение 32). Но угол IBC равен тому, который при D; и значит, в сегменте BAC угол равен тому [углу], который при D.

Значит, от данного круга ABC отнят сегмент BAC, вмещающий угол, равный данному прямолинейному углу, который при D, что и требовалось сделать.

Предложение 35

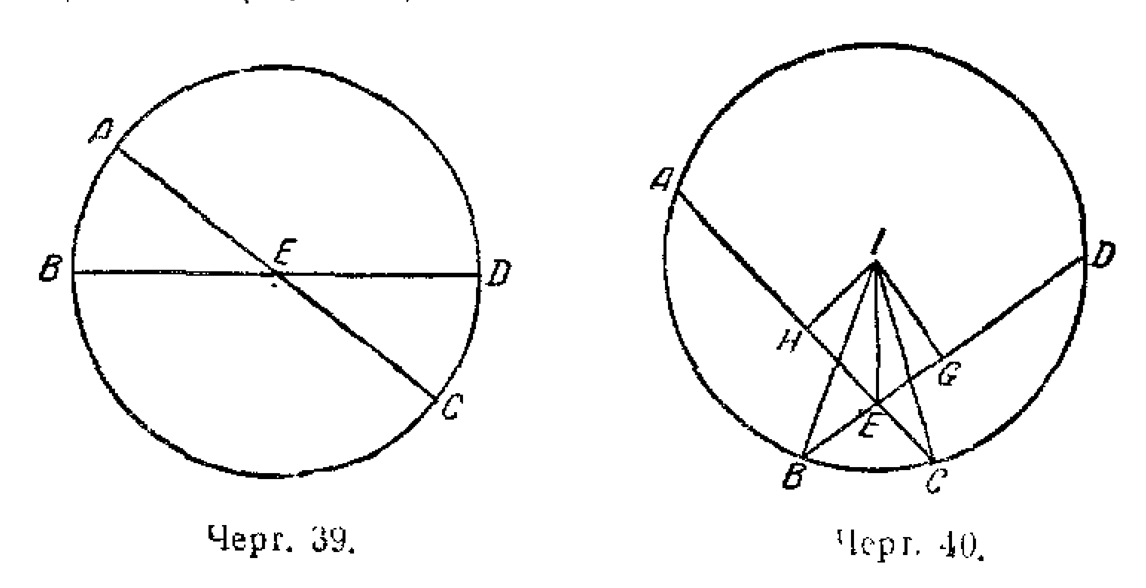
Если в круге две прямые пересекают друг друга, то прямоугольник, заключённый между отрезками одной, равен прямоугольнику, заключённому между отрезками другой.

Пусть в круге $ABCD$ две прямые AC и BD пересекают друг друга в точке E; я утверждаю, что прямоугольник,

заключённый между AE, EC, равен прямоугольнику, заключённому между DE, EB (черт. 39).

Если теперь AC, BD проходят через центр так, что E есть центр круга $ABCD$, то очевидно, что при равенстве AE, EC, DE, EB и прямоугольник, заключённый между AE, EC, равен прямоугольнику, заключённому между DE, EB.

Так вот, пусть AC, DB не проходят через центр; возьмём центр круга $ABCD$ и пусть он будет I и из I к прямым AC, DB проведём перпендикуляры IH, IG и соединим IB, IC, IE (черт. 40).



Черт. 39. Черт. 40.

И поскольку некоторая прямая HI, ⟨проходящая⟩ через центр, сечёт под прямыми углами некоторую прямую AC, не проходящую через центр, то она сечёт её пополам (предложение 3); значит, AH равна HC. Поскольку теперь прямая AC рассечена в H на равные, а в E на неравные части, то значит, прямоугольник между AE, EC вместе с квадратом на HE равен квадрату на HC (предложение 5 книги II).

Прибавим [общий] квадрат на HI; значит, прямоугольник на AE, EC вместе с квадратами на HE, HI равен квадратам на CH, HI. Но вместе взятым квадратам на EH, HI равен квадрат на IE, квадратам же на CH, HI равен квадрат на IC (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между AE и EC вместе с квадратом на IE равен квадрату на IC. IC же равна IB; значит, прямоугольник между AE, EC вместе с квадратом на EI равен квадрату на IB.

Вследствие того же вот и прямоугольник между DE, EB вместе с квадратом на IE равен квадрату на IB. Доказано же, что и прямоугольник между AE, EC вместе с квадратом на IE равен квадрату на IB; значит, прямоугольник между AE, EC вместе с квадратом на IE равен прямоугольнику между DE, EB вместе с квадратом на IE. Отнимем общий квадрат на IE; значит, остающийся прямоугольник, заключённый между AE, EC, равен прямоугольнику, заключённому между DE, EB.

Значит, если в круге две прямые пересекают друг друга, то прямоугольник, заключённый между отрезками одной, равен прямоугольнику, заключённому между отрезками другой, что и требовалось доказать (28).

Предложение 36

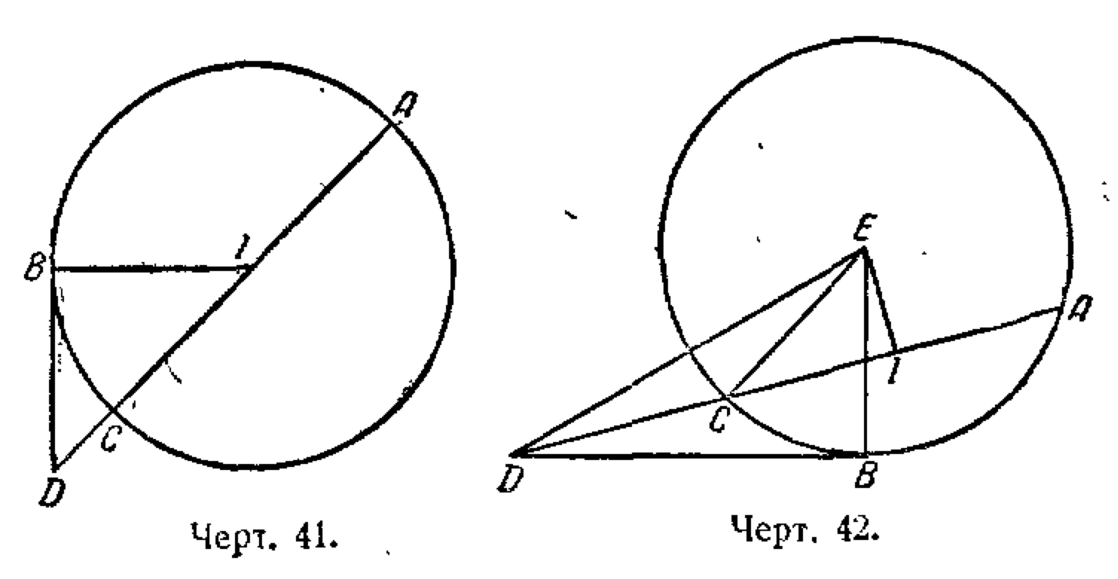
Если вне круга взята некоторая точка, и из неё на круг падают две прямые, и одна из них пересекает круг, другая же касается, то прямоугольник, ⟨заключённый⟩ между всей секущей и внешним отрезком, содержащимся между этой точкой и выпуклой частью обвода, будет равен квадрату на касательной.

Пусть вне круга ABC взята некоторая точка D, пусть от D на круг ABC падают две прямые DC [A], DB; и пусть DCA пересекает круг ABC, DB же его касается; я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между AD и DC, равен квадрату на DB.

Значит (черт. 41), прямая [D] CA или проходит через центр или нет. Пусть она сперва проходит, и пусть I центр круга ABC; соединим IB; значит, угол IBD прямой (предложение 18). И поскольку прямая AC рассечена пополам в I и к ней прибавляется CD, то значит, прямоугольник между AD и DC вместе с квадратом на IC равен квадрату на ID. IC же равен IB; значит, прямоугольник между AD, DC вместе с квадратом на IB равен квадрату на ID. Квадрату же на ID равны квадраты на IB и BD ⟨вместе⟩ (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между AD, DC вместе с квадратом на IB равен квадратам на IB, BD. Отнимем общий квадрат на IB; значит,

остающийся прямоугольник между *AD* и *DC* равен квадрату на касательной *DB*.

Но вот пусть *DCA* (черт. 42) не ⟨проходит⟩ через центр круга *ABC*; возьмём центр *E* и из *E* проведём на *AC* перпендикуляр *EI* и соединим *EB*, *EC*, *ED*; значит, угол *EBD* прямой (предложение 18). И поскольку некоторая ⟨проходящая⟩ через центр прямая *EI* некоторую не ⟨проходящую⟩ через центр прямую *AC* сечёт под прямыми углами,



Черт. 41. Черт. 42.

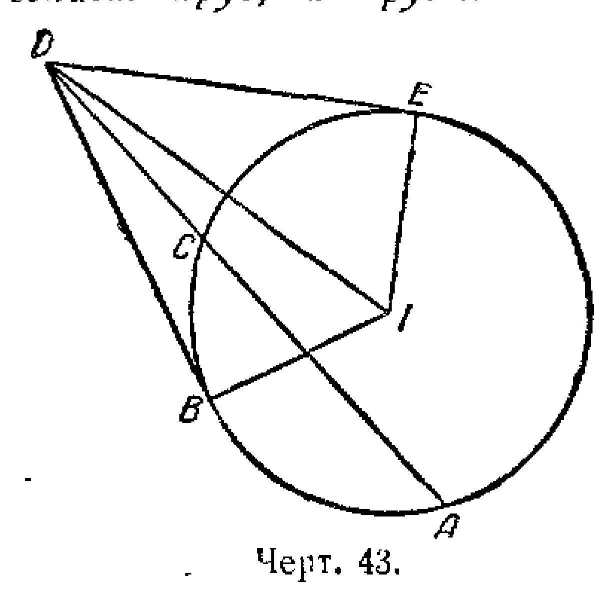
то она сечёт её и пополам (предложение 3); значит, *AI* равна *IC*. И поскольку прямая *AC* рассечена пополам в точке *I*, и к ней прибавляется *CD*, то значит, прямоугольник между *AD*, *DC* вместе с квадратом на *IC* равен квадрату на *ID* (предложение 6 книги II). Прибавим общий квадрат на *IE*; значит, прямоугольник между *AD*, *DC* вместе с квадратами на *CI*, *IE* равен квадратам на *ID*, *IE*. Квадратам же на *CI*, *IE* равен квадрат на *EC*, ибо (предложение 47 книги I) [угол] *EIC* прямой; квадратам же на *DI*, *IE* равен квадрат на *ED*; значит, прямоугольник между *AD* и *DC* вместе с квадратом на *EC* равен квадрату на *ED*. *EC* же равна *EB*; значит, прямоугольник между *AD*, *DC* вместе с квадратом на *EB* равен квадрату на *ED*. Квадрату же на *ED* равны ⟨вместе взятые⟩ квадраты на *EB*, *BD* (предложение 47 книги I), ибо угол *EBD* прямой; значит, прямоугольник между *AD*, *DC* вместе с квадратом на *EB* равен квадратам на *EB*, *BD*. Отнимем общий квадрат

на EB; значит, остающийся прямоугольник между AD, DC равен квадрату на DB.

Значит, если вне круга взята некоторая точка и из неё на круг падают две прямые, и одна из них пересекает круг, другая же касается, то прямоугольник, ⟨заключённый⟩ между всей секущей и внешним отрезком, содержащимся между этой точкой и выпуклой частью обвода, будет равен квадрату на касательной, что и требовалось доказать (29, 30, 31, 32).

Предложение 37

Если вне круга взята некоторая точка и из этой точки на круг падают две прямые, и одна из них пересекает круг, а другая лишь падает, прямоугольник же между всей секущей и внешним отрезком, содержащимся между этой точкой и выпуклой частью обвода, равен квадрату на падающей, то падающая касается круга.



Черт. 43.

Пусть вне круга ABC взята некоторая точка D и из D на круг ABC падают две прямые DCA, DB и DCA пусть пересекает круг, DB же лишь падает, и пусть прямоугольник между AD, DC равен квадрату на DB. Я утверждаю, что прямая DB касается круга ABC (черт. 43).

Действительно, проведём DE, касающуюся круга ABC (предложение 17), возьмём центр круга ABC, и пусть он будет I; соединим IE, IB, ID. Значит, угол IED прямой (предложение 18).

И поскольку DE касается круга ABC, DCA же пересекает, то значит, прямоугольник между AD, DC равен квадрату на DE (предложение 36). Но и прямоугольник между AD, DC равен квадрату на DB; значит, квадрат на DE

равен квадрату на DB; значит, DE равна DB. Но и IE равна IB; вот две ⟨прямые⟩ DE, EI равны двум DB, BI; и основание у них общее ID; значит, угол DEI равен углу DBI (предложение 8 книги I).

Угол же DEI прямой; значит, и угол DBI прямой. И продолженная IB есть диаметр; прямая же, проведённая к диаметру круга в его конце под прямыми углами, касается круга (предложение 16, следствие); значит, DB касается круга ABC. Подобным же вот образом докажется и если центр оказался бы на AC.

Значит, если вне круга взята некоторая точка и из этой точки на круг падают две прямые, и одна из них пересекает круг, а другая лишь падает, прямоугольник же между всей секущей и внешним отрезком, содержащимся между данной точкой и выпуклой частью обвода, равен квадрату на падающей, то падающая касается круга, что и требовалось доказать.



КНИГА ЧЕТВЁРТАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Говорят, что прямолинейная фигура *вписывается в прямолинейную фигуру*, если каждый из углов вписываемой фигуры касается каждой стороны той, в которую она вписывается.

2. Подобным же образом говорят, что фигура *описывается около фигуры*, если каждая сторона описываемой касается каждого угла той, около которой она описывается.

3. Говорят, что прямолинейная фигура *вписывается в круг*, если каждый угол вписываемой касается обвода круга.

4. Говорят, что прямолинейная фигура *описывается около круга*, если каждая сторона описываемой касается обвода круга.

5. Подобным же образом говорят, что круг вписывается в фигуру, если обвод круга касается каждой стороны фигуры, в которую он вписывается.

6. Говорят, что круг описывается около фигуры, если обвод круга касается каждого угла фигуры, около которой он описывается.

7. Говорят, что прямая *вставляется* *) в круг, если концы её находятся на обводе круга.

Предложение 1

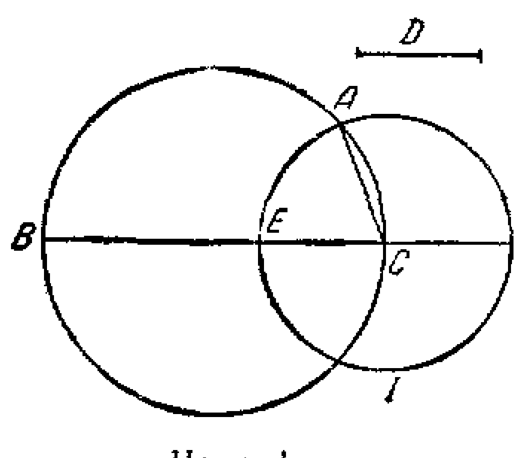
В данный круг вставить прямую, равную заданной, не большей диаметра круга.

---

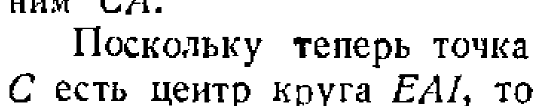
*) ἐναρμόζεσθαι — буквально «прилаживаться, приспособляться»

Пусть данный круг будет ABC, данная же прямая, не бо́льшая диаметра круга, пусть будет D. Вот требуется в круг ABC вставить прямую, равную прямой D (черт. 1).

Проведём в круге ABC диаметр BC. Если теперь BC равна D, то предложенное уже выполнено; действительно, в круг ABC вставлена равная D прямая BC. Если же BC больше D, то отложим равную D прямую CE и из центра C раствором CE опишем круг EAI и соединим CA.



Черт. 1.



Поскольку теперь точка C есть центр круга EAI, то CA равна CE. Но CE равна D; и значит, CA равна D. Значит, в данный круг ABC вставлена прямая CA, равная заданной прямой D, что и требовалось сделать (1).

Предложение 2

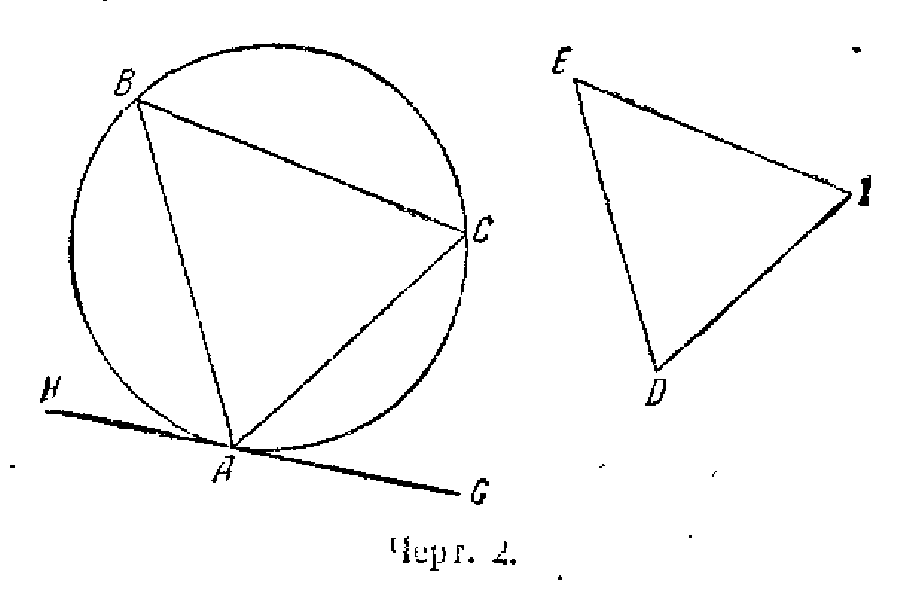
В данный круг вписать треугольник, равноугольный данному треугольнику.

Пусть данный круг будет ABC, данный же треугольник DEI (черт. 2); вот требуется вписать в круг ABC треугольник, равноугольный данному треугольнику DEI.

Проведём к кругу ABC касательную HG в точке A (предложение 17 книги III) и построим на прямой AG при точке её A угол GAC, равный углу DEI, на прямой же AH при точке её A угол HAB, равный [углу] DIE (предложение 23 книги I), и соединим BC.

Поскольку теперь круга ABC касается некоторая прямая AG и от касания в точке A внутрь круга проведена прямая AC, то значит, угол GAC равен углу ABC в накрестлежащем сегменте круга (предложение 32 книги III). Но угол GAC равен углу DEI; и значит, угол ABC равен DEI. Вследствие того же вот и угол ACB равен углу DIE; и значит, остающийся угол BAC равен остающемуся углу EDI

(предложение 32 книги I) [значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI и вписывается в круг ABC].



Черт. 2.

Значит, в данный круг вписывается треугольник, равноугольный данному треугольнику, что и требовалось сделать (2).

Предложение 3

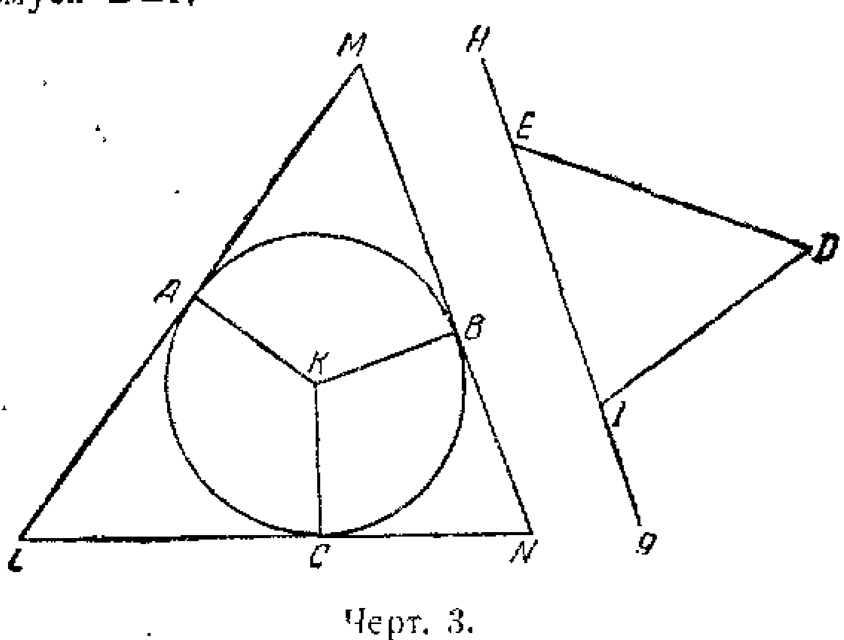
Около данного круга описать треугольник, равноугольный данному треугольнику.

Пусть данный круг будет ABC, данный же треугольник DEI; вот требуется около круга ABC описать треугольник, равноугольный данному (черт. 3) треугольнику DEI.

Продолжим EI в обе стороны к точкам H, G и возьмём центр K круга ABC, проведём как-нибудь прямую KB и построим на прямой KB при точке её K угол BKA, равный углу DEH (предложение 23 книги I), и угол BKC, равный DIG, и через точки A, B, C проведём к кругу ABC касательные LAM, MBN и NCL (следствие предложения 16 книги III).

И поскольку LM, MN и NL касаются круга ABC в точках A, B, C, прямые же, соединяющие центр K с точками A, B, C, суть KA, KB, KC, то значит, углы при точках A, B, C прямые (предложение 18 книги III). И поскольку в четырёхстороннике $AMBK$ четыре угла равны ⟨вместе⟩ четырём прямым, поскольку ведь $AMBK$

разделяется на два треугольника (предложение 32 книги I) и углы *KAM* и *KBM* прямые, то значит, остальные углы *AKB* и *AMB* равны <вместе> двум прямым. Но и *DEH* и *DEI* равны двум прямым (предложение 13 книги I); значит, углы *AKB*, *AMB* равны *DEH*, *DEI*, из которых *AKB* равен *DEH*; значит, остающийся угол *AMB* равен остающемуся *DEI*.



Черт. 3.

Подобным же вот образом докажется, что и угол *LNB* равен *DIE*; значит, остающийся угол *MLN* равен [остающемуся] *EDI*. Значит, треугольник *LMN* равноуголен треугольнику *DEI*; и описывается около круга *ABC*.

Значит, около данного круга описывается треугольник, равноугольный данному треугольнику, что и требовалось сделать (3).

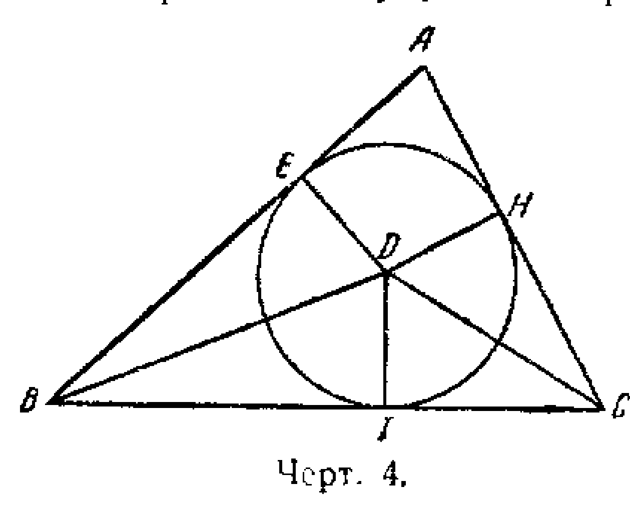
Предложение 4

В данный треугольник вписать круг.

Пусть данный треугольник будет *ABC*; вот требуется в треугольник *ABC* вписать круг (черт. 4).

Рассечём пополам углы *ABC* и *ACB* прямыми *BD* и *CD* (предложение 9 книги I), и пусть они встретятся друг с другом в точке *D* (постулат 5 книги I); из *D* проведём к прямым *AB*, *BC*, *CA* перпендикуляры *DE*, *DI*, *DH*.

И поскольку угол ABD равен CBD, прямой же угол BED равен прямому BID, то вот два треугольника EBD, IBD, имеющих два угла, равные двум углам, и одну сторону, равную одной стороне, стягивающую один из равных углов, а именно, общую их ⟨сторону⟩ BD; значит, и остальные стороны они будут иметь равными остальным (предложение 26 книги I); значит, DE равна DI. Вследствие того же вот и DH равна DI. Значит, три прямые DE, DI, DH равны между собой; значит, круг, описанный из центра D раствором одним из DE, DI, DH, пройдёт и через остальные точки и коснётся прямых AB, BC, CA вследствие того, что



Черт. 4.

углы при точках E, I, H прямые. Действительно, если бы он их пересекал, то прямая, проведённая под прямыми углами к диаметру круга в конце его, попадала бы внутрь круга; что, как доказано, невозможно (предложение 16 книги III); значит, круг, описанный из центра D раствором одним из DE, DI, DH, не пересечёт прямых AB, BC, CA; значит, он коснётся их и будет кругом, вписанным в треугольник ABC; пусть он будет вписан ⟨и пройдёт⟩ как IHE.

Значит, в данный треугольник ABC вписывается круг EIH, что и требовалось сделать (4).

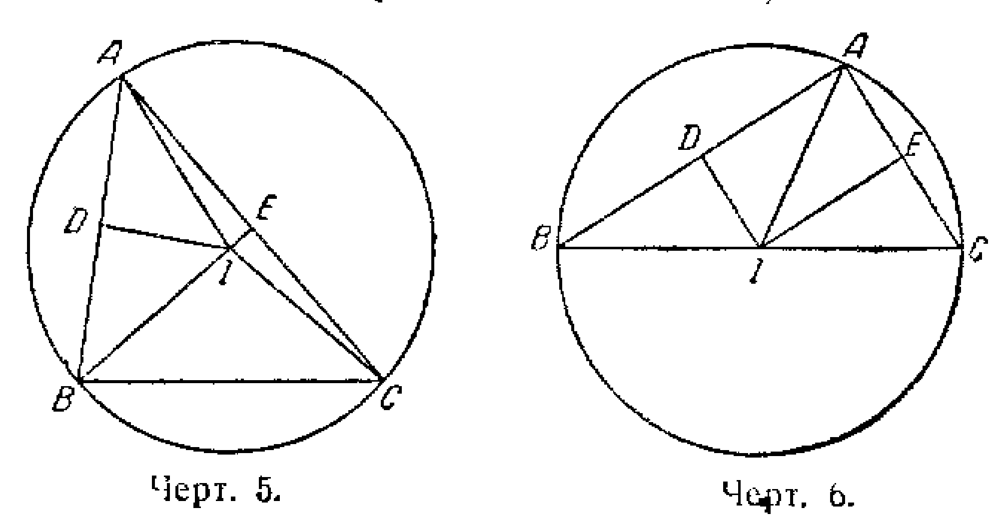
Предложение 5

Около данного треугольника описать круг.

Пусть данный треугольник будет ABC; требуется же около данного треугольника ABC описать круг.

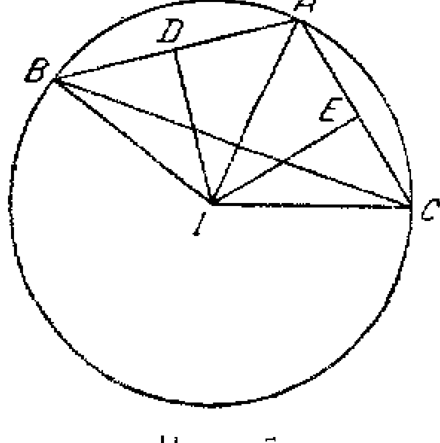
Рассечём прямые AB, AC пополам в точках D, E (предложение 10 книги I), и из точек D, E под прямыми углами к AB, AC проведём DI и EI; вот они встретятся или внутри треугольника ABC или на прямой BC или за BC (черт. 5, 6, 7).

Пусть сперва они встретятся внутри в I (черт. 5); соединим IB, IC, IA. И поскольку AD равна DB, DI же общая и под прямыми углами, то значит, основание AI равно основанию IB (предложение 4 книги I). Подобным же



Черт. 5. Черт. 6.

вот образом докажем, что и CI равна AI, так что и IB равна IC; значит, три прямые IA, IB, IC равны между собой. Значит, круг, описанный из центра I раствором одним из IA, IB, IC, пройдёт и через остальные точки и будет кругом, описанным около треугольника ABC. Пусть он будет описан ⟨и пройдёт⟩ как ABC.



Черт. 7.

Но вот пусть DI и EI встретятся на прямой BC в точке I, как имеет ⟨место⟩ на втором чертеже; соединим AI. Подобным же вот образом докажем, что точка I есть центр круга, описанного около треугольника ABC.

Но вот пусть DI и EI встретятся вне треугольника ABC опять в I, как имеет ⟨место⟩ на третьем чертеже; соединим AI, BI, CI. И поскольку опять AD равна DB, DI же общая и под прямыми углами, то значит (предложение 4 книги I), основание AI равно основанию BI. Подобным же вот образом докажем, что и CI равна AI; так что и BI равна IC; значит [опять],

круг, описанный из центра I раствором одним из IA, IB, IC, пройдёт и через остальные точки и будет описанным около треугольника ABC.

Значит, около данного треугольника описывается круг, что и требовалось сделать (5).

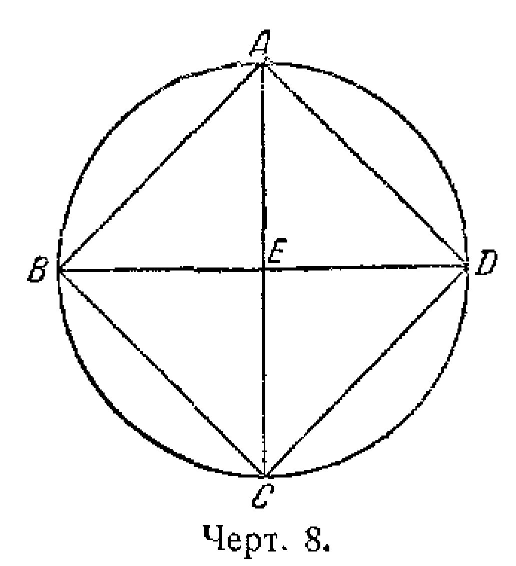
[Следствие]

И ясно, что когда центр круга попадает внутрь треугольника, то угол BAC, ⟨как⟩ оказавшийся в сегменте, большем полукруга, будет меньше прямого; когда же центр круга попадает на прямую BC, то угол BAC, ⟨как⟩ оказавшийся в полукруге, будет прямым; когда же центр круга попадает вне треугольника, то угол BAC, ⟨как⟩ оказавшийся в сегменте, меньшем полукруга, будет больше прямого (предложение 31 книги III). [Так что и когда данный угол окажется меньшим прямого, то DI, EI попадут внутрь треугольника, когда же прямым, то на BC, когда же бóльшим прямого, то вне BC, что и требовалось сделать.]

Предложение 6

В данный круг вписать квадрат.

Пусть данный круг будет $ABCD$; вот требуется в круг $ABCD$ вписать квадрат (черт. 8).



Черт. 8.

Проведём в круге $ABCD$ два диаметра AC, BD под прямыми углами друг к другу и соединим AB, BC, CD, DA.

И поскольку BE равна ED, ибо E центр, EA же общая и под прямыми углами, то значит, основание AB равно основанию AD (предложение 4 книги I). Вследствие того же вот и каждая из BC, CD равна каждой из AB, AD; значит, четырёхсторонник $ABCD$ равносторонний. Вот я утверждаю, что он и прямоугольный. Действительно, поскольку

прямая BD есть диаметр круга $ABCD$, то значит, BAD — полукруг; значит, угол BAD — прямой (предложение 31 книги III). Вследствие того же вот и каждый из углов ABC, BCD, CDA будет прямым; значит, четырёхсторонник $ABCD$ — прямоугольный. Доказано же, что он и равносторонний; значит, он квадрат (определение 22 книги I); и вписывается в круг $ABCD$.

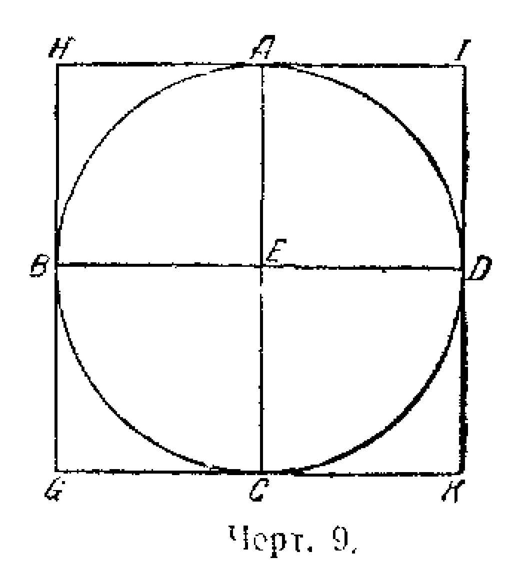
Значит, в данный круг вписывается квадрат $ABCD$, что и требовалось сделать.

Предложение 7

Около данного круга описать квадрат.

Пусть данный круг будет $ABCD$; вот требуется около круга $ABCD$ описать квадрат (черт. 9).

Проведём в круге $ABCD$ два диаметра AC и BD под прямыми углами друг к другу и через точки A, B, C, D проведём к кругу $ABCD$ касательные IH, HG, GK, KI (следствие предложения 16 книги III).



Черт. 9.

Поскольку теперь IH касается круга $ABCD$ и из центра E к точке касания в A проведена соединяющая прямая EA, то значит, углы при A прямые (предложение 18 книги III). Вследствие того же вот и углы при точках B, C, D прямые. И поскольку угол AEB прямой, прямой же и угол EBH, значит, HG параллельна AC (предложение 29 книги I). Вследствие того же вот и AC параллельна IK. Так что и HG параллельна IK (предложение 30 книги I). Подобным же вот образом докажем, что и каждая из HI, GK будет параллельна BED. Значит, ‹фигуры› HK, HC, AK, IB, BK суть параллелограммы; значит (предложение 34 книги I), HI равна GK, HG же равна IK. И поскольку AC равна BD, но и AC равна каждой из HG, IK, BD же равна

каждой из *HI* и *GK* (предложение 34 книги I) [и значит, каждая из *HG*, *IK* равна каждой из *HI*, *GK*]; значит, четырёхсторонник *IHGK* равносторонний. Вот я утверждаю, что и прямоугольный.

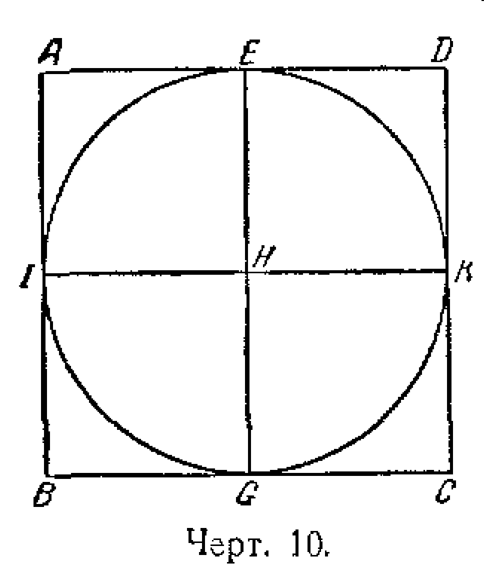
Действительно, поскольку *HBEA* параллелограмм и угол *AEB* прямой, то значит, и *AHB* прямой (предложение 34 книги I). Подобным же вот образом докажем, что и углы при *G*, *K*, *I* прямые. Значит, *IHGK* прямоугольный. Доказано же, что и равносторонний; значит, он квадрат (определение 22 книги I) и описывается около круга *ABCD*.

Значит, около данного круга описывается квадрат, что и требовалось сделать.

Предложение 8

В данный квадрат вписать круг.

Пусть данный квадрат будет *ABCD*; вот требуется в квадрат *ABCD* вписать круг (черт. 10).



Черт. 10.

Рассечём каждую из *AD* и *AB* пополам в точках *E* и *I*, и через *E* параллельно каждой из *AB*, *CD* проведём *EG* (предложения 31, 30 книги I), через же *I* параллельно каждой из *AD*, *BC* проведём *IK*; значит, каждая из ⟨фигур⟩ *AK*, *KB*, *AG*, *GD*, *AH*, *HC*, *BH*, *HD* будет параллелограммом, и противоположные их стороны, очевидно, равны (предложение 34 книги I). И поскольку *AD* равна *AB* и половина *AD* есть *AE*, половина же *AB* есть *AI*, то значит, *AE* равна *AI*, так что и противоположные ⟨стороны⟩ равны; значит, и *IH* равна *HE*. Подобным же вот образом докажем, что и каждая из *HG*, *HK* равна каждой из *IH*, *HE*; значит, четыре ⟨прямых⟩ *HE*, *HI*, *HG*, *HK* равны между собой. Значит, круг, описанный из центра *H* раствором

одним из *E*, *I*, *G*, *K**), пройдёт и через остальные точки и коснётся прямых *AB*, *BC*, *CD*, *DA* вследствие того, что углы при *E*, *I*, *G*, *K* прямые; действительно, если бы круг пересекал *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, то прямая, проведённая под прямыми углами к диаметру круга в его конце, попадала бы внутрь круга, что, как доказано, нелепо (предложение 16 книги III). Значит, круг с центром *H*, описанный раствором одним из *E*, *I*, *G*, *K*, не пересекает прямых *AB*, *BC*, *CD*, *DA*; значит, он их касается и будет вписанным в квадрат *ABCD*.

Значит, в данный квадрат вписывается круг, что и требовалось сделать.

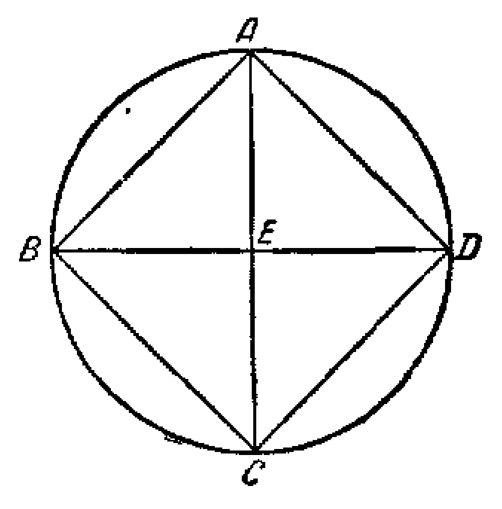
Предложение 9

Около данного квадрата описать круг.

Пусть данный квадрат будет *ABCD*; вот требуется около квадрата *ABCD* описать круг (черт. 11).

Действительно, пусть соединяющие *AC*, *BD* пересекают друг друга в *E*.

И поскольку *DA* равна *AB*, *AC* же общая, то вот две <прямые> *DA*, *AC* равны двум *BA*, *AC*; и основание *DC* равно основанию *BC*; значит, и угол *DAC* равен углу *BAC*; значит, угол *DAB* рассечён прямой *AC* пополам. Подобным же вот образом докажем, что и каждый из углов *ABC*, *BCD*, *CDA* рассечён прямыми *AC*, *DB* пополам. И поскольку угол *DAB* равен *ABC*, и половина угла *DAB* будет *EAB*, половина же *ABC* будет *EBA*, то значит, *EAB* равен *EBA*, так что и сторона *EA* равна *EB* (предложение 6 книги I). Подобным же вот образом докажем, что и каждая из [прямых] *EA*, *EB* равна каждой из *EC*, *ED*. Значит, четыре прямые *EA*,



Черт. 11.

*) Сокращённое обозначение вместо *HE*, *HI*, *HG*, *HK*.

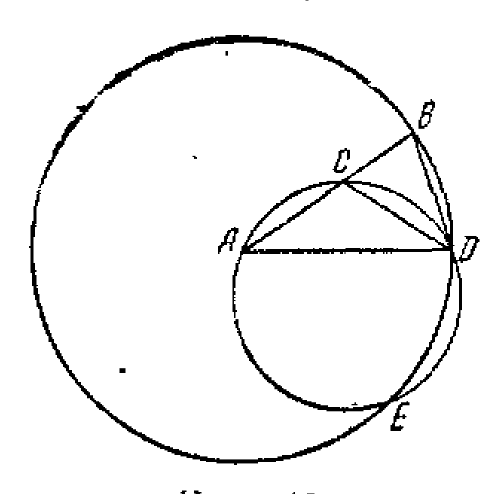
EB, *EC*, *ED* равны между собой. Значит, круг, описанный из центра *E* раствором одним из *EA*, *EB*, *EC*, *ED*, пройдёт и через остальные точки и будет описанным около квадрата *ABCD*. Пусть он описан <и пройдёт> как *ABCD*.

Значит, около данного квадрата описывается круг, что и требовалось сделать.

Предложение 10

Построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании вдвое бо́льшим остающегося.

Отложим некоторую прямую *AB* и рассечём её в точке *C* так, чтобы прямоугольник, заключённый между *AB* и *BC*, был равен квадрату на *CA* (предложение 11 книги II) (черт. 12); и из центра *A* раствором *AB* опишем круг *BDE* и вставим в круг *BDE* прямую *BD*, равную прямой *AC*, не большей диаметра круга *BDE* (предложение 1); и соединим *AD*, *DC*, и около треугольника *ACD* опишем круг *ACD* (предложение 5).



Черт. 12.

И поскольку прямоугольник между *AB*, *BC* равен квадрату на *AC*, *AC* же равна *BD*, то значит, прямоугольник между *AB*, *BC* равен квадрату на *BD*. И поскольку вне круга *ACD* взята некоторая точка *B*, и от этой точки *B* упали на круг *ACD* две прямые *BA*, *BD*, и из них одна пересекает, а другая только встречает <круг>, и прямоугольник между *AB*, *BC* равен квадрату на *BD*, то значит, <прямая> *BD* касается круга *ACD* (предложение 37 книги III). Поскольку теперь *BD* касается, из точки же касания в *D* проведена *DC*, то значит, угол *BDC* равен углу *DAC* в накрестлежащем сегменте круга (предложение 32 книги III). Поскольку теперь угол *BDC* равен *DAC*, прибавим общий угол *CDA*; значит, весь угол *BDA* равен

двум углам *CDA*, *DAC*. Но углам *CDA*, *DAC* равен внешний *BCD* (предложение 32 книги I); и значит, угол *BDA* равен *BCD*.

Но угол *BDA* равен *CBD*, поскольку и сторона *AD* равна *AB* (предложение 5 книги I), так что и угол *DBA* равен *BCD*. Значит, три угла *BDA*, *DBA*, *BCD* равны между собой. И поскольку угол *DBC* равен *BCD*, и сторона *BD* равна стороне *DC* (предложение 6 книги I). Но *BD* предполагается равной *CA*, и значит, *CA* равна *CD*; так что и угол *CDA* равен углу *DAC* (предложение 5 книги I); значит, *CDA*, *DAC* <вместе> в два раза больше *DAC*. Угол же *BCD* равен *CDA*, *DAC* и значит, *BCD* вдвое больше *CAD*. Угол же *BCD* равен каждому из *BDA*, *DBA*; и значит, каждый из *BDA*, *DBA* вдвое больше *DAB*.

Значит, построен равнобедренный треугольник *ABD*, имеющий каждый из углов при основании вдвое большим остающегося, что и требовалось сделать.

Предложение 11

В данный круг вписать равносторонний и равноугольный пятиугольник.

Пусть данный круг будет *ABCDE*; вот требуется вписать в круг *ABCDE* равносторонний и равноугольный пятиугольник (черт. 13).

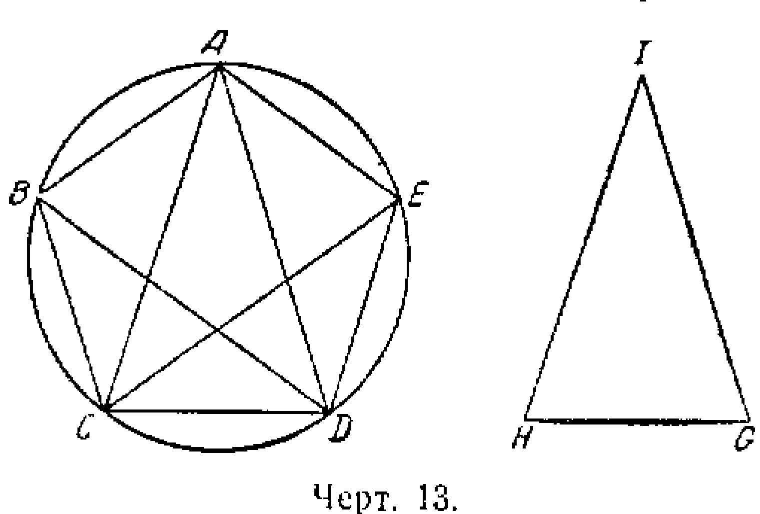
Возьмём *) равнобедренный треугольник *IHG*, имеющий каждый из углов при *H* и *G* вдвое большим угла при *I* (предложение 10), и впишем в круг *ABCDE* треугольник *ACD* равноугольный с треугольником *IHG* так, чтобы углу при *I* был равен *CAD*, а каждому из углов при *H* и *G* были бы равны каждый из *ACD*, *CDA* (предложение 2); и значит, каждый из *ACD*, *CDA* будет вдвое больше *CAD*. Вот рассечём каждый из углов *ACD* и *CDA* пополам прямыми *CE* и *DB* (предложение 9 книги I) и соединим *AB*, *BC*, [*CD*], *DE*, *EA*.

Поскольку теперь каждый из углов *ACD* и *CDA* вдвое больше *CAD*, и они рассечены пополам прямыми *CE*, *DB*,

---

*) У Евклида ἐκκείσθω — выложим, выставим на вид.

то значит, пять углов DAC, ACE, ECD, CDB, BDA равны между собой. Равные же углы опираются на равные обводы (предложение 26 книги III); значит, пять обводов AB, BC, CD, DE, EA равны между собой. Но равные обводы стягиваются равными прямыми (предложение 29 книги III); значит, пять прямых AB, BC, CD, DE, EA равны между собой; значит, пятиугольник $ABCDE$ равносторонний. Вот я утверждаю, что и равноугольный. Действительно, поскольку обвод AB равен обводу DE, то прибавим общий



Черт. 13.

BCD; значит, весь обвод $ABCD$ равен всему обводу $EDCB$. И на обвод $ABCD$ опёрся угол AED, на обвод же $EDCB$ угол BAE; и значит, угол BAE равен AED (предложение 27 книги III). Вследствие того же вот и каждый из углов ABC, BCD, CDE равен каждому из BAE и AED; значит, пятиугольник $ABCDE$ равноугольный. Доказано же, что он и равносторонний.

Значит, в данный круг вписывается равносторонний и равноугольный пятиугольник, что и требовалось сделать (6).

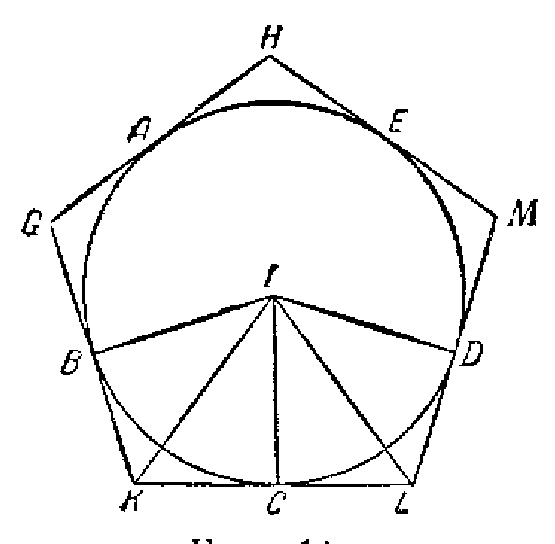
Предложение 12

Около данного круга описать равносторонний и равноугольный пятиугольник.

Пусть данный круг будет $ABCDE$; требуется же около круга $ABCDE$ описать равносторонний и равноугольный пятиугольник.

Вообразим *), что *A*, *B*, *C*, *D*, *E* будут угловые точки вписанного пятиугольника (черт. 14) (предложение 11), так что обводы *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* равны; и через *A*, *B*, *C*, *D*, *E* проведём касательные к кругу *HG*, *GK*, *KL*, *LM*, *MN* (предложение 17 книги III), возьмём центр *I* круга *ABCDE* (предложение 1 книги III) и соединим *IB*, *IK*, *IC*, *IL*, *ID*.

И поскольку прямая *KL* касается круга *ABCDE* в *C*, из центра же *I* к точке касания в *C* проведена соединяющая *IC*, то значит, *IC* перпендикулярна к *KL* (предложение 18 книги III); значит, каждый из углов при *C* — прямой. Вследствие того же вот и углы при точках *B* и *D* прямые. И поскольку угол *ICK* прямой, то значит, квадрат на *IK* равен квадратам на *IC*, *CK* ⟨вместе⟩ (предложение 47 книги I). Вследствие того же вот и квадратам на *IB*, *BK* будет равен квадрат на *IK*, так что квадраты на *IC* и *CK* равны квадратам на *IB* и *BK*, из которых квадрат на *IC* равен квадрату на *IB*; значит, остающийся квадрат на *CK* равен квадрату на *BK*. Значит, *BK* равна *CK*. И поскольку *IB* равна *IC* и *IK* общая, то вот две ⟨прямые⟩ *BI*, *IK* равны двум *CI*, *IK*; и основание *BK* равно основанию *CK*; значит, угол *BIK* равен [углу] *KIC* (предложение 8 книги I); угол же *BKI* равен *IKC* (предложение 32 книги I); значит, угол *BIC* вдвое больше угла *KIC*, *BKC* угла *IKC*. Вследствие того же вот и угол *CID* вдвое больше *CIL*, *DLC* угла *ILC*. И поскольку обвод *BC* равен *CD*, то и угол *BIC* равен *CID* (предложение 27 книги III). И угол *BIC* вдвое больше угла *KIC*, *DIC* угла *LIC*; значит, и *KIC* равен *LIC*, и угол *ICK* равен *ICL*.



Черт. 14.

*) У Евклида νενοήσθω — разумею, понимаю, представляю в уме.

Вот будут два треугольника *IKC* и *ILC*, имеющих два угла, равных двум углам, и одну сторону, равную одной стороне, именно, их общую *IC*; значит, они будут иметь и остальные стороны равными остальным и остающийся угол, равным остающемуся (предложение 26 книги I); значит, прямая *KC* равна *CL*, угол же *IKC* равен *ILC*.

И поскольку *KC* равна *CL*, то значит, *KL* вдвое больше *KC*. Таким же вот образом будет доказано, что и *GK* вдвое больше *BK*. И *BK* равна *KC*; и значит, *GK* равна *KL*. Подобным же вот образом будет доказано, что и каждая из ⟨прямых⟩ *GH*, *HM*, *ML* равна каждой из *GK*, *KL*; значит, пятиугольник *HGKLM* равносторонний. Вот я утверждаю, что и равноугольный. Действительно, поскольку угол *IKC* равен *ILC*, и по доказанному угол *GKL* вдвое больше угла *IKC*, *KLM* же вдвое больше угла *ILC*, то значит, и угол *GKL* равен *KLM*. Подобным же вот образом будет доказано, что и каждый из углов *KGH*, *GHM*, *HML* равен каждому из *GKL*, *KLM*; значит, пять углов *HGK*, *GKL*, *KLM*, *LMH*, *MHG* равны между собой. Значит, пятиугольник *HGKLM* равноугольный. Доказано же, что он и равносторонний, и описывается около круга *ABCDE*.

[Значит, около данного круга описывается равноугольный и равносторонний пятиугольник], что и требовалось сделать.

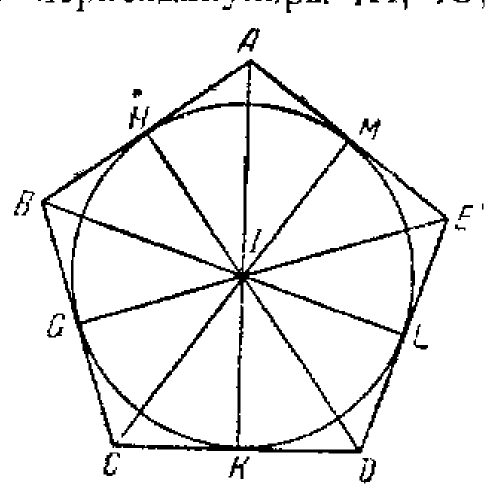
Предложение 13

В данный пятиугольник, являющийся равносторонним и равноугольным, вписать круг.

Пусть данный пятиугольник равносторонний и равноугольный будет *ABCDE*; вот требуется вписать в пятиугольник *ABCDE* круг (черт. 15).

Рассечём каждый из углов *BCD*, *CDE* пополам прямыми *CI*, *DI*; и из точки *I*, в которой встречаются друг с другом прямые *CI* и *DI*, проведём соединяющие прямые *IB*, *IA*, *IE*. И поскольку *BC* равна *CD*, *CI* же общая, то вот две ⟨прямые⟩ *BC*, *IC* равны двум *DC*, *CI*; и угол *BCI* равен углу *DCI*; значит, основание *BI* равно основанию *DI* (предложение 4 книги I), и треугольник *BCI* равен тре-

угольнику *DCI*, и остальные углы равны остальным, стягиваемым равными сторонами; значит, угол *CBI* равен *CDI*. И поскольку угол *CDE* вдвое больше *CDI*, угол же *CDE* равен *ABC*, *CDI* же равен *CBI* и, значит, угол *CBA* вдвое больше *CBI*; значит, угол *ABI* равен *IBC*; значит, угол *ABC* делится прямой *BI* пополам. Подобным же вот образом будет доказано, что и каждый из углов *BAE*, *AED* делится пополам прямыми *IA*, *IE*. Вот проведём из точки *I* к прямым *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* перпендикуляры *IH*, *IG*, *IK*, *IL*, *IM*. И поскольку угол *GCI* равен *KCI*, прямой же угол *IGC* равен [прямому] *IKC*, то вот два треугольника *IGC*, *IKC*, имеющих два угла, равных двум углам, и одну сторону, равную одной стороне, — их общую *IC*, — стягивающую один из равных углов: значит, они будут иметь и остальные стороны равными остальным; значит, перпендикуляр *IG* равен перпендикуляру *IK*. Подобным же вот образом будет доказано, что и каждая из <прямых> *IL*, *IM*, *IH* равна каждой из *IG*, *IK*; значит, пять прямых *IH*, *IG*, *IK*, *IL*, *IM* равны между собой. Значит, круг, описанный из центра *I* раствором одним из *IH*, *IG*, *IK*, *IL*, *IM*, пройдёт и через остальные точки и коснётся прямых *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* вследствие того, что углы при точках *H*, *G*, *K*, *L*, *M* прямые. Действительно, если он не коснётся их, но пересечёт их, то произойдёт, что прямая, проведённая в конце диаметра под прямыми углами, упадёт внутрь круга, что по доказанному нелепо (предложение 16 книги III). Значит, круг, описанный из центра *I* раствором одним из *IH*, *IG*, *IK*, *IL*, *IM*, не пересечёт прямых *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*; значит, он их коснётся. Пусть он описан <и будет> как *HGKLM*.



Черт. 15.

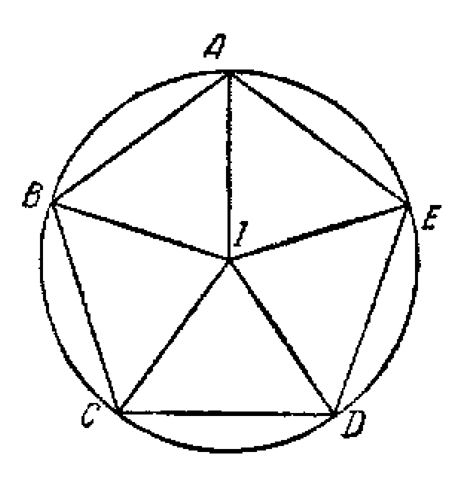
Значит, в данный пятиугольник, являющийся равносторонним и равноугольным, вписывается круг, что и требовалось сделать.

Предложение 14

Около данного пятиугольника, являющегося равносторонним и равноугольным, описать круг.

Пусть данный пятиугольник, являющийся равносторонним и равноугольным, будет *ABCDE*; вот требуется около пятиугольника *ABCDE* описать круг (черт. 16).

Вот рассечём каждый из углов *BCD* и *CDE* пополам прямыми *CI*, *DI* и от точки *I*, в которой встречаются прямые, к точкам *B*, *A*, *E* проведём соединяющие прямые *IB*, *IA*, *IE*. Подобно вот предыдущему будет доказано, что и каждый из углов *CBA*, *BAE*, *AED* делится пополам <соответственно> прямыми *IB*, *IA*, *IE*. И поскольку угол *BCD* равен *CDE* и половина *BCD* есть *ICD*, половина же *CDE* угол *CDI*, и значит, *ICD* равен *IDC*; так что и сторона *IC* равна стороне *ID* (предложение 6 книги I). Подобным же вот образом будет доказано, что и каждая из прямых *IB*, *IA*, *IE* равна каждой из *IC*, *ID*; значит, пять прямых *IA*, *IB*, *IC*, *ID*, *IE* равны между собой. Значит, круг, описанный из центра *I* раствором одним из *IA*, *IB*, *IC*, *ID*, *IE*, пройдёт и через остальные точки и будет описанным. Пусть он описан и будет *ABCDE*.



Черт. 16.

Значит, около данного пятиугольника, являющегося равносторонним и равноугольным, описывается круг, что и требовалось сделать.

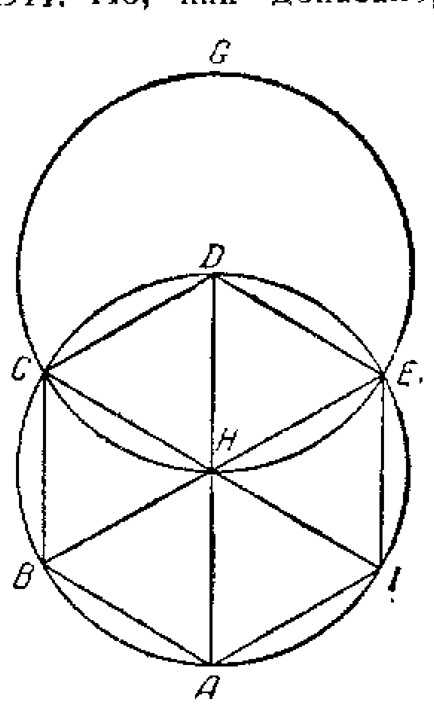
Предложение 15

В данный круг вписать шестиугольник равносторонний и равноугольный.

Пусть данный круг будет *ABCDEI*; вот требуется вписать в круг *ABCDEI* шестиугольник равносторонний и равноугольный (черт. 17).

Проведём диаметр *AD* круга *ABCDEI* и возьмём центр круга *H*, из центра *D* раствором *DH* опишем круг *EHCG*, соединяющие прямые *EH* и *CH* продолжим до *B* и *I* и соединим *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EI*, *IA*. Я утверждаю, что *ABCDEI* шестиугольник равносторонний и равноугольный.

Действительно, поскольку точка *H* есть центр круга *ABCDEI*, то *HE* равна *HD*. Далее, поскольку точка *D* центр круга *EHCG*, то *DE* равна *DH*. Но, как доказано, *HE* равна *HD*; и значит, *HE* равна *ED*; значит, треугольник *EHD* равносторонний; и значит, три его угла *EHD*, *HDE*, *DEH* равны между собой, поскольку ведь в равнобедренных треугольниках углы при основании равны между собой (предложение 5 книги I), и три угла треугольника <вместе> равны двум прямым (предложение 32 книги I); значит, угол *EHD* — треть двух прямых. Подобным же вот образом будет доказано, что и угол *DHC* третья часть двух прямых. И поскольку прямая *CH*, восставленная на *EB*, образует смежные углы, равные двум прямым (предложение 13 книги I),



Черт. 17.

то значит, и оставшийся угол *CHB* — треть двух прямых; значит, углы *EHD*, *DHC*, *CHB* равны между собой, так что и их углы через вершину *) *BHA*, *AHI*, *IHE* (предложение 15 книги I) равны [углам *EHD*, *DHC*, *CHB*]. Значит, шесть углов *EHD*, *DHC*, *CHB*, *BHA*, *AHI*, *IHE* равны между собой. Равные же углы опираются на равные обводы (предложение 26 книги III); значит, шесть обводов *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EI*, *IA* равны между собой. Равные же обводы стягиваются равными прямыми (предложение 29 книги III); значит, шесть этих прямых равны между собой; значит, шестиугольник *ABCDEI*

*) Т. е. вертикальные.

равносторонний. Вот я утверждаю, что и равноугольный. Действительно, поскольку обвод IA равен обводу ED, прибавим общий обвод $ABCD$; значит, вся $IABCD$ равна всей $EDCBA$; и на обвод $IABCD$ опёрся угол IED, на обвод же $EDCBA$ угол AIE; значит, угол AIE равен DEI (предложение 27 книги III). Подобным же вот образом будет доказано, что и остальные углы шестиугольника $ABCDEI$ поодиночке равны каждому из углов AIE, IED; значит, шестиугольник $ABCDEI$ равноугольный. Доказано же, что он и равносторонний и вписывается в круг $ABCDEI$.

Итак, в данный круг вписывается шестиугольник равносторонний и равноугольный, что и требовалось сделать.

Следствие

Из этого вот ясно, что сторона шестиугольника равна прямой «из центра круга» *).

Подобным же образом, как для пятиугольника, если провести через деления по кругу касательные к кругу, то около круга опишется равносторонний и равноугольный шестиугольник, следуя тому, что сказано о пятиугольнике (предложение 12). И ещё на основании ⟨доказательств⟩, подобных изложенным для пятиугольника, в данный шестиугольник (предложения 13, 14) впишем и ⟨около него⟩ опишем круг, что и требовалось сделать.

Предложение 16

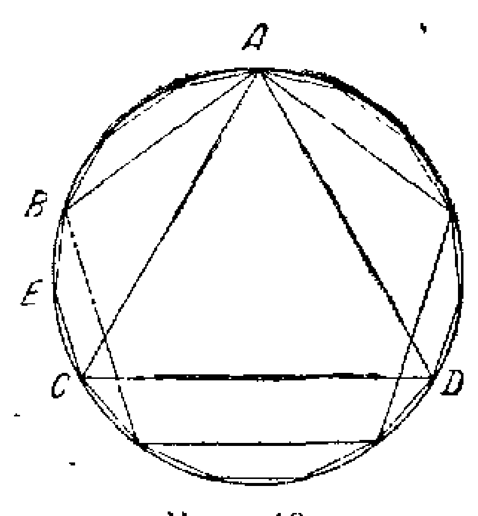
В данный круг вписать пятнадцатиугольник равносторонний и равноугольный.

Пусть данный круг будет $ABCD$; вот требуется в круг $ABCD$ вписать пятнадцатиугольник равносторонний и равноугольный (черт. 18).

Впишем в круг $ABCD$ сторону AC равностороннего треугольника, в него вписанного (предложение 2), и сторону AB равностороннего пятиугольника; значит, каких равных

*) Т. е. радиусу, для обозначения которого греки не имели специального термина; слово «radius — луч» введено позднее.

долей *) будет в круге *ABCD* пятнадцать **), таких в обводе *ABC*, являющемся третью круга, будет пять, в обводе же *AB*, являющемся пятой частью круга, будет три; значит, в остающемся обводе *BC* равных <долей> будет две. Рассечём *BC* пополам в *E* (предложение 30 книги III); значит, каждый из обводов *BE* и *EC* будет пятнадцатой частью круга *ABCD*.



Черт. 18.

Значит, если, соединив *BE* и *EC*, будем вставлять в круг *ABCD* одну за другой равные им прямые (предложение 1), то получим вписанный в круг пятнадцатиугольник равносторонний и равноугольный, что и требовалось сделать.

Подобным же образом, как для пятиугольника, если провести через деления по кругу касательные к кругу, то опишется около круга пятнадцатиугольник равносторонний и равноугольный (предложение 12). Ещё же на основании доказательств, подобных тем, что для пятиугольника, мы впишем в данный пятнадцатиугольник и опишем <около него> круг (предложения 13 и 14), что и требовалось сделать (7, 8, 9, 10).

---

*) У Евклида τμημάτων, т. е. «отрезков».

**) οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ *ΑΒΓΔ* κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε — дословно «значит, каких равных долей был бы круг *ABCD* <в> пятнадцать». Мы сказали бы: «если весь круг *ABCD* равняется пятнадцати долям, то обвод *ABC* будет равняться пяти таким долям и т. д.».



КНИГА ПЯТАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Часть* есть величина <от> величины, меньшая <от> большей, если она измеряет бо́льшую.

2. *Кратное* же — бо́льшая <от> меньшей, если она измеряется меньшей.

3. *Отношение* есть некоторая зависимость *) двух однородных величин по количеству (1, 2, 3, 4).

4. Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга (5, 6, 7, 8).

5. Говорят, что величины *находятся в том же отношении*: первая ко второй и третья к четвёртой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвёртой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке (9, 10, 11, 12).

6. Величины же, имеющие то же отношение, пусть называются *пропорциональными* **).

---

*) У Евклида σχέσις — собственно говоря, состояние (habitus) от ἴσχειν — удерживать (усиленное ἔχειν — иметь).

**) ἀνάλογος — соразмеримый, согласный, сходный. У Евклида просто ἀνάλογον, что по форме не является прилагательным, хотя употребляется и в значении чего-то похожего на прилагательное. Хизс (Heath) толкует ἀνάλογον как ἀνὰ λόγον — в отношении или, ещё лучше, в пропорции. Нашему слову «пропорция» у Евклида соответствует ἀναλογία, употребляющееся у Аристотеля и в более широком смысле (например, Никомахова этика V, 6; Физика IV, 3).

7. Если же из равнократных кратное первой превышает кратное второй, а кратное третьей не превышает кратного четвёртой, то говорят, что первая ко второй *имеет бо́льшее отношение*, чем третья к четвёртой.

8. *Пропорция* же состоит по меньшей мере из трёх членов (13).

9. Когда же три величины пропорциональны, то говорят, что первая к третьей имеет *двойное* отношение первой ко второй *).

10. Когда же четыре величины пропорциональны, то говорят, что первая к четвёртой имеет *тройное* отношение первой ко второй и так далее, всегда, пока существует пропорция **).

11. *Соответственными* величинами называются предыдущие <по отношению к> предыдущим, последующие же <к> последующим.

12. *Переставленное отношение* есть взятие <отношения> предыдущего к предыдущему и последующего к последующему ***).

13. *Перевёрнутое отношение* есть взятие <отношения> последующего как предыдущего к предыдущему как к последующему ****).

---

*) В данном случае речь идёт о непрерывной пропорции

$$a:b = b:c.$$

Евклид хочет сказать, что

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2;$$

его термин «двойное (διπλάσιον) отношение» следует понимать как отношение, повторённое два раза множителем.

**) У Евклида ὡς ἄν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. Гейберг переводит qualiscunque data est proportio — какой бы ни была пропорция.

***) У Евклида ἐναλλάξ λόγος — отношение накрест (латинский термин permutata ratio или permutando); если $a:b = c:d$, то $a:c = b:d$.

****) У Евклида ἀνάπαλιν λόγος — отношение наоборот (inversa ratio или invertendo); если $a:b = c:d$, то $b:a = d:c$.

14. *Присоединение отношения* есть взятие ⟨отношения⟩ предыдущего с последующим как одного ⟨члена⟩ к этому самому последующему *).

15. *Выделение отношения* есть взятие ⟨отношения⟩ избытка предыдущего над последующим к этому самому последующему **).

16. *Переворачивание отношения* есть взятие ⟨отношения⟩ предыдущего к избытку предыдущего над последующим ***).

17. *По равенству* отношение бывает при задании нескольких величин и равного им количества других, находящихся, взятые попарно, в том же самом отношении, когда как первая к последней в ⟨ряду⟩ первых величин, так будет и первая к последней в ⟨ряду⟩ вторых величин; или иначе: взятие ⟨отношения⟩ крайних с пропуском средних ****).

18. *Перемешанная же пропорция* бывает, когда при задании трёх величин и других равных им по количеству получается, что как в ⟨ряду⟩ первых величин предыдущая к последующей, так и в ⟨ряду⟩ вторых величин предыдущая к последующей, как же в ⟨ряду⟩ первых величин последующая к какой-то ⟨третьей⟩, так в ряду вторых какая-то ⟨третья⟩ к предыдущей *****).

---

*) У Евклида σύνθεσις λόγου — compositio rationis, или сокращённо συνθέντι — componendo; если $a:b = c:d$, то $(a+b):b = (c+d):d$.

**) У Евклида διαίρεσις λόγου — subtractio rationis, или сокращённо διελόντι — dirimendo, separando или divisim; если $a:b = c:d$, то $(a-b):b = (c-d):d$.

***) У Евклида ἀναστροφὴ λόγου — conversio rationis, сокращённо ἀναστρέψαντι — convertendo; если $a:b = c:d$, то $a:(a-b) = c:(c-d)$.

****) У Евклида δι' ἴσου λόγος — ex aequo или ex aequali, если $a:b:c = A:B:C$, то $a:c = A:C$.

*****) У Евклида τεταραγμένη ἀναλογία — perturbata proportio, если даны три величины a, b, c и три других A, B, C таких, что

$$a:b = B:C \quad b:c = A:B,$$

то

$$a:c = A:C.$$

Предложенне 1

Если будет несколько величин, равнократных каждая каждой каким-нибудь ⟨другим, взятым⟩ в равном количестве величинам, то сколько раз одна из ⟨первых⟩ величин будет кратна одной ⟨из вторых⟩, столько же раз будут и все ⟨первые величины вместе⟩ кратны всем ⟨вторым⟩.

Пусть будет несколько величин *AB*, *CD*, равнократных каждая каждой каким-нибудь ⟨другим, взятым⟩ в равном количестве величинам *E*, *I*; я утверждаю, что сколько раз *AB* кратна *E*, столько же раз и *AB*, *CD* ⟨вместе⟩ будут кратны *E*, *I* (черт. 1).

Черт. 1.

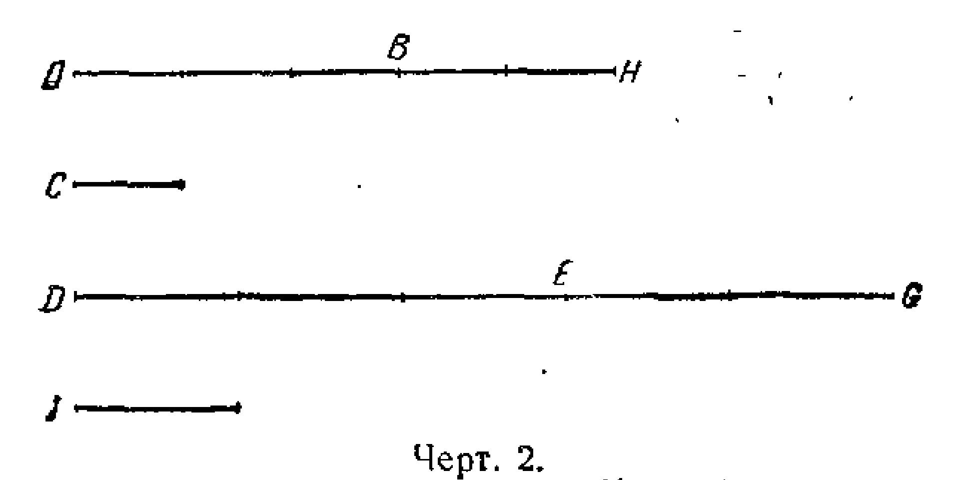
Действительно, поскольку равнократны *AB* для *E* и *CD* для *I*, то значит, сколько в *AB* будет величин, равных *E*, столько и в *CD* равных *I*. Разделим *AB* на равные *E* величины *AH*, *HB*, а *CD* на равные *I* величины *CG*, *GD*; вот количество величин *AH*, *HB* будет равно количеству величин *CG*, *GD*. И поскольку *AH* равно *E*, *CG* же *I*, то значит, *AH* равно *E*, и *AH*, *CG* равны *E*, *I*. Вот вследствие того же *HB* равно *E*, и *HB*, *GD* равны *E*, *I*; значит, сколько в *AB* равных *E*, столько и в *AB*, *CD* равных *E*, *I*; значит, сколько раз *AB* кратна *E*, столько же раз и *AB*, *CD* ⟨вместе⟩ будут кратны *E*, *I*.

Значит, если будет несколько величин, равнократных каждая каждой каким-нибудь ⟨другим, взятым⟩ в равном количестве величинам, то сколько раз одна из ⟨первых⟩ величин будет кратна одной ⟨из вторых⟩, столько же раз и все ⟨первые вместе⟩ будут кратны всем ⟨вторым⟩, что и требовалось доказать (14).

Предложение 2

Если первая ⟨величина⟩ столько же раз кратна второй, сколько и третья четвёртой, и пятая столько же раз кратна второй, сколько и шестая четвёртой, то составленная первая и пятая будут столько же раз кратны второй, сколько третья и шестая ⟨кратны⟩ четвёртой.

Пусть первая ⟨величина⟩ AB столько же раз кратна второй C, сколько третья DE четвёртой I, пусть же и



Черт. 2.

пятая BH столько же раз кратна второй C, сколько и шестая EG четвёртой I; я утверждаю, что и составленные первая и пятая AH будут столько же раз кратны второй C, сколько третья и шестая DG ⟨кратны⟩ четвёртой I (черт. 2).

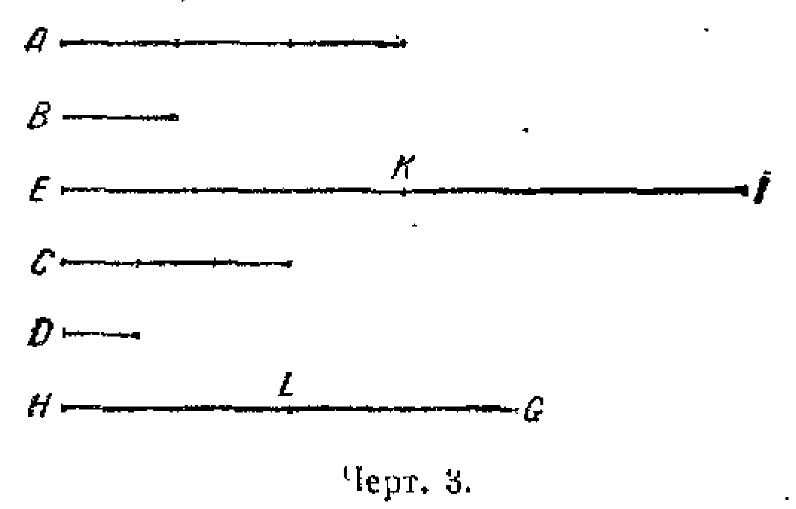
Действительно, поскольку одинаково кратны AB от C и DE от I, то значит, сколько в AB ⟨величин⟩, равных C, столько же и в DE, равных I. Вот вследствие того же и сколько в BH будет равных C, столько же и в EG равных I; значит, сколько во всём AH равных C, столько и во всём DG равных I. Значит, сколько раз AH кратна C, столько раз и DG кратна I. Значит, и составленные первая и пятая AH столько же раз будут кратны второй C, сколько раз и третья и шестая DG кратны четвёртой I.

Значит, если первая столько же раз кратна второй, сколько и третья четвёртой, и пятая столько же раз кратна

второй, сколько и шестая четвёртой, то составленные первая и пятая будут столько же раз кратны второй, сколько третья и шестая кратны четвёртой, что и требовалось доказать.

Предложение 3

Если первая ⟨величича⟩ столько же раз кратна второй, сколько и третья четвёртой, и взяты равнократные первой и третьей, то «по равечству» из взятых каждая будет одинаково кратна каждой: одна — второй, другая же четвёртой.



Черт. 3.

Пусть первая ⟨величина⟩ *A* будет столько же раз кратна второй *B*, сколько и третья *C* четвёртой *D*, и пусть взяты *EI* и *HG* равнократные *A* и *C* (черт. 3); я утверждаю, что *EI* будет столько же раз кратна *B*, сколько и *HG* кратна *D*.

Действительно, поскольку одинаково кратны *EI* от *A* и *HG* от *C*, то значит, сколько в *EI* равных *A*, столько и в *HG* равных *C*. Разделим *EI* на равные *A* величины *EK*, *KI*, а *HG* на равные *C* величины *HL*, *LG*; вот количество *EK*, *KI* будет равно количеству *HL*, *LG*. И поскольку одинаково кратны *A* для *B* и *C* для *D*, *EK* же равно *A*, а *HL* равно *C*, то значит, одинаково кратны будут *EK* для *B* и *HL* для *D*. Вот вследствие того же одинаково кратны будут *KI* для *B* и *LG* для *D*. Поскольку теперь первая *EK* столько же раз кратна второй *B*, сколько и третья *HL* кратна четвёртой *D*, и пятая *KI* столько же раз

кратна второй B, сколько и шестая LG кратна четвёртой D, то значит, и сложенные первая и пятая EI будут столько же раз кратны второй B, сколько и третья и шестая HG кратны четвёртой D (предложение 2).

Значит, если первая столько же раз кратна второй, сколько и третья четвёртой, и взяты равнократные первой и третьей, то «по равенству» из взятых каждая будет одинаково кратна каждой: одна — второй, а другая — четвёртой, что и требовалось доказать.

Предложение 4

Если первая ко второй имеет то же самое отношение, что и третья к четвёртой, то и равнократные первой и третьей к равнократным второй и четвёртой, при любой кратности будут иметь то же самое отношение, взятые в соответственном порядке.

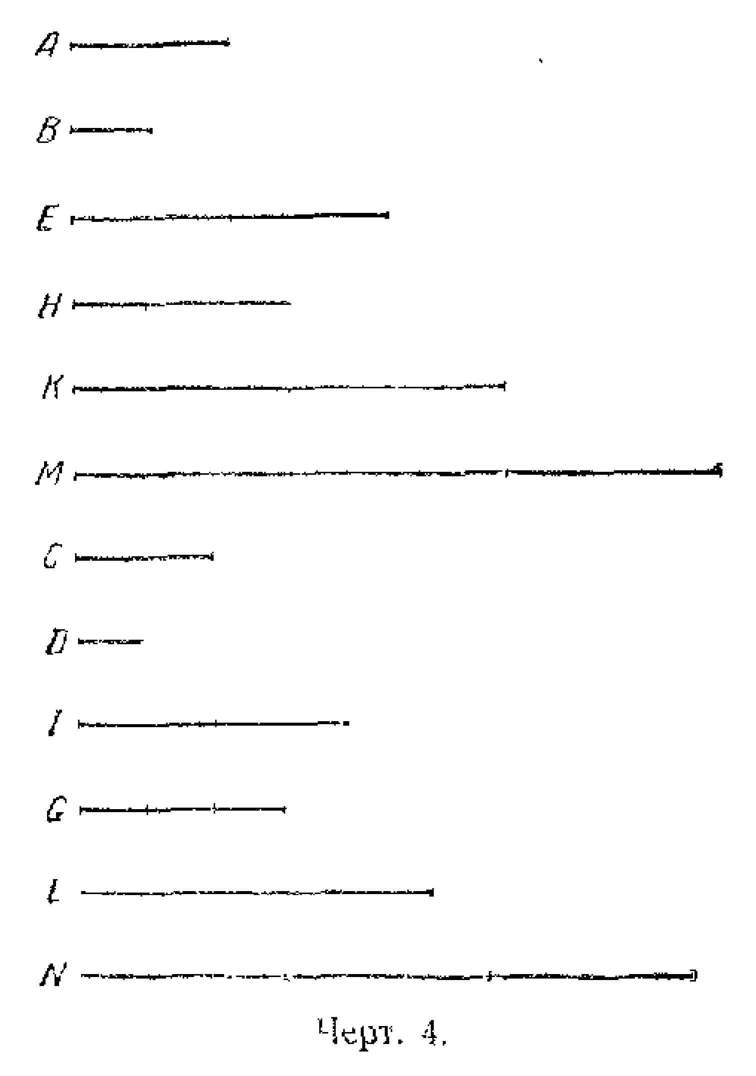
Пусть первая A ко второй B будет иметь то же самое отношение, что и третья C к четвёртой D, и пусть взяты E, I равнократные от A, C, от B, D же другие какие-нибудь равнократные H, G; я утверждаю, что будет как E к H, так и I к G.

Действительно, возьмём от E, I равнократные K, L, а от H, G другие, какие угодно, равнократные M и N (черт. 4).

И поскольку одинаково кратны E от A, I же от C, и от E, I взяты равнократные K, L, то значит, одинаково кратны K от A и L от C (предложение 3). Вот вследствие того же одинаково кратны M от B и N от D. И поскольку будет, что как A к B, так и C к D, и взяты от A, C равнократные K, L, от B, D же другие какие угодно равнократные M, N, то значит, если K превышает M, то и L превышает N, и если равны ⟨первые⟩, то равны ⟨и вторые⟩, и если меньше ⟨первые⟩, то меньше ⟨и вторые⟩ (определение 5). И K, L суть равнократные от E, I, а M, N другие какие угодно равнократные от H, G; значит, будет, что как E к H, так и I к G (определение 5).

Значит, если первая ко второй имеет то же самое отношение, что и третья к четвёртой, то и равнократные

первой и третьей к равнократным второй и четвёртой при любой кратности будут иметь то же самое отношение,



Черт. 4.

взятые в соответственном порядке, что и требовалось доказать.

Предложение 5

*Если величина столько же раз кратна ⟨другой⟩ величине, сколько отнимаемое**) *кратно отнимаемому, то и остаток будет столько же раз кратен остатку, сколько раз и целое кратно целому.*

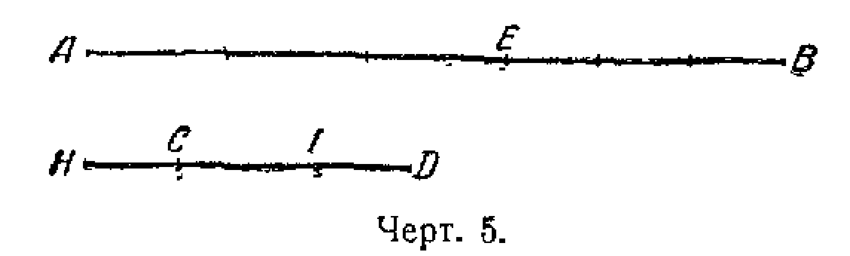
---

*) Употреблённый в тексте термин ἀφαιρεθέν обозначает также и «вычитаемое», однако я намеренно избегаю этого термина, поскольку Евклиду чужда всякая арифметизация геометрии.

Пусть величина AB будет столько же раз кратна величине CD, сколько отнимаемое AE ⟨кратно⟩ отнимаемому CI; я утверждаю, что и остаток EB будет столько же раз кратен остатку ID, сколько раз целое AB кратно целому CD (черт. 5).

Действительно, каким кратным будет AE от CI, таким же кратным сделаем и EB от CH.

И поскольку одинаково кратны AE от CI и EB от HC, то значит, одинаково кратными будут AE от CI и AB от



Черт. 5.

HI (предложение 1). Полагаются же одинаково кратными AE от CI и AB от CD. Значит, AB одинаково кратно каждой из HI, CD; значит, HI равно CD. Отнимем общую CI; значит, остаток HC равен остатку ID. И поскольку одинаково кратны AE от CI и EB от HC, HC же равна DI, то значит, одинаково кратны AE от CI и EB от ID. Предполагается же, что одинаково кратны AE от CI и AB от CD; значит, одинаково кратны будут EB от ID, и AB от CD. Значит, и остаток EB будет столько же раз кратен остатку ID, сколько раз целое AB кратно целому CD.

Значит, если величина столько же раз кратна величине, сколько отнимаемое кратно отнимаемому, то и остаток будет столько же раз кратен остатку, сколько раз и целое кратно целому, что и требовалось доказать.

Предложение 6

Если две величины равнократны двум ⟨другим⟩ величинам и какие-нибудь отнимаемые равнократны тем же самым, то и остатки будут или равны им или одинаково им кратны.

Пусть две величины AB, CD будут равнократны двум величинам E, I и отнимаемые AH, CG пусть будут равно-

кратными тем же самым *E*, *I*; я утверждаю, что и остатки *HB*, *GD* или будут равны *E*, *I*, или одинаково им кратны (черт. 6).

Действительно, пусть сперва *HB* будет равна *E*; я утверждаю, что и *GD* будет равна *I*.

Действительно, положим *) *CK*, равную *I*. Поскольку одинаково кратны *AH* от *E* и *CG* от *I*, *HB* же равна *E*, *KC* же *I*, то значит, одинаково кратны *AB* от *E* и *KG* от *I*. Предполагается же, что одинаково кратны *AB* от *E* и *CD* от *I*; значит, одинаково кратны *KG* от *I* и *CD* от *I*. Поскольку теперь каждая из *KG*, *CD* одинаково кратна *I*, то значит, *KG* равно *CD*. Отнимем общую *CG*; значит, остаток *KC* будет равен остатку *GD*. Но *I* равно *KC*; значит, и *GD* равно *I*. Так что, если *HB* равна *E*, то и *GD* будет равна *I*.

Черт. 6.

Подобным же вот образом докажем, что если *HB* было бы ‹каким-нибудь› кратным *E*, то *GD* будет таким же кратным *I*.

Значит, если две величины равнократны двум величинам и какие-нибудь отнимаемые равнократны тем же самым, то и остатки будут или равны им или одинаково им кратны, что и требовалось доказать.

Предложение 7

Равные к тому же имеют то же отношение и это то же ‹имеет то же отношение› к равным.

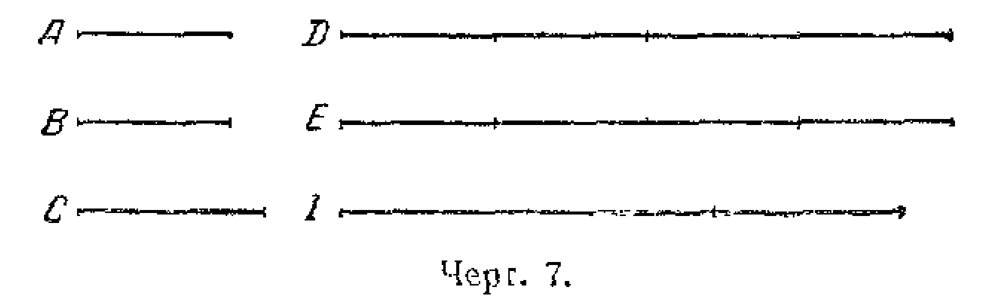
Пусть равные величины будут *A* и *B*, а какая угодно другая величина *C*; я утверждаю, что каждая из *A*, *B*

*) Евклидово κείσθω нельзя переводить «отложим», ни о каком переносе отрезка раствором циркуля Евклид здесь и не думает.

имеет к C одно и то же отношение, ⟨также⟩ и C к каждому из A, B (черт. 7).

Действительно, возьмём от A, B равнократные D, E, а от C другое какое угодно кратное I.

Поскольку теперь одинаково кратны D от A и E от B, A же равна B, то значит, и D равна E. Но I какая угодно другая величина. Значит, если D превышает I, то и E превышает I, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше. И D, E равнократны A, B, I же какое угодно



Черт. 7.

другое кратное C; значит, будет, что как A к C, так и B к C (определение 5).

[Вот] я утверждаю, что и C имеет одно и то же отношение к каждому из A, B.

Действительно, при тех же построениях подобным же образом докажем, что D равна E; I же какая-то другая величина; значит, если I больше D, то она больше и E, если равна, то равна, и если меньше, то меньше. И I есть кратное C, а D, E какие-то другие равнократные A, B; значит, будет, что как C к A, так и C к B.

Значит, равные к тому же имеют то же отношение, и это то же ⟨имеет то же отношение⟩ к равным, что и требовалось доказать (15).

Следствие

Вот из этого ясно, что если какие-нибудь величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и «обращая» *), что и требовалось доказать.

*) См. определение 13. Евклид хочет сказать, что если $a:b = c:d$, то и $b:a = d:c$.

Предложение 8

Из неравных величин большая имеет к тому же большее отношение, чем меньшая, и это то же к меньшей имеет большее отношение, чем к большей.

Пусть неравные величины будут AB и C и пусть бо́льшая будет AB, D же другая <какая угодно величина>; я утверждаю, что AB имеет к D большее отношение, чем C к D, и что D к C имеет большее отношение, чем к AB (черт. 8).

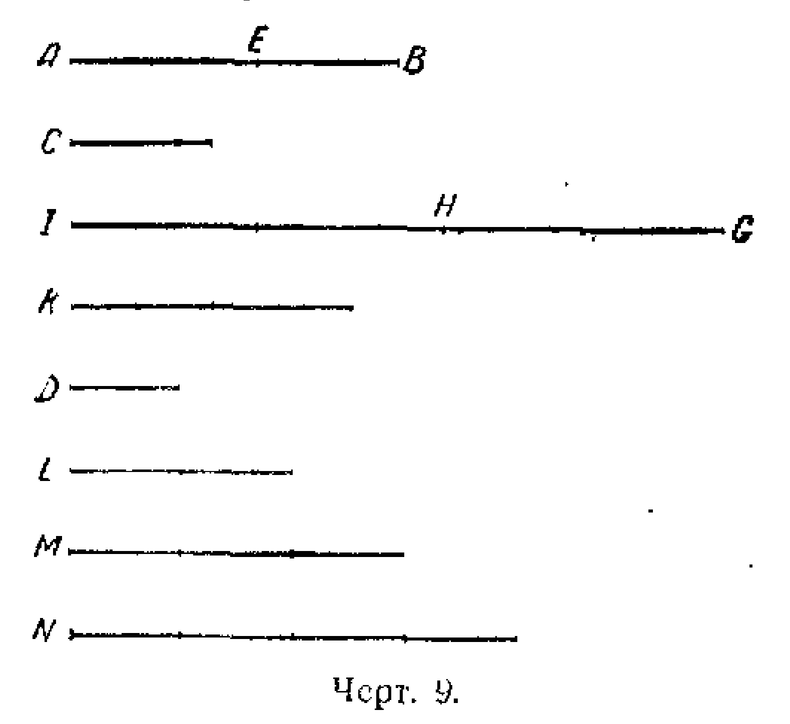
Черт. 8.

Действительно, поскольку AB больше C, то положим BE равной C; вот меньшая из AE, EB, повторяемая кратной, когда-нибудь будет больше D (определение 4). Пусть сперва AE будет меньше, чем EB; будем повторять кратной AE *), и пусть её кратное IH будет больше D, и сколько раз IH будет кратным AE, столько же раз сделаем и HG кратным EB, K же кратным C; и возьмём L удвоенное D, M же утроенное, и так далее увеличивая на единицу, пока получаемая кратная D не сделается первой превосходящей K. Возьмём <её> и пусть N будет учетверённым D и первым превосходящим K.

Поскольку теперь K меньше N первого <её превосходящего>, то, значит, K не меньше M. И поскольку одинаково кратны IH от AE и HG от EB, то значит, одинаково кратны IH от AE и IG от AB. Одинаково же кратны

*) В тексте πεπολλαπλασιάσθω τὸ AE, что значит также «умножается». Однако в данном случае переводить так нельзя, ибо появляется чуждый Евклиду арифметический термин. Я перевожу «будем *повторять* кратной» с ударением на первом слове.

IH от *AE* и *K* от *C*; значит, одинаково кратны *IG* от *AB* и *K* от *C*. Значит, *IG*, *K* одинаково кратны *AB*, *C*. Далее, поскольку одинаково кратны *HG* от *EB* и *K* от *C*, *EB* же равна *C*, то значит, и *HG* равна *K*. Но *K* не меньше *M*; значит, и *HG* не меньше *M*. Но *IH* больше *D*; значит, все *IG* больше вместе взятых *D* и *M*. Но вместе взятые *D*, *M* равны *N*, поскольку *M* утроенное *D*, вместе же взятые *M*, *D* в четыре раза больше *D* и *N* тоже в четыре



Черт. 9.

раза больше *D*; значит, вместе взятые *M*, *D* равны *N*. Но *IG* больше *M*, *D*; значит, *IG* превышает *N*; *K* же не превышает *N*. И *IG*, *K* одинаково кратны от *AB*, *C*; *N* какое угодно другое кратное *D*; значит, *AB* имеет к *D* большее отношение, чем *C* к *D* (определение 7).

Вот я утверждаю, что и *D* имеет к *C* большее отношение, чем *D* к *AB* (черт. 9).

Действительно, при тех же самых построениях подобным же образом докажем, что *N* превосходит *K*, но *N* не превосходит *IG*. И *N* есть кратное *D*, а *IG*, *K* другие какие угодно равнократные *AB*, *C*; значит, *D* имеет к *C* большее отношение, чем *D* к *AB* (определение 7).

Но вот пусть *AE* будет больше *EB*. Вот меньшее *EB* при повторении кратным будет когда-нибудь больше *D*.

Будем его повторять кратным, и пусть HG будет кратное EB и большее D; и каким кратным HG будет от EB, таким же кратным сделаем и IH от AE, а K от C. Подобным вот образом докажем, что IG, K одинаково кратны от AB, C; и возьмём подобным же образом N кратное D, и первое превосходящее IH; так что IH снова не будет меньше M. Но HG больше D; значит, всё IG превышает D, M, то-есть N. Но K не превышает N, поскольку и IH, будучи больше HG, то-есть K, не превышает N. И точно так же, следуя вышеизложенному, мы завершаем доказательство.

Значит, из неравных величин большая имеет к тому же большее отношение, чем меньшая; и это то же к меньшей имеет большее отношение, чем к большей, что и требовалось доказать.

Предложение 9

⟨Величины⟩, имеющие к одному и тому же то же самое отношение, равны между собой; и те, к которым одно и то же имеет то же самое отношение, равны.

Пусть каждая из A, B имеет к C то же самое отношение: я утверждаю, что A равна B (черт. 10).

A B C

Черт. 10.

Действительно, если не так, то каждая из A, B не имела бы к C того же самого отношения; они же имеют; значит, A равна B (предложение 8).

Пусть вот далее C имеет к каждой из A, B то же самое отношение; я утверждаю, что A равна B.

Действительно, если не так, то C не имела бы к каждой из A, B того же самого отношения (предложение 8); она же имеет; значит, A равна B.

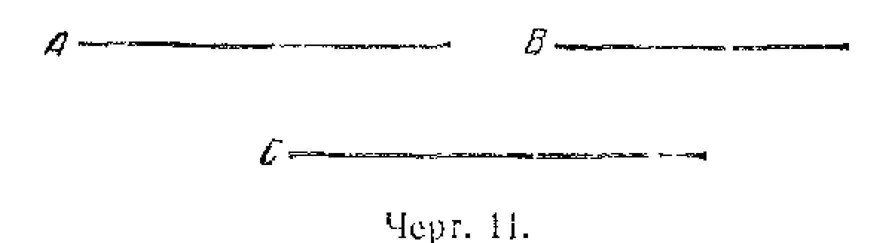
Значит, имеющие к одному и тому же то же самое отношение равны между собой; и те, к которым одно и то же имеет то же самое отношение, равны, что и требовалось доказать.

Предложение 10

Из ⟨величин⟩, имеющих отношение к одному и тому же, будет больше та, которая имеет большее отношение; та же, к которой одно и то же имеет большее отношение, будет меньше.

Пусть A имеет к C большее отношение, чем B к C; я утверждаю, что A больше B (черт. 11).

Действительно, если не так, то A или равна B или меньше. Но равной B теперь A не будет; ибо ⟨тогда⟩ каждая из A, B имела бы к C то же самое отношение (предложение 7). Они же не имеют; значит, A не равна B. Но также A не будет и меньше B; ибо тогда A имела бы



Черт. 11.

к C меньшее отношение, чем B к C (предложение 8). Она же не имеет; значит, A не меньше B. Доказано же, что она и не равна; значит, A будет больше B.

Пусть вот далее C имеет к B большее отношение, чем C к A; я утверждаю, что B будет меньше A.

Действительно, если не так, то она или равна, или больше. Но равной A теперь B не будет; ибо ⟨тогда⟩ C имела бы к каждой из A, B то же самое отношение. Она же не имеет; значит, A не будет равна B. Но также B не будет и больше A, ибо тогда C имела бы к B меньшее отношение, чем к A. Она же не имеет; значит, B не больше A. Доказано же, что она и не равна; значит, B будет меньше A.

Значит, из имеющих отношение к одному и тому же будет больше та, которая имеет большее отношение; и та, к которой одно и то же имеет большее отношение, будет меньше, что и требовалось доказать.

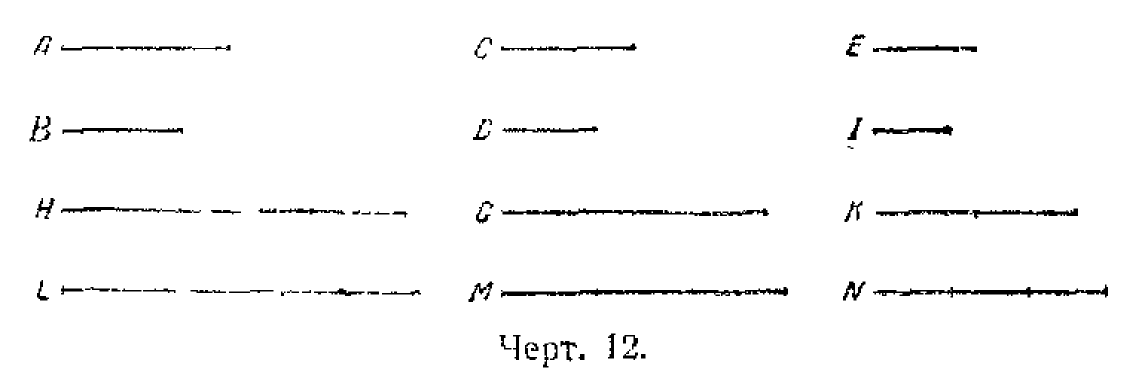
Предложение 11

⟨Отношения⟩, тождественные) одному и тому же отношению, тождественны и друг другу.*

Пусть будет, что как A к B, так и C к D, и как C к D, так и E к I; я утверждаю, что как A к B, так и E к I (черт. 12).

Действительно, возьмём от A, C, E равнократные H, G, K, а от B, D, I какие угодно другие равнократные L, M, N.

И поскольку будет, что как A к B, так и C к D, и от A, C взяты равнократные H, G, от B, D же какие



Черт. 12.

угодно другие равнократные L, M, то значит, если H превышает L, то и G превышает M, и если равна, то равна, и если недостаёт, то недостаёт (определение 5).

Далее, поскольку будет, что как C к D, так и E к I, и от C, E взяты равнократные G, K, от D, I же какие угодно другие равнократные M и N, то значит, если G превышает M, то и K превышает N, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (определение 5). Но если G превышала M, то и H превышала L, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше; так что, если H превышает L, то и K превышает N, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (определение 5). И H, K равнократные от A, E, а L, N какие-нибудь другие равнократные от B, I; значит, будет, что как A к B, так и E к I.

Значит, тождественные одному и тому же отношению тождественны и друг другу, что и требовалось доказать (16).

---

*) У Евклида «οἱ αὐτοί» буквально «те же самые».

Предложение 12

Если несколько величин пропорциональны, то будет, что как одна из предыдущих к одной из последующих, так и все предыдущие <вместе> ко всем последующим.

Пусть несколько величин A, B, C, D, E, I пропорциональны: как A к B, так и C к D и E к I; я утверждаю, что будет как A к B, так и A, C, E к B, D, I (черт. 13).

Черт. 13.

Действительно, возьмём от A, C, E равнократные H, G, K, от B, D, I же какие угодно другие равнократные L, M, N.

И поскольку будет, что как A к B, так и C к D и E к I, и взяты от A, C, E равнократные H, G, K, от B, D, I же какие-нибудь другие равнократные L, M, N, то значит, если H превышает L, то и G превышает M, и K превышает N, и если равна, то равны, и если меньше, то меньше. Так что и если H превышает L, то и H, G, K, превышают L, M, N, и если равна, то равны, и если меньше, то меньше. И H, а также H, G, K будут равнократные от A и A, C, E, поскольку если будет несколько величин, равнократных каждая каждой каким-нибудь <другим, взятым> в равном количестве величинам, то сколько раз одна из <первых> величин будет кратна одной <из вторых>, столько же раз будут и все кратны всем (предложение 1). Вот вследствие того же и L и L, M, N будут равнокра-

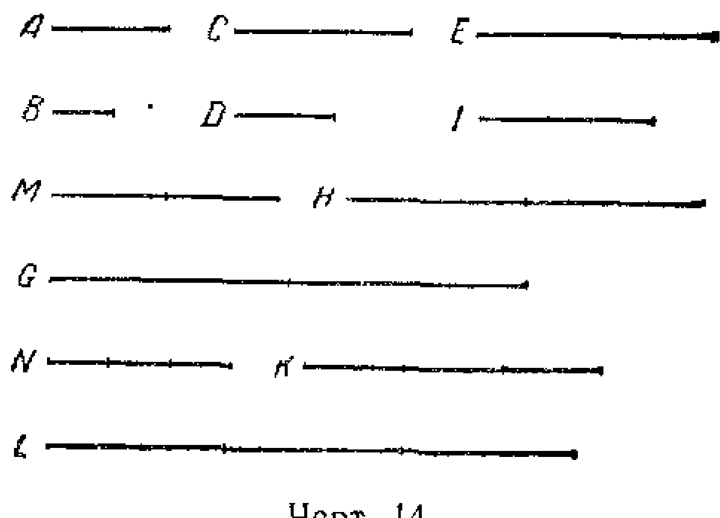
ны B и B, D, I; значит, будет, что как A к B, так и A, C, E к B, D, I.

Итак, если несколько величин пропорциональны, то будет, что как одна из предыдущих к одной из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим, что и требовалось доказать.

Предложение 13

Если первая ко второй имеет такое же отношение, как третья к четвёртой, а третья к четвёртой имеет отношение большее, чем пятая к шестой, то первая ко второй будет иметь большее отношение, чем пятая к шестой.

Пусть первая A ко второй B имеет такое же отношение, как третья C к четвёртой D, а третья C к четвёртой



Черт. 14.

D пусть имеет большее отношение, чем пятая E к шестой I (черт. 14). Я утверждаю, что и первая A ко второй B будет иметь большее отношение, чем пятая E к шестой I.

Действительно, поскольку существуют некоторые равнократные от C, E, а от D, I какие угодно другие равнократные, и кратное от C превышает кратное от D, кратное же от E не превышает кратного от I, то возьмём их, и пусть от C, E равнократные будут H, G, от D, I же какие угодно другие равнократные <пусть будут> K и L, так что H превышает K, G же не превышает L; и сколько

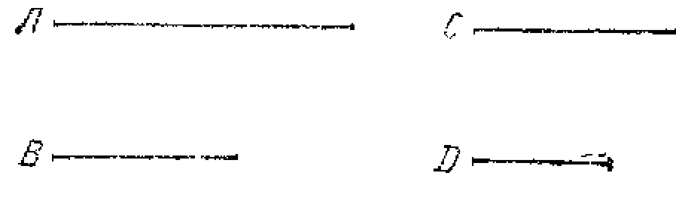
раз H кратно C, столько же раз пусть будет и M больше A, а сколько раз K кратно D, столько раз пусть будет и N кратно B.

И поскольку будет, что как A к B, так и C к D, и, взяты от A, C равнократные M, H, от B, D же какие угодно другие равнократные N, K, то значит, если M превышает N, то и H превышает K, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (определение 5). H же превышает K; значит, и M превышает N. G же не превышает L; и M, G суть равнократные от A, E, а N, L какие угодно другие равнократные от B, I; значит, A к B имеет большее отношение, чем E к I.

Значит, если первая ко второй имеет такое же отношение, как третья к четвёртой, а третья к четвёртой имеет отношение большее, чем пятая к шестой, то первая ко второй будет иметь большее отношение, чем пятая к шестой, что и требовалось доказать.

Предложение 14

Если первая ко второй имеет такое же отношение, как третья к четвёртой, и первая больше третьей, то и вторая будет больше четвёртой, если же равна, то равна, если же меньше, то меньше.



Черт. 15.

Пусть первая A ко второй B имеет такое же отношение, как третья C к четвёртой D, и пусть A будет больше C; я утверждаю, что и B больше D (черт. 15).

Действительно, поскольку A больше C и B ⟨есть⟩ какая-нибудь другая [величина], то значит, A имеет к B отношение большее, чем C к B (предложение 8). Как же A к B, так и C к D; и значит, C имеет к D отношение большее, чем C к B. Та же, к которой одно и то же

имеет большее отношение, будет меньше (предложение 10); значит, D меньше B; так что B больше D.

Подобно же вот докажем, что если A равно C, то и B будет равно D, и если A меньше C, то и B будет меньше D.

Значит, если первая ко второй имеет такое же отношение, как третья к четвёртой, и первая больше третьей, то и вторая будет больше четвёртой, если же равна, то равна, если же меньше, то меньше, что и требовалось доказать.

Предложение 15

Части к своим одинаковым кратным имеют то же самое отношение, если взять их соответственно друг другу).*

Пусть будут равнократны AB от C и DE от I; я утверждаю, что будет как C к I, так и AB к DE (черт. 16).

Черт. 16.

Действительно, поскольку равнократны AB от C и DE от I, то значит, сколько будет в AB величин равных C, столько же и в DE равных I. Разделим AB на равные C <части> AH, HG, GB, а DE на равные I <части> DK, KL, LE; вот количество AH, HG, GB будет равно количеству DK, KL, LE. И поскольку AH, HG, GB равны между собой, также и DK, KL, LE равны между собой, то значит, будет, что как AH к DK, так и HG к KL, и GB к LE (предложение 7). Значит, и будет, что как один из предыдущих к одному из последующих, так все предыдущие ко всем последующим (предложение 12); значит, будет, что как AH к DK, так и AB к DE. Но AH равна C, а DK равна I; значит, будет, что как C к I, так и AB к DE.

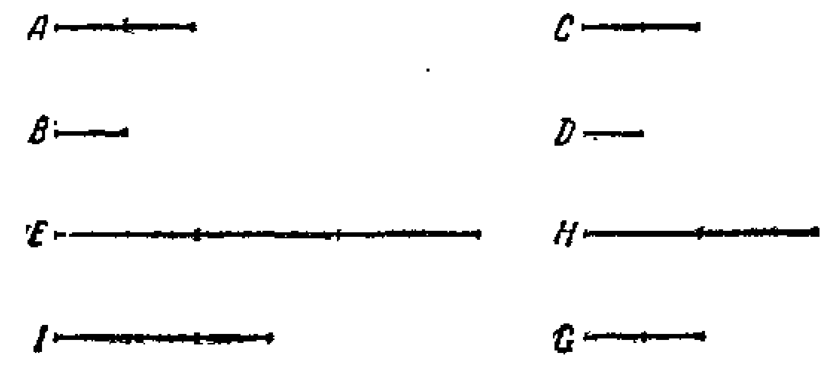
*) В подлиннике ληφθέντα κατάλληλα. Гейберг переводит suo ordine sumptae — взятые в своём порядке (т. е. в соответственном).

Значит, части к своим одинаковым кратным имеют то же самое отношение, если взять их соответственно друг другу, что и требовалось доказать.

Предложение 16

Если четыре величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и «переставляя».

Пусть четыре величины A, B, C, D пропорциональны, как A к B, так и C к D; я утверждаю, что они будут пропорциональны и «переставляя», как A к C, так и B к D (черт. 17).



Черт. 17.

Действительно, возьмём от A, B равнократные E, I, от C, D же какие-нибудь другие равнократные H, G.

И поскольку E от A и I от B равнократны, части же к своим одинаковым кратным имеют то же самое отношение (предложение 15), то значит, будет, что как A к B, так и E к I. Как же A к B, так и C к D; и значит, как C к D, так и E к I (предложение 11). Далее, поскольку H, G равнократны от C и D, то значит, будет, что как C к D, так и H к G (предложение 15). Как же C к D, так и E к I, и значит, как E к I, так и H к G. Если же четыре величины пропорциональны и первая больше третьей, то и вторая будет больше четвёртой, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (предложение 14). Значит, если E превышает H, то и I превышает G, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше. И E, I равнократные от A, B; H, G же какие-нибудь другие

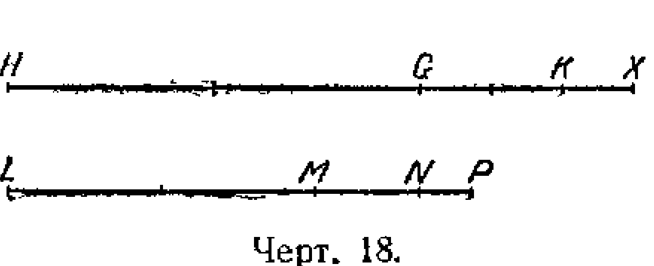
равнократные от C, D; значит, будет, что как A к C, так и B к D.

Значит, если четыре величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и «переставляя», что и требовалось доказать (17).

Предложение 17

Если «составляемые» величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и «выделенные».

Пусть «составляемые» величины AB, BE, CD, DI пропорциональны — как AB к BE, так и CD к DI; я утверждаю, что они будут пропорциональны и «выделенные» — как AE к EB, так и CI к DI.



Черт. 18.

Действительно, возьмём от AE, EB, CI, ID равнократные HG, GK, LM, MN; от EB, ID же другие какие-нибудь равнократные KX, NP (черт. 18).

И поскольку равнократны HG от AE и GK от EB, то значит, равнократны HG от AE и HK от AB (предложение 1). Равнократны же HG от AE и LM от CI; значит, равнократны HK от AB и LM от CI. Далее, поскольку равнократны LM от CI и MN от ID, то значит, равнократны LM от CI и LN от CD (предложение 1). Но равнократными были LM от CI и HK от AB; значит, равнократны HK от AB и LN от CD. Значит, HK, LN будут равнократными от AB, CD. Далее, поскольку равнократны GK от EB и MN от ID и KX такая же кратная от EB, как NP от ID, то и в «составлении» GX будет столько же раз кратна от EB, сколько и MP от ID (предложение 2). И поскольку будет, что как AB к BE, так и CD к DI, и взяты от AB, CD равнократные HK, LN, от EB, ID же равнократные GX, MP, то значит, если HK

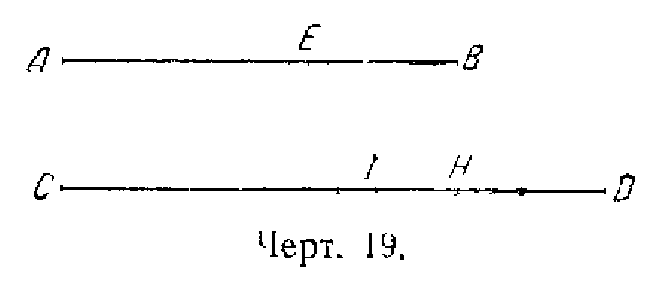
превышает GX, то и LN превышает MP, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (определение 5). Вот пусть HK превышает GX, и после отнятия общего GK, значит, и HG будет превышать KX. Но если HK превышало GX, то и LN превышало MP; значит, и LN превышает MP, и после отнятия общего MN и LM превышает NP; так что если HG превышает KX, то и LM превышает NP. Подобным же вот образом докажем, что и если HG равна KX, то и LM будет равна NP, и если меньше, то меньше. И HG, LM равнократные от AE, CI, а KX, NP какие-нибудь другие равнократные от EB, ID; значит, будет, что как AE к EB, так и CI к ID.

Значит, если величины пропорциональны «составляемые», то они будут пропорциональны и «выделенные», что и требовалось доказать.

Предложение 18

Если величины пропорциональны «выделяемые», то они будут пропорциональны и «составленные».

Пусть величины AE, EB, CI, ID пропорциональны «выделяемые» — как AE к EB, так и CI к ID; я утверждаю, что они будут пропорциональны и «составленные» — как AB к BE, так и CD к ID (черт. 19).



Черт. 19.

Действительно, если не будет как AB к BE, так и CD к DI, то будет, что как AB к BE, так и CD к чему-нибудь или меньшему DI или же к большему.

Пусть будет сперва к меньшему DH. И поскольку будет как AB к BE, так и CD к DH, то «составляемые» величины пропорциональны; так что они будут пропорциональны и «выделенные» (предложение 17). Значит, будет как AE к EB, так и CH к HD. Предполагается же, что и как AE к EB, так и CI к ID (предложение 11). И значит, как CH к HD, так и CI к ID. Первая же CH больше третьей CI; значит, и вторая HD больше четвёр-

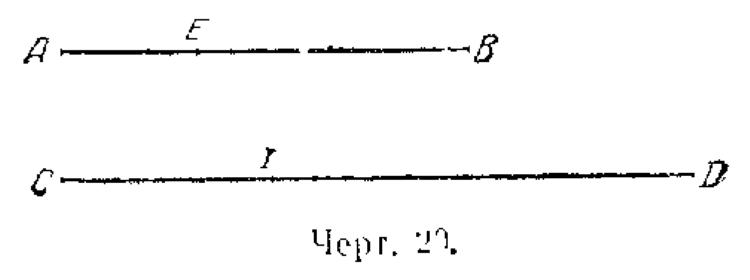
той ID. Но она и меньше, что невозможно; значит, не будет, что как AB к BE, так и CD к меньшей чем ID. Подобным же вот образом докажем, что и не к большей; значит, к той же самой.

Значит, если величины пропорциональны «выделяемые», то они будут пропорциональны и «составленные», что и требовалось доказать (18).

Предложение 19

Если как целая к целой, так и отнятая к отнятой, то и остаток к остатку будет как целая к целой.

Пусть будет как целая AB к целой CD, так и отнятая AE к отнятой CI; я утверждаю, что и остаток EB к остатку ID будет как целая AB к целой CD (черт. 20).



Черт. 20.

Действительно, поскольку будет, что как AB к CD, так и AE к CI, то и «переставляя» как BA к AE, так и DC к CI (предложение 16). И поскольку «составляемые» величины пропорциональны (предложение 17), то они будут пропорциональны и «выделенные» — как BE к EA, так и DI к CI (предложение 18); и «переставляя» как BE к DI, так и EA к IC. Как же AE к CI, так предполагается и целая AB к целой CD. И значит, остаток EB к остатку ID будет как целая AB к целой CD.

Значит, если как целая к целой, так и отнятая к отнятой, то и остаток к остатку будет как целая к целой, [что и требовалось доказать].

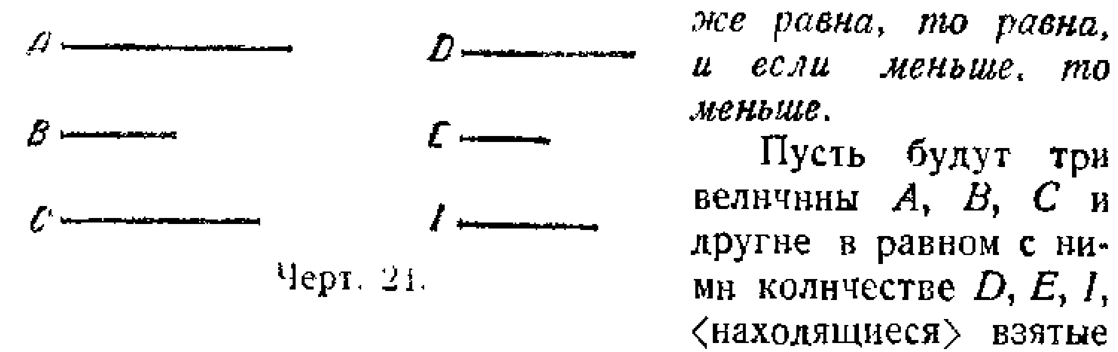
[И поскольку доказано, что как AB к CD, так и EB к ID, и «переставляя» как AB к BE, так и CD к ID, значит, «составляемые» величины пропорциональны; доказано же, что как BA к AE, так и DC к CI; и это будет «переворачивая».]

Следствие

Вот из этого очевидно, что если «составляемые» величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и «переворачивая», что и требовалось доказать (19).

Предложение 20

Если будут три величины и другие в равном с ними количестве, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, и «по равенству» первая больше третьей, то и четвёртая будет больше шестой, если же равна, то равна, и если меньше, то меньше.



Черт. 21.

Пусть будут три величины A, B, C и другие в равном с ними количестве D, E, I, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, ⟨именно⟩ как A к B, так и D к E, как же B к C, так и E к I, и пусть «по равенству» A будет больше C; я утверждаю, что и D будет больше I, если же равна, то равна, и если меньше, то меньше (черт. 21).

Действительно, поскольку A больше C и B какая-то другая ⟨величина⟩, большая же имеет к тому же большее отношение, чем меньшая (предложение 8), то значит, A имеет к B отношение большее, чем C к B. Но как A к B, [так] и D к E, как же C к B, так «обращая» (предложение 7, следствие) и I к E; и значит, D имеет к E отношение большее, чем I к E. Из имеющих же отношение к одному и тому же будет больше та, которая имеет большее отношение (предложение 10). Значит, D больше I. Подобным же вот образом докажем, что и если A равна C, то будет и D равна I, и если меньше, то меньше.

Значит, если будут три величины и другие в равном с ними количестве, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в од-

ном и том же отношении, и «по равенству» первая больше третьей, то и четвёртая будет больше шестой, если же равна, то равна, и если меньше, то меньше, что и требовалось доказать (20).

Предложение 21

Если будут три величины и другие в равном с ними количестве, <находящиеся> взятые попарно в одном и том же отношении, и для них имеет место перемешанная пропорция, «по равенству» же первая больше третьей, то и четвёртая будет больше шестой, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше.

Черт. 22.

Пусть будут три величины A, B, C и другие в равном с ними количестве D, E, I, <находящиеся> взятые попарно в одном и том же отношении, и пусть для них имеет место перемешанная пропорция, <именно> как A к B, так и E к I, как же B к C, так и D к E, «по равенству» же пусть A больше C; я утверждаю, что и D будет больше I, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (черт. 22).

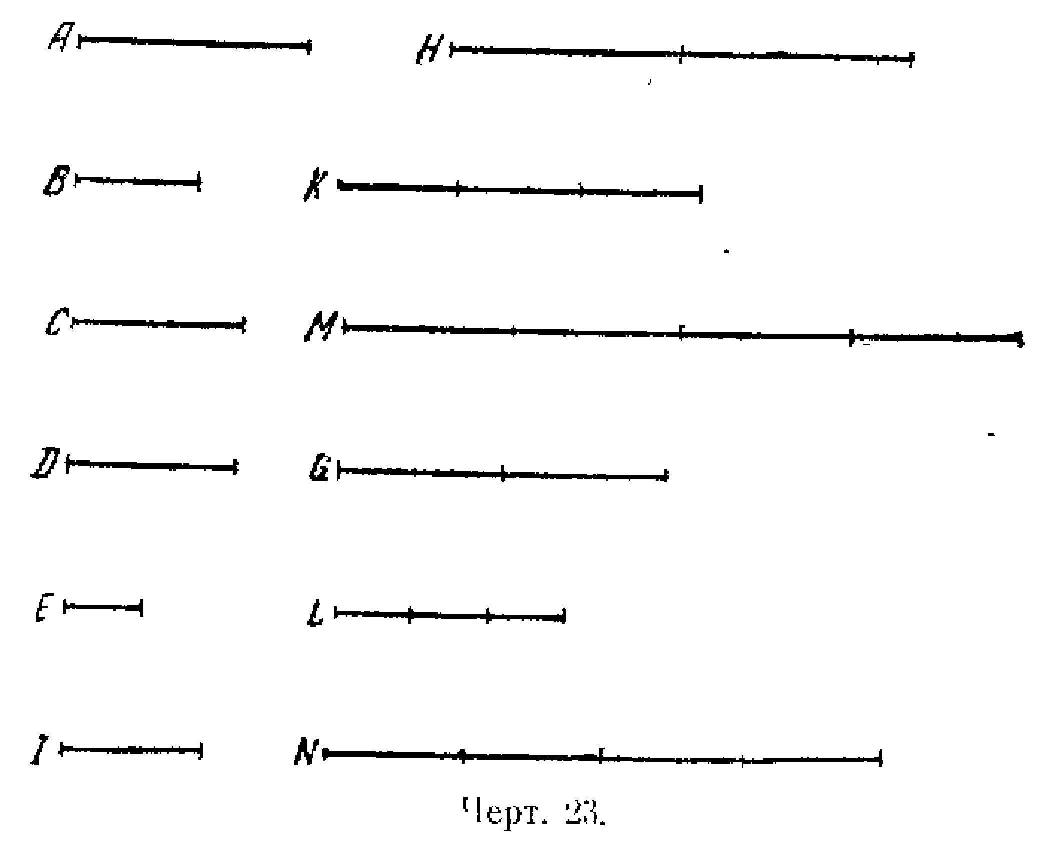
Действительно, поскольку A больше C и B какая-то другая величина, то значит, A имеет к B отношение большее, чем C к B. Но как A к B, так и E к I, как же C к B, так «обращая» и D к E. И значит, E имеет к I отношение большее, чем E к D. Та же, к которой одно и то же имеет большее отношение, будет меньше; значит, I меньше D; значит, D больше I. Подобным же вот образом докажем, что если A равна C, то будет и D равна I, и если меньше, то меньше.

Значит, если будут три величины и другие в равном с ними количестве, <находящиеся> взятые попарно в одном и том же отношении, и для них имеет место перемешанная пропорция, «по равенству» же первая больше

третьей, то и четвёртая будет больше шестой, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше, что и требовалось доказать.

Предложение 22

Если будут несколько величин и другие в равном с ними количестве, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, то и «по равенству» они будут в одном и том же отношении.



Черт. 23.

Пусть будут несколько величин A, B, C и другие в равном с ними количестве D, E, I, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении — как A к B, так и D к E, как же B к C, так и E к I; я утверждаю, что и «по равенству» они будут в одном и том же отношении (черт. 23).

Действительно, возьмём от A, D равнократные H, G, от B, E же какие-нибудь другие равнократные K, L и затем от C, I какие-то другие равнократные M, N.

И поскольку будет, что как A к B, так и D к E, и взяты от A, D равнократные H, G, от B, E же какие-ни-

будь другие равнократные *K*, *L*, то значит, будет, что как *H* к *K*, так и *G* к *L* (предложение 4). Вследствие того же вот и как *K* к *M*, так и *L* к *N*. Поскольку теперь будут три величины *H*, *K*, *M* и другие в равном с ними количестве *G*, *L*, *M*, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, то значит, «по равенству», если *H* превышает *M*, то и *G* превышает *N*, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (предложение 20). И *H*, *G* суть равнократные от *A*, *D*, *M*, *N* же какие-нибудь другие равнократные от *C*, *I*; значит, будет, что как *A* к *C*, так и *D* к *I* (определение 5).

Значит, если будут несколько величин и другие в равном с ними количестве, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, то и «по равенству» они будут в одном и том же отношении, что и требовалось доказать.

Предложение 23

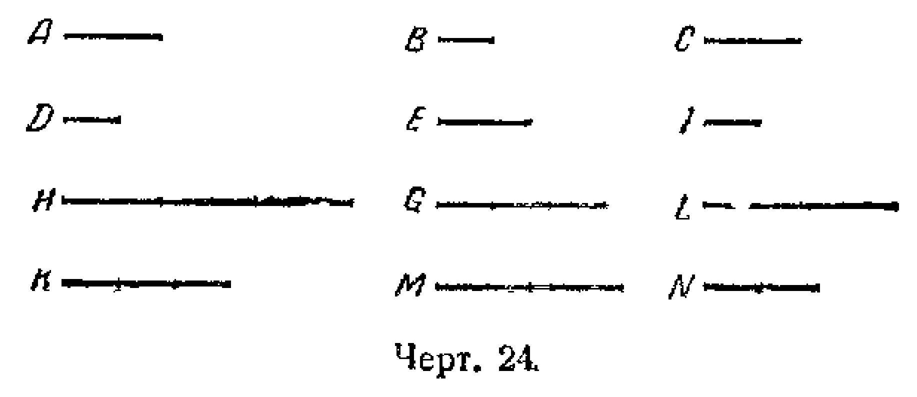
Если будут три величины и другие в равном с ними количестве, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, и для них имеет место перемешанная пропорция, то и «по равенству» они будут в одном и том же отношении.

Пусть будут три величины *A*, *B*, *C* и другие в равном с ними количестве *D*, *E*, *I*, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, и пусть для них будет иметь место перемешанная пропорция — как *A* к *B*, так и *E* к *I*, как же *B* к *C*, так и *D* к *E*. Я утверждаю, что будет как *A* к *C*, так и *D* к *I* (черт. 24).

Возьмём от *A*, *B*, *D* равнократные *H*, *G*, *K*, а от *C*, *E*, *I* какие-нибудь другие равнократные *L*, *M*, *N*.

И поскольку *H*, *G* суть равнократные от *A*, *B*, части же к своим одинаковым кратным имеют то же самое отношение, то значит, будет, что как *A* к *B*, так и *H* к *G* (предложение 15). Вследствие того же вот и как *F* к *I*, так и *M* к *N*; и будет, что как *A* к *B*, так и *E* к *I*; и значит, как *H* к *G*, так и *M* к *N* (предложение 11). И поскольку будет, что как *B* к *C*, так и *D* к *E*, и «переставляя» как *B* к *D*, так *C* к *E* (предложение 16),

И поскольку G, K суть равнократные от B, D, части же к своим равнократным имеют то же самое отношение, то значит, будет, что как B к D, так и G к K (предложение 15). Но как B к D, так и C к E; и значит, как G к K, так и C к E (предложение 11). Далее, поскольку L, M суть равнократные от C, E, то значит, будет, что как C к E, так и L к M (предложение 15). Но как C к E, так и G к K; и значит, как G к K, так и L к M (предложение 11),



Черт. 24.

и «переставляя» как G к L, так и K к M. Доказано же, что и как H к G, так и M к N. Поскольку теперь будут три величины H, G, L и другие в равном с ними количестве K, M, N, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, и для них имеет место перемешанная пропорция (определение 18), то значит, «по равенству», если H превышает L, то и K превышает N, и если равна, то равна, и если меньше, то меньше (предложение 21). И H, K суть равнократные от A, B, а L, N от C, I. Значит, будет, что как A к C, так и D к I (опр. 5).

Значит, если будут три величины и другие в равном с ними количестве, ⟨находящиеся⟩ взятые попарно в одном и том же отношении, и для них имеет место перемешанная пропорция, то и «по равенству» они будут в одном и том же отношении, что и требовалось доказать.

Предложение 24

Если первая имеет ко второй такое же отношение, как и третья к четвёртой, и пятая ко второй имеет такое же отношение, как и шестая к четвёртой, то составленные первая и пятая ко второй будут иметь

такое же отношение, что и третья и шестая к четвёртой.

Пусть первая AB имеет ко второй C такое же отношение, как и третья DE к четвёртой I, пусть также и пятая BH ко второй C имеет такое же отношение, как и шестая EG к четвёртой I; я утверждаю, что и составленные первая и пятая AH ко второй C будут иметь такое же отношение, что и третья и шестая DG к четвёртой I (черт. 25).

Действительно, поскольку будет, что как BH к C, так и EG к I, то значит, «обращая» (предложение 7, следствие), как C к BH, так и I к EG. Поскольку теперь будет, что как AB к C, так и DE к I, как же C к BH, так и I к EG, то значит, «по равенству» будет, что как AB к BH, так и DE к EG (предложение 22). И поскольку «выделяемые» величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и «составленные» (предложение 18); значит, будет, что как AH к HB, так и DG к GE. И будет также, что как BH к C, так и EG к I; значит, «по равенству» будет, что как AH к C, так и DG к I (предложение 22).

Черт. 25.

Значит, если первая имеет ко второй такое же отношение, как и третья к четвёртой, и пятая ко второй имеет такое же отношение, как и шестая к четвёртой, то составленные первая и пятая ко второй будут иметь такое же отношение, что и третья и шестая к четвёртой, что и требовалось доказать (21).

Предложение 25

Если четыре величины пропорциональны, то наибольшая [из них] и наименьшая больше двух остающихся.

Пусть будут четыре величины AB, CD, E, I пропорциональные — как AB к CD, так и E к I, и пусть наи-

большая из них будет *AB*, а наименьшая *I*; я утверждаю, что *AB*, *I* ⟨вместе⟩ больше *CD*, *E* (черт. 26).

Действительно, отложим *AH*, равную *E* и *CG*, равную *I*.

Поскольку [теперь] будет, что как *AB* к *CD*, так и *E* к *I*, и *E* равна *AH*, *I* же *CG*, то значит, будет, что как *AB* к *CD*, так и *AH* к *CG*. И поскольку будет, что как целая *AB* к целой *CD*, так и отнятая *AH* к отнятой *CG*, то значит, и остаток *HB* к остатку *GD* будет как целая *AB* к целой *CD* (предложение 19). *AB* же больше *CD*; значит, и *HB* больше *GD*. И поскольку *AH* равна *E*, а *CG* ⟨равна⟩ *I*, то значит, *AH*, *I* ⟨вместе⟩ равны *CG*, *E*. И [поскольку] если [к неравным прибавляются равные, то целые будут неравными, значит, если] при наличии неравных *HB*, *GD* и *HB* большем, к *HB* прибавляются *AH*, *I*, к *GD* же прибавляются *CG*, *E*, то выходит, что *AB*, *I* ⟨вместе⟩ больше *CD*, *E*.

Черт. 26.

Значит, если четыре величины пропорциональны, то наибольшая из них и наименьшая больше двух остающихся, что и требовалось доказать (22).



КНИГА ШЕСТАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Подобные прямолинейные фигуры* суть те, которые имеют углы равные по порядку *) и стороны при равных углах пропорциональные.

2. [*Обратно-сопряжённые* фигуры суть те, в каждой из которых имеются предыдущие и последующие отношения.] **).

3. Говорится, что *прямая делится в крайнем и среднем отношении*, если, как целая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему.

4. *Высота* всякой фигуры есть перпендикуляр, проведённый от вершины к основанию (1).

---

*) У Евклида *κατὰ μίαν* — буквально «по одному».

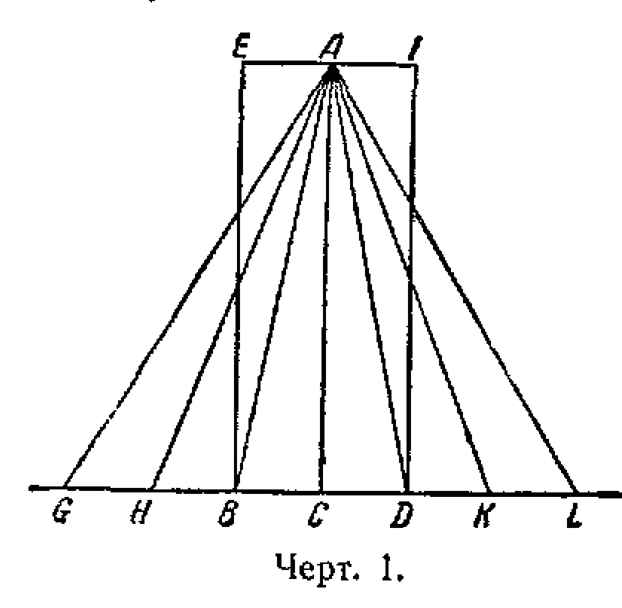
**) Второе определение Гейберг заключает в квадратные скобки *как неподлинное; действительно*, это определение, *во-первых*, страдает неясностью, во-вторых, нигде у Евклида не употребляется. Ἀντιπεπονθότα σχήματα — буквально «обратнопропорциональные» фигуры. Может быть, под ними следует подразумевать равновеликие параллелограммы и треугольники, в которых высоты обратно пропорциональны основаниям; однако в предложениях 14 и 15, где речь идёт о равновеликих параллелограммах, Евклид рассматриваемым определением *не пользуется*. Мысль здесь та, что если линиям a и b в одной фигуре A отвечают a' и b', в другой A', то $a:b = b':a'$, т. е. на месте предыдущего a в A будет в A' стоять последующее b', на месте же последующего — предыдущее. Следует ἡγούμενος λόγος (предыдущее отношение) мыслить λόγος τοῦ ἡγουμένου — отношение предыдущего (подразумевается к последующему), а ἑπόμενος λόγος (последующее отношение) понимать как λόγος τοῦ ἑπομένου — отношение последующего (к предыдущему).

5. [Говорится, что отношение *составляется* из отношений, когда количества этих отношений, перемноженные между собой *), образуют нечто] (2, 3, 4).

Предложение 1

Треугольники и параллелограммы, находящиеся под одной и той же высотой, ⟨относятся⟩ друг к другу как основания.

Пусть треугольники будут *ABC*, *ACD*, параллелограммы же *EC*, *CI* под одной и той же высотой *AC*; я утверждаю, что будет: как основание *BC* к основанию *CD*, так и треугольник *ABC* к треугольнику *ACD* и параллелограмм *EC* к параллелограмму *CI* (черт. 1).



Черт. 1.

Действительно, продолжим *BD* в обе стороны до точек *G*, *L*, отложим [сколько угодно] ⟨прямых⟩ *BH*, *HG*, равных основанию *BC*, и сколько угодно ⟨прямых⟩ *DK*, *KL*, равных основанию *CD*, и соединим *AH*, *AG*, *AK*, *AL*.

И поскольку *CB*, *BH*, *HG* равны между собой, будут равны между собой и треугольники *AGH*, *AHB*, *ABC* (предложение 38 книги I). Значит, каким кратным основание *GC* будет от основания *BC*, таким же кратным и треугольник *AGC* будет от треугольника *ABC*. Вследствие того же

---

*) У Евклида ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, что совершенно точно передаётся словами «помноженные друг на друга». То обстоятельство, что Евклид никогда не рассматривает отношение как число, конечно, является одним из серьёзнейших возражений против принадлежности Евклиду этого определения, подлинность которого оспаривается Гейбергом, Хизсом и др. исследователями и которое не содержится в тексте лучших манускриптов Евклида.

вот, каким кратным основание LC будет от основания CD, таким же кратным будет и треугольник ALC от треугольника ACD; и если основание GC равно основанию CL, то равен и треугольник AGC треугольнику ACL (предложение 38 книги I), и если основание GC превосходит основание CL, то и треугольник AGC превосходит треугольник ACL, и если меньше, то меньше. Вот для четырёх имеющихся величин: двух оснований BC, CD и двух треугольников ABC, ACD, взяты от основания BC и треугольника ABC одинаковые кратные — основание GC и треугольник AGC, а от основания CD и треугольника ADC какие угодно другие одинаковые кратные — основание LC и треугольник ALC; и доказано, что если основание GC превосходит основание CL, то и треугольник AGC превосходит треугольник ALC, а если равно, то равен, если же меньше, то меньше; значит, будет, что как основание BC к основанию CD, так и треугольник ABC к треугольнику ACD (определение 5 книги V).

И поскольку удвоенный треугольник ABC есть параллелограмм EC, а удвоенный треугольник ACD есть параллелограмм IC (предложение 34 книги I), части же их и одинаковые кратные имеют то же отношение (предложение 15 книги V), то значит, будет, что как треугольник ABC к треугольнику ACD, так и параллелограмм EC к параллелограмму CI. Теперь, поскольку доказано, что как основание BC к CD, так и треугольник ABC к треугольнику ACD, как же треугольник ABC к треугольнику ACD, так и параллелограмм EC к параллелограмму CI, значит, как основание BC к основанию CD, так и параллелограмм EC к параллелограмму CI (предложение 11 книги V).

Значит, треугольники и параллелограммы, находящиеся под одной и той же высотой, ⟨относятся⟩ друг к другу как основания, что и требовалось доказать (5).

Предложение 2

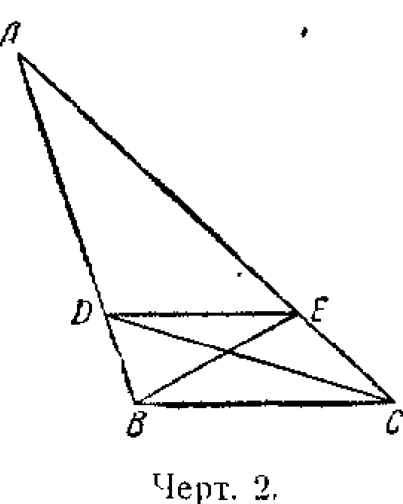
Если в треугольнике параллельно одной из сторон проведена некоторая прямая, то она пропорционально рассекает стороны треугольника; и если стороны

треугольника рассечены пропорционально, то прямая, соединяющая сечения, будет параллельна остающейся стороне треугольника.

Пусть в треугольнике ABC параллельно одной из сторон BC проведена DE; я утверждаю, что будет как BD к DA, так и CE к EA (черт. 2).

Действительно, соединим BE и CD.

Значит, треугольник BDE равен треугольнику CDE, ибо они на одном и том же основании DE и между одними и теми же параллельными DE и BC (предложение 38 книги I); что-то другое же треугольник ADE. Равные же к одному и тому же имеют то же отношение (предложение 7 книги V); значит, будет, что как треугольник BDE к [треугольнику] ADE, так и треугольник CDE к треугольнику ADE. Но как треугольник BDE к ADE, так и BD к DA, ибо они, находящиеся под одной и той же высотой, той, которая проведена из E перпендикулярно к AB, ⟨относятся⟩ между собой как основания (предложение 1). Вследствие того же вот как треугольник CDE к ADE, так и CE к EA; и значит, как BD к DA, так и CE к EA (предложение 11 книги V).



Черт. 2.

Но вот пусть в треугольнике ABC стороны AB, AC рассекаются пропорционально как BD к DA, так и CE к EA; соединим DE; я утверждаю, что DE параллельна BC.

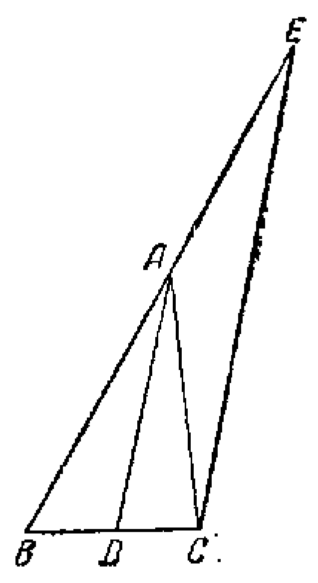
Действительно, после выполнения тех же самых построений, поскольку будет, что как BD к DA, так и CE к EA, но как BD к DA, так и треугольник BDE к треугольнику ADE, как же CE к EA, так и треугольник CDE к треугольнику ADE (предложение I), и значит, как треугольник BDE к треугольнику ADE, так и треугольник CDE к треугольнику ADE (предложение 11 книги V). Значит, каждый из треугольников BDE, CDE имеет к ADE то

же отношение. Значит, треугольник BDE равен треугольнику CDE (предложение 9 книги V); и они на том же основании DE. Равные же треугольники, находящиеся на одном и том же основании, находятся и между одними и теми же параллельными (предложение 39 книги I). Значит, DE параллельна BC.

Значит, если в треугольнике параллельно одной из сторон проведена некоторая прямая, то она пропорционально рассекает стороны треугольника, и если стороны треугольника рассечены пропорционально, то прямая, соединяющая сечения, будет параллельна остающейся стороне треугольника, что и требовалось доказать (6, 7, 8).

Предложение 3

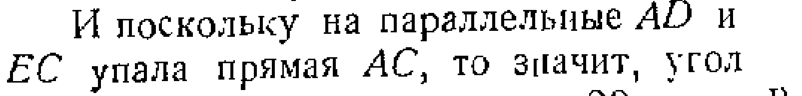
Если угол треугольника рассечён пополам и секущая угол прямая рассекает и основание, то отрезки основания будут иметь то же отношение, что остальные стороны треугольника; и если отрезки основания имеют то же отношение, что остальные стороны треугольника, то прямая соединяющая, ⟨проведённая⟩ от вершины к точке сечения, рассекает пополам угол треугольника.

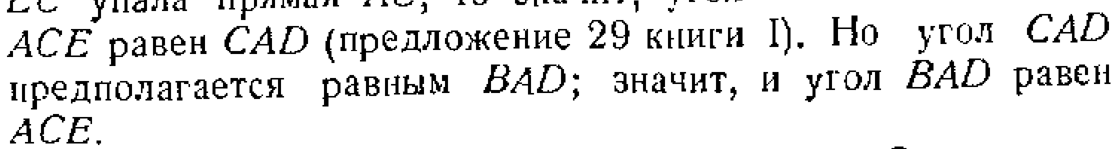


Черт. 3.

Пусть треугольник будет ABC и пусть угол BAC рассечён пополам прямой AD (черт. 3); я утверждаю, что будет как BD к CD, так и BA к AC.

Действительно, через C параллельно DA проведём CE и пусть продолженная BA встречает её в E.


И поскольку на параллельные AD и EC упала прямая AC, то значит, угол


ACE равен CAD (предложение 29 книги I). Но угол CAD предполагается равным BAD; значит, и угол BAD равен ACE.

Далее, поскольку на параллельные AD, EC упала прямая BAE, то внешний угол BAD равен внутреннему AEC.

Доказано же, что и угол ACE равен BAD; и значит, угол ACE равен *AEC*; так что и сторона *AE* равна стороне *AC* (предложение 6 книги I). И поскольку в треугольнике *BCE* параллельно одной из сторон *EC* проведена *AD*, то значит, будет пропорция — как *BD* к *DC*, так и *BA* к *AE* (предложение 2). Но *AE* равна *AC*; значит, как *BD* к *DC*, так и *BA* к *AC*.

Но вот пусть будет, что как *BD* к *DC*, так и *BA* к *AC*; соединим *AD*; я утверждаю, что угол *BAC* делится пополам прямой *AD*.

Действительно, при тех же построениях, поскольку будет, что как *BD* к *DC*, так и *BA* к *AC*, но как *BD* к *DC*, так будет и *BA* к *AE*, ибо в треугольнике *BCE* параллельно одной ⟨стороне⟩ *EC* проведена *AD*; и значит (предложение 2), как *BA* к *AC*, так и *BA* к *AE* (предложение 11 книги V). Значит, *AC* равна *AE* (предложение 9 книги V); так что и угол *AEC* равен *ACE* (предложение 5 книги I). Но угол *AEC* равен внешнему *BAD* (предложение 29 книги I), угол же *ACE* накрестлежащему *CAD*; и значит, угол *BAD* равен *CAD*. Значит, угол *BAC* рассечётся прямой *AD* пополам.

Значит, если угол треугольника рассечён пополам и секущая угол прямая также рассекает и основание, то отрезки основания будут иметь то же отношение, что остальные стороны треугольника; и если отрезки основания имеют то же отношение, что остальные стороны треугольника, то соединительная прямая, ⟨проведённая⟩ от вершины к точке сечения, рассекает пополам угол треугольника, что и требовалось доказать (9, 10).

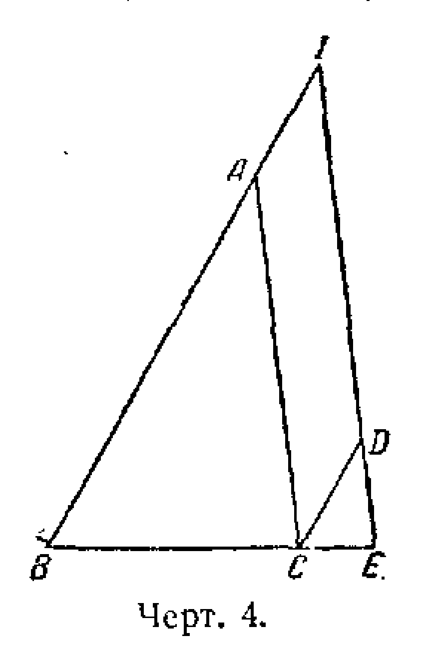
Предложение 4

В равноугольных треугольниках **стороны** *при равных углах пропорциональны и* **соответственными** **) ⟨будут⟩ стягивающие равные углы.*

*) У Евклида ὁμόλογοι — одинаковые по отношению, с тем же самым отношением.

Пусть равноугольные треугольники будут *ABC*, *DCE*, имеющие равными угол *ABC* углу *DCE*, угол же *BAC* углу *CDE* и затем угол *ACB* углу *CED* (черт. 4); я утверждаю, что в треугольниках *ABC*, *DCE* стороны при равных углах пропорциональны и соответственными ⟨ будут ⟩ стягивающие равные углы.

Действительно, поместим *BC* на одной прямой с *CE*. И поскольку углы *ABC* и *ACB* ⟨ вместе ⟩ меньше двух прямых (предложение 17 книги I), угол же *ACB* равен *DEC*, то значит, *ABC* и *DEC* ⟨ вместе ⟩ меньше двух прямых; значит, *BA* и *ED* при продолжении сойдутся (постулат 5 книги I). Продолжим их и пусть они сойдутся в *I*.



Черт. 4.

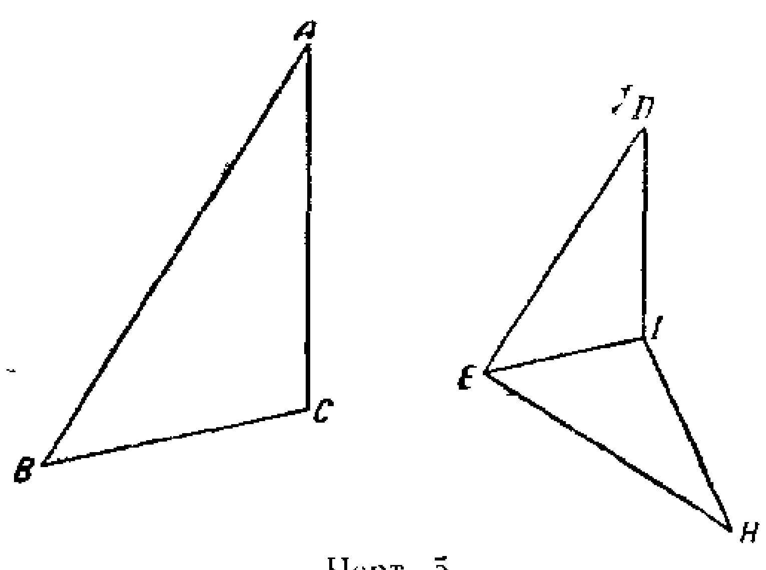
И поскольку угол *DCE* равен *ABC*, прямая *BI* параллельна *CD* (предложение 28 книги I). Далее, поскольку угол *ACB* равен *DEC*, прямая *AC* параллельна *IE*. Значит, *IACD* параллелограмм; значит, *IA* равна *DC*, *AC* же равна *ID* (предложение 34 книги I). И поскольку в треугольнике *IBE* параллельно одной ⟨ из сторон ⟩ *IE* проведена *AC*, будет, значит, что как *BA* к *AI*, так и *BC* к *CE*. Но *AI* равна *CD*; значит, как *BA* к *CD*, так и *BC* к *CE*, и «переставляя» (предложение 16 книги V), как *AB* к *BC*, так и *DC* к *CE*. Далее, поскольку *CD* параллельна *BI*, будет, что как *BC* к *CE*, так и *ID* к *DE* (предложение 2). Но *ID* равна *AC*; значит, как *BC* к *CE*, так и *AC* к *DE*, и «переставляя» (предложение 16 книги V), как *BC* к *CA*, так и *CE* к *ED*. Поскольку теперь доказано, что как *BA* к *BC*, так и *DC* к *CE*, как же *BC* к *CA*, так и *CE* к *ED*; значит, «по равенству» как *BA* к *AC*, так и *CD* к *DE* (предложение 22 книги V).

Значит, в равноугольных треугольниках стороны при равных углах пропорциональны и соответственны ⟨ стороны ⟩, стягивающие равные углы, что и требовалось доказать (11).

Предложение 5

Если два треугольника имеют стороны пропорциональные, то треугольники будут равноугольные и будут иметь равными углы, которые стягиваются соответственными сторонами.

Пусть будут два треугольника *ABC*, *DEI*, имеющие стороны пропорциональные, так что как *AB* к *BC*, так



Черт. 5.

и *DE* к *EI*, как же *BC* к *CA*, так и *EI* к *ID*, и ещё как *BA* к *CA*, так и *ED* к *DI*. Я утверждаю, что треугольник *ABC* равноуголен треугольнику *DEI* и что они будут иметь равными углы, которые стягиваются соответственными сторонами, т. е. угол *ABC* углу *DEI*, угол *BCA* углу *EID* и ещё угол *BAC* углу *EDI* (черт. 5).

Действительно, на прямой *EI* при её точках *E*, *I* построим угол *IEH*, равный *ABC*, и угол *EIH*, равный *ACB* (предложение 23 книги I); значит, остающийся угол при *A* равен остающемуся углу при *H* (предложение 32 книги I).

Значит, треугольник *ABC* равноуголен [треугольнику] *EHI*. Значит, в треугольниках *ABC*, *EHI* стороны при равных углах пропорциональны и соответственны стягивающие равные углы (предложение 4); значит, будет, что как *AB* к *BC*, [так] и *HE* к *EI*. Но как *AB* к *BC*, так по предположению и *DE* к *EI*; значит, как *DE* к *EI*, так и *HE*

к EI (предложение 11 книги V). Значит, каждая из DE, HE имеет к EI то же отношение; значит, DE равна HE (предложение 9 книги V). Вследствие того же вот и DI равна HI. Поскольку теперь DE равна EH, EI же общая, то вот две <прямые> DE, EI равны двум HE, EI; и основание DI равно основанию IH; значит, угол DEI равен углу HEI (предложение 8 книги I), и треугольник DEI равен треугольнику HEI, и остальные углы равны остальным, стягиваемые равными сторонами (предложение 4 книги I). Значит, угол DIE равен углу HIE, угол же EDI углу EHI. И поскольку угол IED равен углу HEI, а угол HEI углу ABC, то значит, угол ABC равен DEI. Вследствие того же вот и угол ACB равен углу DIE и затем *угол при A равен углу при D; значит*, треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI.

Значит, если два треугольника имеют стороны пропорциональные, то треугольники будут равноугольны и будут иметь равными углы, которые стягиваются соответственными сторонами, что и требовалось доказать.

Предложение 6

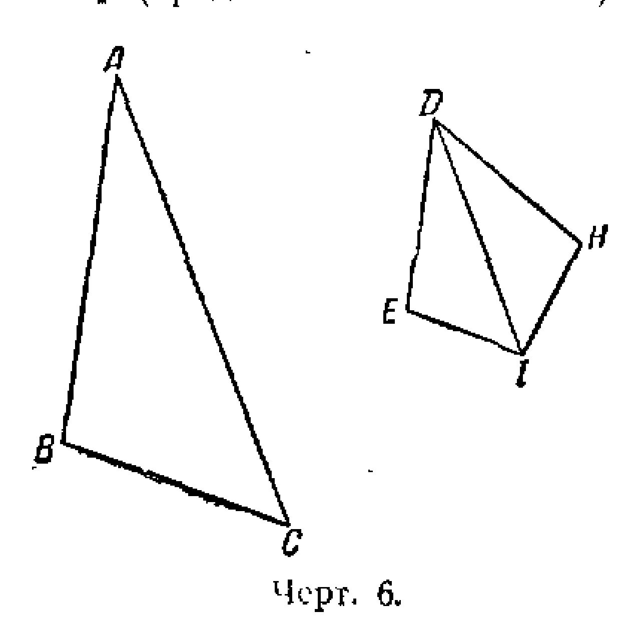
Если два треугольника имеют один угол, равный одному углу, и стороны при равных углах пропорциональные, то треугольники будут равноугольны и будут иметь равными углы, стягиваемые соответственными сторонами.

Пусть будут два треугольника ABC, DEI, имеющие один угол BAC, равный одному углу EDI, стороны же при равных углах пропорциональные: как BA к AC, так и ED к DI; я утверждаю, что треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI и будет иметь угол ABC равным углу DEI, угол же ACB равным DIE (черт. 6).

Действительно, на прямой DI и при её точках D, I построим угол IDH, равный каждому из углов BAC, EDI, и угол DIH, равный ACB (предложение 23 книги I); значит, остающийся угол при B равен остающемуся при H (предложение 32 книги I).

Значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику DHI. Значит, будет пропорция — как BA к AC, так и HD

к DI (предложение 4). Предполагается же, что и как BA к AC, так и ED к DI; и значит, как ED к DI, так и HD к DI (предложение 11 книги V). Значит, ED равна DH; и DI (предложение 9 книги V) общая; вот две ⟨прямые⟩ ED, DI равны двум HD, DI; и угол EDI равен углу HDI; значит, основание EI равно основанию HI и треугольник EDI равен треугольнику HDI и остальные углы равны остальным, стягиваемым равными сторонами (предложение 4 книги I). Значит, угол DIH равен углу DIE, угол же DHI углу DEI. Но угол DIH равен углу ACB, и, значит, угол ACB равен углу DIE. Предполагается же, что и угол BAC равен углу EDI; и значит, остающийся угол при B равен остающемуся при E (предложение 32 книги I); значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI.



Черт. 6.

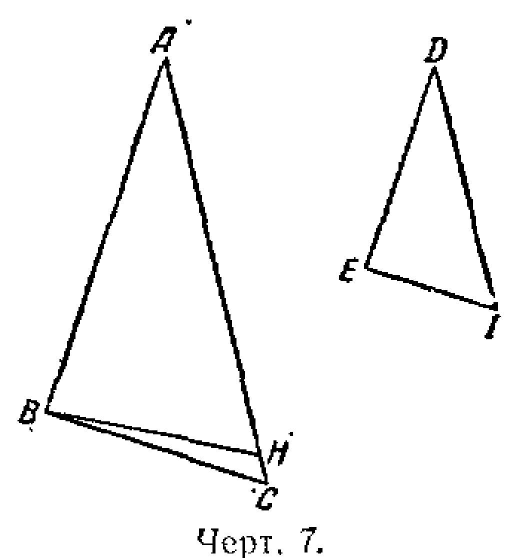
Значит, если два треугольника имеют один угол, равный одному углу, и стороны при равных углах пропорциональные, то треугольники будут равноугольны и будут иметь равными углы, стягиваемые соответственными сторонами, что и требовалось доказать.

Предложение 7

Если два треугольника имеют один угол, равный одному углу, при других же углах стороны пропорциональные, причём из остальных углов каждый одновременно или меньше или не меньше прямого, то треугольники будут равноугольны и будут иметь равными те углы, при которых стороны пропорциональны.

Пусть будут два треугольника ABC, DEI, имеющие один угол, равный одному углу, ⟨а именно⟩ угол BAC

углу EDI (черт. 7), при других же углах стороны пропорциональные, как AB к BC, так и DE к EI, причём из остальных углов при C и I каждый одновременно сперва пусть будет меньше прямого; я утверждаю, что треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI, и угол ABC будет равен DEI, и остающийся угол при C равен остающемуся углу при I.



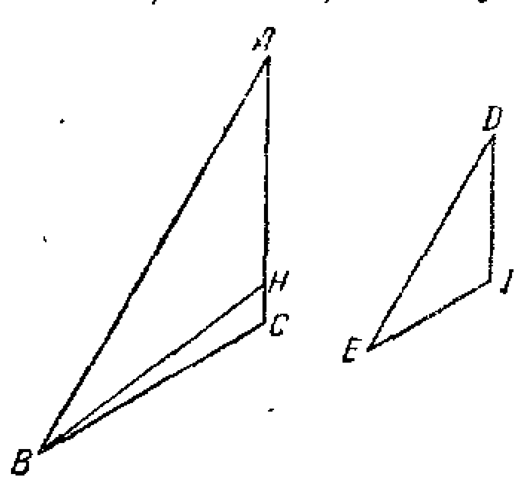
Черт. 7.

Действительно, если угол ABC не равен DEI, то один из них больше. Пусть будет больше угол ABC. Построим на прямой AB при её точке B угол ABH, равный DEI (предложение 23 книги I).

И поскольку угол A равен D, угол же ABH углу DEI, то значит, остающийся угол AHB равен остающемуся DIE. Значит, треугольник ABH равноуголен треугольнику DEI. Значит, будет, что как AB к BH, так и DE к EI (предложение 4). Как же DE к EI, [так] по предположению AB к BC; значит, AB к каждой из BC, BH имеет то же отношение (предложение 11 книги V); значит, BC равна BH (предложение 9 книги V). Так что и угол при C равен углу BHC (предложение 5 книги I). Угол же при C по предположению меньше прямого; значит, и угол BHC меньше прямого; так что смежный ему угол AHB больше прямого (предложение 13 книги I). И доказано, что он равен углу при I; и значит, угол при I больше прямого. По предположению же он меньше прямого, что нелепо. Значит, угол ABC не будет не равным углу DEI; значит, он равен. И угол при A равен углу при D; и значит, остающийся угол при C равен остающемуся углу при I (предложение 32 книги I). Значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI.

Но вот предположим далее, что каждый из углов при C, I не меньше прямого; я снова утверждаю, что и так треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI.

Действительно, после тех же построений подобным же образом докажем, что BC равна BH (черт. 8); так что и угол при C равен углу BHC (предложение 5 книги I). Угол же при C не меньше прямого; значит, и угол BHC не меньше прямого. Вот, в треугольнике BHC два угла не меньше двух прямых, что невозможно (предложение 17 книги I). Значит, опять угол ABC не будет неравен углу DEI; значит, он равен. Но и угол при A равен углу при D; значит, и остающийся угол при C равен остающемуся углу при I (предложение 32 книги I). Значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику DEI.



Черт. 8.

Значит, если два треугольника имеют один угол, равный одному углу, при других же углах стороны пропорциональные, причём из остальных углов каждый одновременно или меньше или не меньше прямого, то треугольники будут равноугольны и будут иметь равными те углы, при которых стороны пропорциональны, что и требовалось доказать (12, 13, 14, 15, 16, 17).

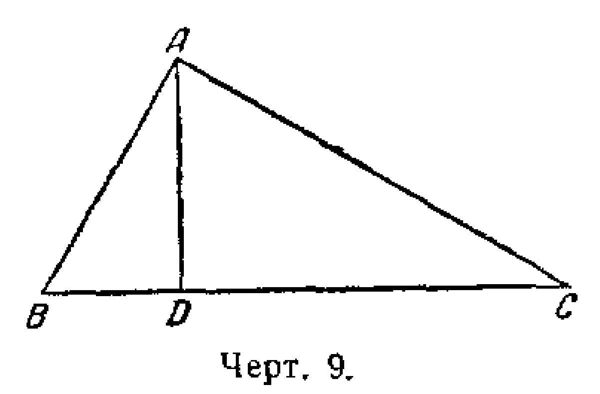
Предложение 8

Если в прямоугольном треугольнике проведён из прямого угла к основанию перпендикуляр, то треугольники при перпендикуляре подобны и целому и между собой.

Пусть будет прямоугольный треугольник ABC, имеющий прямой угол BAC (черт. 9), и пусть проведён из A к BC перпендикуляр AD; я утверждаю, что каждый из треугольников ABD и ADC подобен целому ABC и также между собой.

Действительно, поскольку угол BAC равен углу ADB, ибо оба они прямые, и у двух треугольников ABC, ABD общий угол при B, то значит, остающийся угол ACB ра-

вен остающемуся BAD (предложение 32 книги I); значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику ABD. Значит, будет, что как BC, стягивающая прямой угол в треугольнике ABC, к BA, стягивающей прямой угол в треугольнике ABD, так и эта же AB, стягивающая угол при C в треугольнике ABC, к BD, стягивающей равный угол BAD в треугольнике ABD, и ещё как AC к AD (предложение 4), стягивающей угол при B общий двум треугольникам. Значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику ABD и имеет <с ним> пропорциональными стороны при равных углах. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику ABD (определение 1). Подобным же вот образом докажем, что и треугольник ABC подобен треугольнику ADC; значит, каждый из [треугольников] ABD и ADC подобен целому ABC.



Черт. 9.

Вот я утверждаю, что и между собой треугольники ABD и ADC подобны.

Действительно, поскольку прямой угол BDA равен прямому углу ADC, но, как доказано, угол BAD равен углу при C, то значит, и остающийся угол при B равен остающемуся углу DAC (предложение 32 книги I), значит, треугольник ABD равноуголен треугольнику ADC. Значит, будет, что как BD, стягивающая угол BAD треугольника ABD, к DA треугольника ADC, стягивающей угол при C, равный углу BAD, так эта же AD треугольника ABD, стягивающая угол при B, к DC, стягивающей угол DAC треугольника ADC, равный углу при B, и ещё как BA к AC, стягивающие прямые углы; значит, треугольник ABD подобен треугольнику ADC (определение 1).

Значит, если в прямоугольном треугольнике проведён из прямого угла к основанию перпендикуляр, то треугольники при перпендикуляре подобны и целому и между собой [что и требовалось доказать].

Следствие

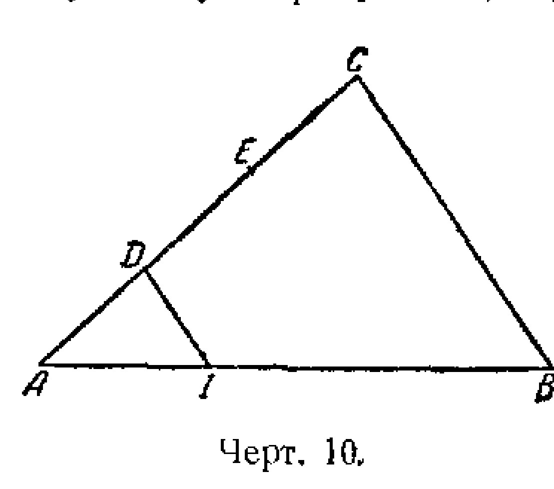
Вот из этого ясно, что если провести в прямоугольном треугольнике из прямого угла перпендикуляр к основанию, то проведённая есть средняя пропорциональная между отрезками основания, что и требовалось доказать. [И ещё для основания и одного какого-нибудь из отрезков <лежащая> при этом отрезке сторона будет средней пропорциональной.]

Предложение 9

От данной прямой отнять предложенную часть.

Пусть будет данная прямая AB; вот требуется отнять от AB предложенную часть (черт. 10).

Пусть вот предложена третья часть. Проведём из A какую-нибудь прямую AC, образующую с AB любой угол; и возьмём на AC любую точку D и отложим DE и EC, равные AD, соединим BC и через D параллельно ей проведём DI.



Черт. 10.

Теперь поскольку в треугольнике ABC параллельно одной из сторон BC проведена ID, то, следовательно, будет пропорция — как CD к DA, так и BI к IA.

Но CD вдвое больше DA, следовательно, и BI вдвое больше IA; следовательно, BA втрое больше AI.

Итак, от данной прямой AB отнята предложенная третья часть AI, что и требовалось сделать (18).

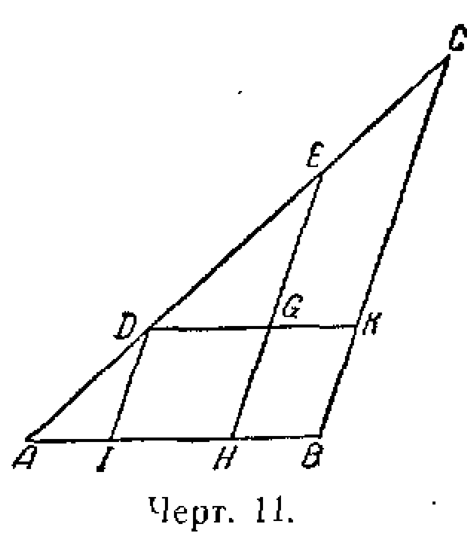
Предложение 10

Данную нерассечённую прямую рассечь подобно данной рассечённой.

Пусть данная нерассечённая прямая будет AB (черт. 11). AC же прямая, рассечённая в точках D, E; поместим их

так, чтобы они заключали произвольный угол, и соединим CB, через D, E параллельно BC проведём DI, EH, через же D параллельно AB проведём DGK (предложение 31 книги I).

Значит, каждая из <фигур> IG, GB — параллелограмм; значит, DG равна IH, GK же равна HB (предложение 34 книги I). И поскольку в треугольнике DKC параллельно одной из сторон KC проведена прямая GE, то значит, будет пропорция — как CE к ED, так и KG к GD (предложение 2). KG же равна BH, а GD равна HI. Значит, будет — как CE к ED, так и BH к HI. Далее, поскольку в треугольнике AHE параллельно одной из сторон HE проведена DI, то значит, будет пропорция — как ED к DA, так и HI к IA (предложение 2).



Черт. 11.

Доказано же, что и как CE к ED, так BH к HI; значит, будет, что как CE к ED, так BH к HI, как же ED к DA, так HI к IA.

Значит, данная нерассечённая прямая рассечена подобно данной рассечённой, что и требовалось сделать (19, 20, 21).

Предложение 11

Для данных двух прямых найти третью пропорциональную.

Пусть данные [две прямые] будут BA, AC; поместим их так, чтобы они заключали произвольный угол. Требуется вот для BA и AC найти третью пропорциональную (черт. 12).

Продолжим их до точек D, E, отложим BD, равную AC соединим BC и через D параллельно ей проведём DE (предложение 31 книги I).

Поскольку теперь в треугольнике ADE параллельно одной из сторон DE проведена BC, то будет пропорция —

как AB к BD, так и AC к CE (предложение 2). BD же равна AC, значит, будет, что как AB к AC, так и AC к CE.

Значит, для данных двух прямых AB, AC найдена третья их пропорциональная CE, что и требовалось сделать.

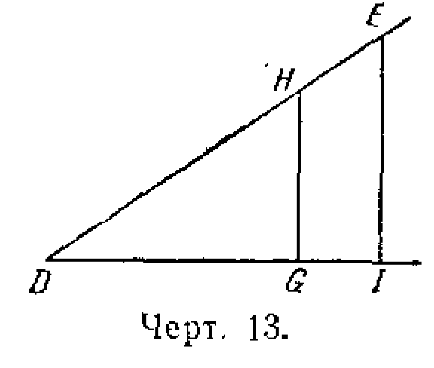
Черт. 12.

Предложение 12

Для трёх данных прямых найти четвёртую пропорциональную.

Пусть данные три прямые будут A, B, C; вот требуется для A, B, C найти четвёртую пропорциональную (черт. 13).

Отложим две прямые DE и DI так, чтобы они заключали [произвольный] угол EDI; отложим DH, равную A, и HE, равную B, и ещё DG, равную C; и соединив-ши HG параллельно ей (предложение 31 книги I) через E, проведём EI.



Черт. 13.

Поскольку теперь в треугольнике DEI параллельно одной из сторон EI проведена HG, то значит, будет, что как DH к HE, так DG к GI. DH же равна A, HE же равна B, DG же равна C; значит, будет, что как A к B, так и C к GI.

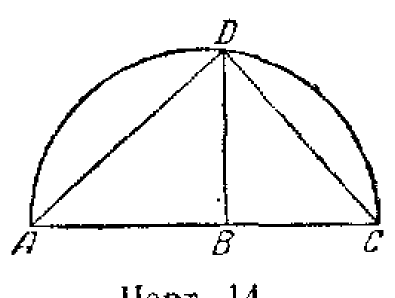
Значит, для трёх данных прямых A, B, C найдена четвёртая пропорциональная GI, что и требовалось сделать.

Предложение 13

Для двух данных прямых найти среднюю пропорциональную.

Пусть две данные прямые будут AB, BC; вот требуется для AB и BC найти среднюю пропорциональную (черт. 14).

Расположим их по прямой, на AC опишем полукруг ADC, из точки B под прямыми углами к прямой AC проведём BD и соединим AD и DC. Поскольку ADC есть угол в полукруге, то он прямой (предложение 31 книги III). И поскольку в прямоугольном треугольнике ADC от прямого угла к основанию проведён перпендикуляр DB, то значит, DB есть средняя пропорциональная для отрезков AB и BC (предложение 8, следствие).

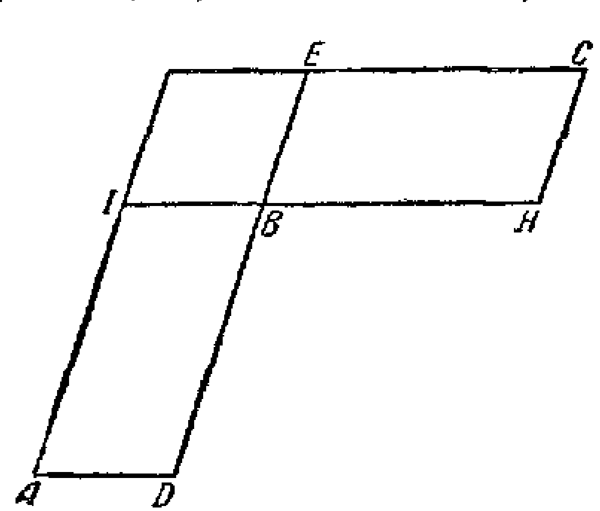


Черт. 14.

Значит, для двух данных прямых AB и BC найдена средняя пропорциональная DB, что и требовалось сделать (22).

Предложение 14

В равных и равноугольных параллелограммах стороны при равных углах обратно пропорциональны; и из равноугольных параллелограммов равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны.



Черт. 15.

Пусть будут равные и равноугольные параллелограммы AB и BC, имеющие равными углы при B; поместим DB, BE по прямой (черт. 15); значит, по прямой будут и IB, BH. Я утверждаю, что у AB и BC стороны при равных углах обратно пропорциональны, т. е. что будет как DB к BE, так и HB к BI.

Действительно, дополним параллелограмм IE. Поскольку теперь параллелограмм AB равен параллелограмму BC, а IE нечто другое, то значит, будет, что как AB к IE, так и BC к IE (предложение 7 книги V). Но как AB

к *IE*, так и *DB* к *BE* (предложение 1), как же *BC* к *IE*, так и *HB* к *BI*; и значит, как *DB* к *BE*, так и *HB* к *BI*. Значит, в параллелограммах *AB* и *BC* стороны при равных углах обратно пропорциональны.

Но вот пусть будет, что как *DB* к *BE*, так и *HB* к *BI*; я утверждаю, что параллелограмм *AB* равен параллелограмму *BC*.

Действительно, поскольку будет, что как *DB* к *BE*, так и *HB* к *BI*, но как *DB* к *BE*, так и параллелограмм *AB* к параллелограмму *IE*, как же *HB* к *BI*, так и параллелограмм *BC* к параллелограмму *IE*, и значит (предложение 1), как *AB* к *IE*, так и *BC* к *IE* (предложение 11 книги V); значит, параллелограмм *AB* равен параллелограмму *BC* (предложение 9 книги V).

Значит, в равных и равноугольных параллелограммах стороны при равных углах обратно пропорциональны и из равноугольных параллелограммов равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны, что и требовалось доказать (23, 24).

Предложение 15

В равных треугольниках, имеющих по одному равному углу, стороны при равных углах обратно пропорциональны; и из треугольников, имеющих по одному равному углу, равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны.

Пусть будут равные треугольники *ABC*, *ADE*, имеющие по одному равному углу — угол *BAC*, равный *DAE*; я утверждаю, что в треугольниках *ABC* и *ADE* стороны при равных углах обратно пропорциональны, <то-есть> как *CA* к *AD*, так и *EA* к *AB* (черт. 16)*).

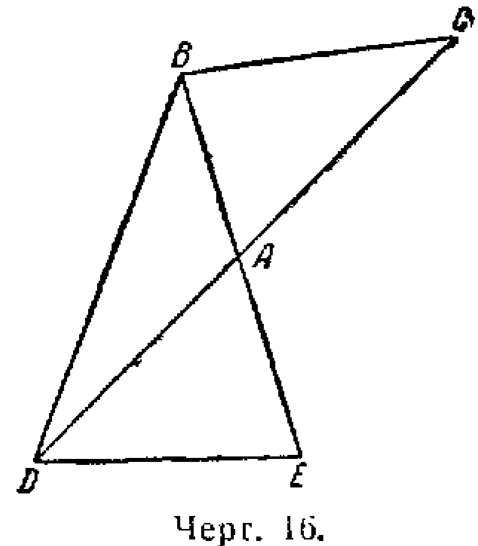
Действительно, поместим их так, чтобы *CA* была по прямой с *AD*; значит, *EA* будет по прямой с *AB*. И соединим *BD*.

Поскольку теперь треугольник *ABC* равен треугольнику *ADE*, а *BAD* нечто другое, то значит, будет, что

*) Черт. 16 воспроизводит помещённый в издании Гейберга.

как треугольник CAB к треугольнику BAD, так и треугольник EAD к треугольнику BAD (предложение 7 книги V). Но как CAB к BAD, так и CA к AD (предложение 1), как же EAD к BAD, так и EA к AB. И значит, как CA к AD, так и EA к AB. Значит, у треугольников ABC, ADE обратно пропорциональны стороны при равных углах.

Но вот пусть стороны треугольников ABC и ADE обратно пропорциональны и пусть будет, что как CA к AD, так и EA к AB; я утверждаю, что треугольник ABC равен треугольнику ADE.



Черт. 16.

Действительно, снова после проведения соединяющей BD, поскольку будет, что как CA к AD, так и EA к AB, но как CA к AD, так и треугольник ABC к треугольнику BAD, как же EA к AB, так и треугольник EAD к треугольнику BAD (предложение 1), значит, как треугольник ABC к треугольнику BAD, так и треугольник EAD к треугольнику BAD.

Значит, каждый из треугольников ABC, EAD имеет к BAD то же самое отношение. Значит, [треугольник] ABC равен треугольнику EAD (предложение 9 книги I).

Значит, в равных треугольниках, имеющих по одному равному углу, стороны при равных углах обратно пропорциональны; и из треугольников, имеющих по одному равному углу, равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны, что и требовалось доказать.

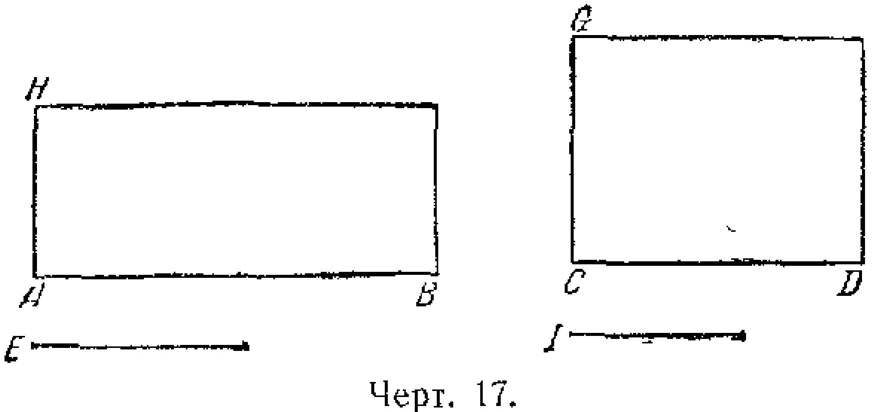
Предложение 16

Если четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними; и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямо-

угольнику, заключённому между средними, то эти четыре прямые будут пропорциональны.

Пусть будут четыре пропорциональные прямые *AB*, *CD*, *E*, *I* — как *AB* к *CD*, так и *E* к *I* (черт. 17); я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между *AB*, *I*, равен прямоугольнику, заключённому между *CD*, *E*.

[Действительно], проведём из точек *A*, *C* прямые *AH*, *CG* под прямыми углами к *AB*, *CD* и отложим *AH*, рав-



Черт. 17.

ную *I*, а *CG*, равную *E*. И дополним параллелограммы *BH*, *DG*.

И поскольку будет, что как *AB* к *CD*, так и *E* к *I*, *E* же равна *CG*, а *I* равна *AH*, то значит, будет, что как *AB* к *CD*, так и *CG* к *AH*. Значит, у параллелограммов *BH* и *DG* стороны при равных углах обратно пропорциональны. Из равноугольных же параллелограммов равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14); значит, параллелограмм *BH* равен параллелограмму *DG*. И *BH* есть прямоугольник, заключённый между *AB*, *I*, ибо *AH* равна *I*; а *DG* ⟨прямоугольник⟩ между *CD*, *E*, ибо *E* равна *CG*; значит, прямоугольник, заключённый между *AB*, *I*, равен прямоугольнику, заключённому между *CD*, *E*.

Но вот пусть прямоугольник, заключённый между *AB*, *I*, равен прямоугольнику, заключённому между *CD*, *E*; я утверждаю, что эти четыре прямые пропорциональны как *AB* к *CD*, так и *E* к *I*.

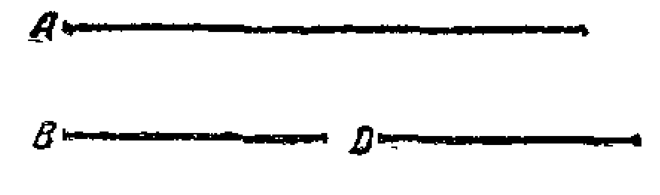
Действительно, после тех же построений, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между *AB*, *I* равен ⟨прямоугольнику⟩

между *CD*, *E*, и ⟨прямоугольник между⟩ *AB*, *I* есть *BH*, ибо *AH* равна *I*, ⟨прямоугольник⟩ же между *CD* и *E* есть *DG*, ибо *CG* равно *E*, то значит, *BH* равен *DG*. И они равноугольны. В равных же и равноугольных параллелограммах стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14). Значит, будет, что как *AB* к *CD*, так и *CG* к *AH*. *CG* же равна *E*, а *AH* равна *I*; значит, будет, что как *AB* к *CD*, так и *E* к *I*.

Значит, если четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними, и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними, то эти четыре прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать (25).

Предложение 17

Если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны.



Черт. 18.

Пусть три прямые *A*, *B*, *C* пропорциональны: как *A* к *B*, так и *B* к *C* (черт. 18); я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между *A* и *C*, равен квадрату на *B*.

Отложим *D*, равную *B*.

И поскольку будет, что как *A* к *B*, так и *B* к *C*, а *B* равна *D*, то значит, будет, что как *A* к *B*, так и *D* к *C*. Если же четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними (предложение 16). Значит, прямоугольник между *A*, *C* равен прямоугольнику между *B*, *D*. Но прямоугольник между *B*, *D* есть квадрат

на *B*; ибо *B* равна *D*; значит, прямоугольник, заключённый между *A*, *C*, равен квадрату на *B*.

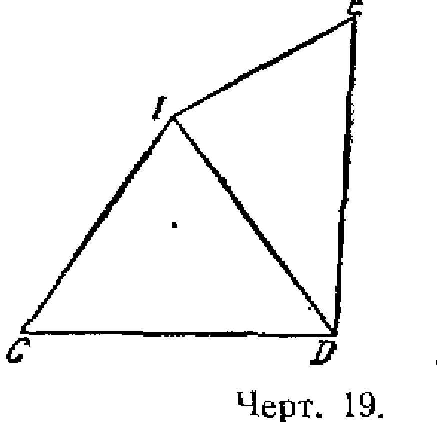
Но вот пусть прямоугольник между *A*, *C* будет равен квадрату на *B*; я утверждаю, что как *A* к *B*, так и *B* к *C*.

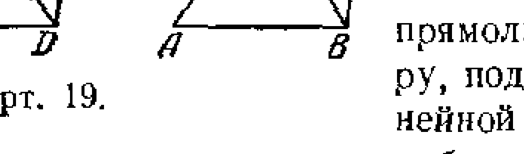
Действительно, после тех же построений, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между *A*, *C* равен квадрату на *B*, но квадрат на *B* есть ⟨прямоугольник⟩ между *B*, *D* (ибо *B* равна *D*), то значит, прямоугольник между *A* и *C* равен прямоугольнику между *B* и *D*. Если же прямоугольник между крайними равен прямоугольнику между средними, то эти четыре прямые пропорциональны (предложение 16). Значит, будет, что как *A* к *B*, так и *D* к *C*. *B* же равна *D*; значит, как *A* к *B*, так и *B* к *C*.

Значит, если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать.

Предложение 18

На данной прямой построить) прямолинейную фигуру, подобную данной прямолинейной фигуре и подобно расположенную.*





Черт. 19.

Пусть данная прямая будет *AB*, данная же прямолинейная фигура — *CE* (черт. 19); вот требуется на прямой *AB* построить прямолинейную фигуру, подобную прямолинейной фигуре *CE* и подобно расположенную.

Соединим *DI* и построим на прямой *AB* в её точках *A*, *B* угол *HAB*, равный углу при *C*, и угол *ABH*, рав-

*) У Евклида ἀναγράψαι — буквально «начертить».

ный CDI. Значит, остающийся угол CID равен углу AHB; значит, треугольник ICD равноуголен с треугольником HAB. *Значит, будет пропорция: как ID к HB, так и IC к HA и* CD к AB (предложение 4). Далее, построим на прямой BH при её точках B, H угол BHG, равный углу DIE, и угол HBG, равный углу IDE (предложение 23 книги I). Значит, остающийся угол при E равен остающемуся при G (предложение 32 книги I); значит, треугольник IDE равноуголен треугольнику HGB; значит будет пропорция: как ID к HB, так и IE к HG и ED к GB (предложение 4). Доказано же, что и как ID к HB, так и IC к HA и CD к AB; и значит, как IC к AH, так и CD к AB и IE к HG и ещё ED к GB. И поскольку угол CID равен AHB, DIE же равен BHG, то значит, весь угол CIE равен всему углу AHG. Вследствие того же вот и угол CDE равен ABG. Будет же, что и угол при C равен углу при A, угол же при E равен углу при G. Значит, <фигура> AG равноугольна <фигуре> CE; и они имеют при равных углах пропорциональные стороны; значит, прямолинейная <фигура> AG подобна прямолинейной <фигуре> CE.

Значит, на данной прямой построена прямолинейная фигура AG, подобная данной прямолинейной фигуре CE и подобно расположенная, что и требовалось сделать.

Предложение 19

Подобные треугольники находятся друг к другу в двойном отношении) соответственных сторон.*

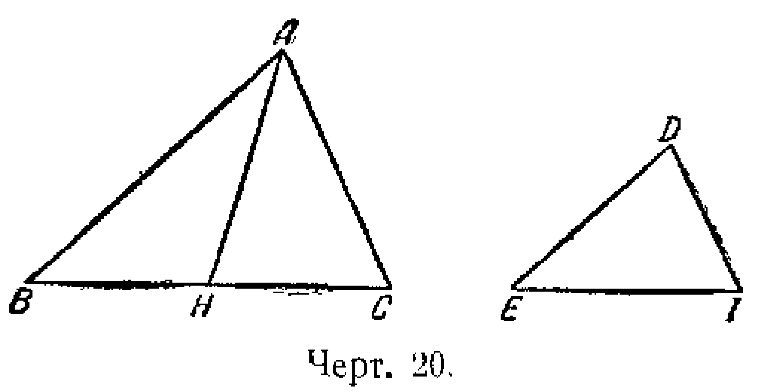
Пусть подобные треугольники будут ABC и DEI (черт. 20), имеющие угол при B, равный углу при E, и как AB к BC, так и DE к EI, так что BC соответственна с EI; я утверждаю, что треугольник ABC к треугольнику DEI имеет двойное отношение BC к EI.

Действительно, для BC и EI возьмём третью пропорциональную BH (предложение 11), так что будет, что как BC к EI, так и EI к BH; и соединим AH.

---

*) Мы сказали бы теперь — «в отношении квадратов».

Поскольку теперь будет, что как AB к BC, так и DE к EI, то значит, «переставляя» будет, что как AB к DE, так и BC к EI (предложение 16 книги V). Но как BC к EI, так будет и EI к BH. И значит, как AB к DE, так и EI к BH; значит, в треугольниках ABH и DEI стороны при равных углах обратно пропорциональны. Из треугольников же, имеющих по одному равному углу, равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 15). Значит, треугольник ABH равен треугольнику DEI. И поскольку будет, что



Черт. 20.

как BC к EI, так и EI к BH, если же три прямые пропорциональны, то первая имеет к третьей двойное отношение первой ко второй (определение 9 книги V), значит, BC имеет к BH двойное отношение BC к EI. Как же CB к BH, так и треугольник ABC к треугольнику ABH (предложение 1); и значит, треугольник ABC имеет к ABH двойное отношение BC к EI. Треугольник же ABH равен треугольнику DEI; и значит, треугольник ABC имеет к треугольнику DEI двойное отношение BC к EI.

Значит, подобные треугольники находятся друг к другу в двойном отношении соответственных сторон [что и требовалось доказать].

Следствие

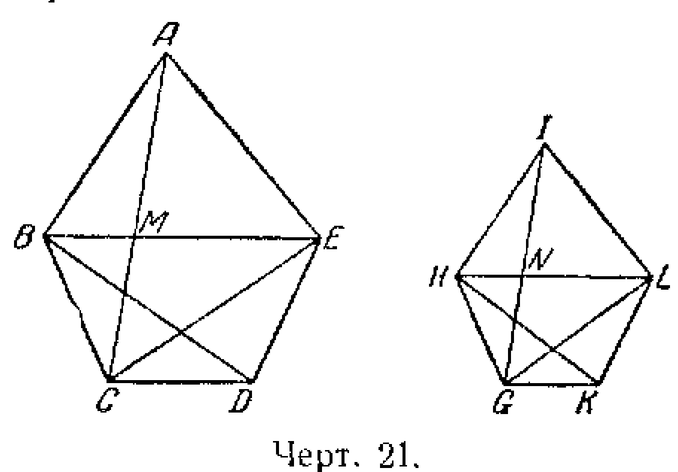
Вот из этого ясно, что если три прямые пропорциональны, то будет, что как первая к третьей, так и фигура *), построенная на первой к подобной ей и подобно

*) У Евклида τὸ εἶδος — «идея», «форма». Если понимать под словом «фигура» любую прямолинейную фигуру, то «следствие»

построенной фигуре на второй [поскольку доказано, что как *CB* к *BH*, так и треугольник *ABC* к треугольнику *ABH*, то-есть *DEI*], что и требовалось доказать.

Предложение 20

Подобные многоугольники разделяются на подобные треугольники в равном количестве) и в том же отношении**), что и целые ⟨многоугольники⟩, и многоугольник к многоугольнику имеет двойное отношение соответственных сторон.*



Черт. 21.

Пусть подобные многоугольники будут *ABCDE* и *IHGKL* (черт. 21) и *AB* соответствует *IH*; я утверждаю, что многоугольники *ABCDE* и *IHGKL* разделяются на подобные треугольники в равном количестве и в том же отношении, что и целые ⟨многоугольники⟩, и многоугольник *ABCDE* имеет к многоугольнику *IHGKL* двойное отношение *AB* к *IH*.

нужно признать несколько преждевременным. Но наличие определённого члена τό позволяет думать, что в данном случае под термином «фигура» понималась та фигура, которая рассматривалась в данном предложении, т. е. именно треугольник. В некоторых списках «Начал» вместо слова «фигура» действительно стоит «треугольник»; Гейберг считает, что это позднейшее изменение.

*) εἰς ἴσα τὸ πλῆθος — буквально «на равные по количеству».

**) ὁμόλογα τοῖς ὅλοις — буквально «одинаковые по отношению с целыми».

Соединим BE, EC, HL, LG.

И поскольку многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $IHGKL$, угол BAE равен углу HIL (определение 1). И будет, что как BA к AE, так и HI к IL (там же). Поскольку теперь будут два треугольника ABE, IHL, имеющих один угол, равный одному углу, стороны же при равных углах пропорциональные, то значит, треугольник ABE равноуголен треугольнику IHL (предложение 6); так что и подобен; значит, угол ABE равен IHL. Но и весь угол ABC равен всему углу IHG вследствие подобия многоугольников; значит, остающийся угол EBC равен LHG. И поскольку вследствие подобия треугольников ABE и IHL будет, что как EB к BA, так и LH к HI, но вследствие подобия многоугольников будет, что как AB к BC, так и IH к HG, то значит, «по равенству» будет, что как EB к BC, так и LH к HG (предложение 22 книги V), и при равных углах EBC, LHG стороны пропорциональны; значит, треугольник EBC равноуголен треугольнику LHG (предложение 6): так что треугольник EBC и подобен треугольнику LHG (предложение 4, определение 1). Вследствие того же вот и треугольник ECD подобен треугольнику LGK. Значит, многоугольники $ABCDE$, $IHGKL$ разделены на треугольники подобные и в равном количестве.

Я утверждаю, что они и в том же отношении, что и целые, то-есть что треугольники пропорциональны, и предыдущие будут ABE, EBC, ECD, последующие же им IHL, LHG, LGK, и что многоугольник $ABCDE$ имеет к многоугольнику $IHGKL$ двойное отношение соответственной стороны к соответственной стороне, то-есть AB к IH.

Действительно, соединим AC и IG. И поскольку вследствие подобия многоугольников угол ABC равен углу IHG и будет, что как AB к BC, так и IH к HG, то треугольник ABC равноуголен треугольнику IHG (предложение 6): значит, угол BAC равен HIG, угол же BCA равен HGI. И поскольку угол BAM равен HIN и также угол ABM равен IHN, то значит, и остальной угол AMB равен остальному углу INH (предложение 32 книги I); значит,

треугольник ABM равноуголен треугольнику IHN. Подобным же вот образом докажем, что и треугольник BMC равноуголен треугольнику HNG. Значит, будет пропорция: как AM к MB, так и IN к NH, как же BM к MC, так и HN к NG (предложение 4); так что и «по равенству» как AM к MC, так и IN к NG (предложение 22 книги V). Но как AM к MC, так и [треугольник] ABM к MBC и AME к EMC (предложение 1), ибо они ⟨относятся⟩ друг к другу как основания. И значит, как одна из предыдущих к одной из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12 книги V); значит, как треугольник AMB к BMC, так и ABE к CBE. Но как AMB к BMC, так и AM к MC; и значит, как AM к MC, так и треугольник ABE к треугольнику EBC. Вследствие того же вот и как IN к NG, так и треугольник IHL к треугольнику HLG. И будет, что как AM к MC, так и IN к NG; и значит, как треугольник ABE к треугольнику BEC, так и треугольник IHL к треугольнику HLG, и «переставляя», как треугольник ABE к треугольнику IHL, так и треугольник BEC к треугольнику HLG (предложение 16 книги V). Подобным же вот образом, соединив BD и HK, докажем, что и как треугольник BEC к треугольнику LHG, так и треугольник ECD к треугольнику LGK. И поскольку будет, что как треугольник ABE к треугольнику IHL, так и EBC к LHG, и затем ECD к LGK, и значит, как одна из предыдущих к одной из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12 книги V), значит, будет, что как треугольник ABE к треугольнику IHL, так и многоугольник $ABCDE$ к многоугольнику $IHGKL$. Но треугольник ABE к треугольнику IHL имеет двойное отношение соответственной стороны AB к соответственной стороне IH, ибо подобные треугольники находятся в двойном отношении соответственных сторон. И значит, многоугольник $ABCDE$ к многоугольнику $IHGKL$ имеет двойное отношение соответственной стороны AB к соответственной стороне IH.

Значит, подобные многоугольники разделяются на подобные треугольники, в равном количестве и в том же

отношении, что и целые, и многоугольник к многоугольнику имеет двойное отношение соответственных сторон [что и требовалось доказать].

Следствие

Таким же образом и для [подобных] четырёхугольников будет доказано, что они в двойном отношении соответственных сторон. Доказано же и для треугольников; так что и вообще подобные прямолинейные фигуры будут друг к другу в двойном отношении соответственных сторон, что и требовалось доказать.

[Следствие 2

И если мы для AB, IH возьмём третью пропорциональную Q, то BA имеет к Q двойное отношение AB к IH. Но и многоугольник к многоугольнику или четырёхсторонник к четырёхстороннику имеет двойное отношение соответственной стороны к соответственной стороне, т. е. AB к IH; доказано же это было относительно треугольников; так что и вообще очевидно, что если три прямые пропорциональны, то будет, что как первая к третьей, так и ⟨построенная⟩ на первой фигуре к фигуре подобной и подобно построенной на второй.] (26)

Предложение 21

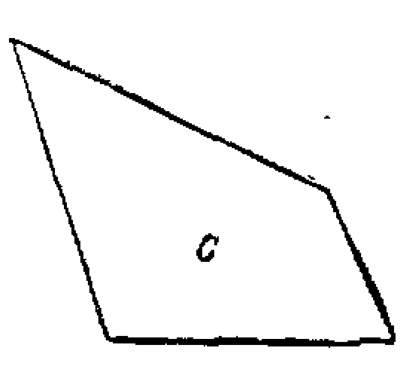
⟨Фигуры⟩, подобные одной и той же прямолинейной фигуре, подобны и между собой.

Действительно, пусть каждая из прямолинейных фигур A и B подобна C; я утверждаю, что и A подобна B (черт. 22).

Действительно, поскольку A подобна C, она равноугольна с ней и имеет при равных углах пропорциональные стороны (определение 1). Далее, поскольку B подобна C, она равноугольна с ней и имеет при равных углах пропорциональные стороны (определение 1). Значит, каждая из A и B равноугольна C и имеет при равных

углах пропорциональные стороны [так что и A равноугольна B и имеет при равных углах пропорциональные стороны]. Значит, A подобна B (определение 1), что и требовалось доказать.

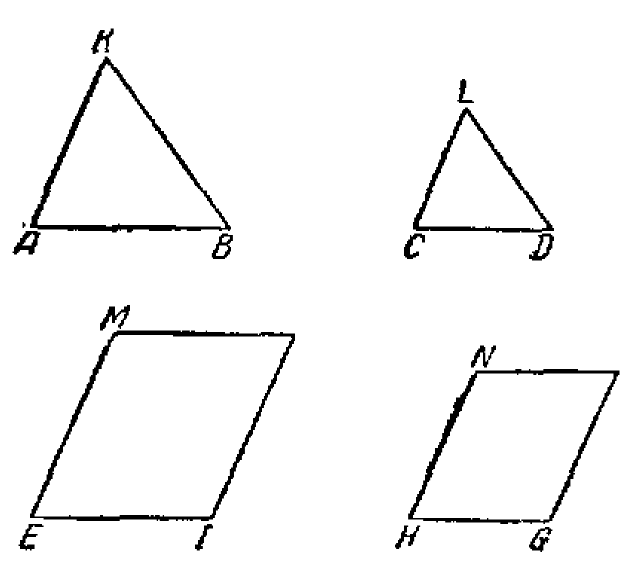
Предложение 22



Черт. 22.

Если четыре прямые пропорциональны, то и подобные и подобно построенные) на них прямолинейные фигуры будут пропорциональны; и если подобные и подобно построенные на них прямолинейные фигуры пропорциональны, то и сами эти прямые будут пропорциональны.*

Пусть четыре пропорциональные прямые будут AB, CD, EI, HG, ⟨так что⟩ как AB к CD, так и EI к HG; построим на AB и CD подобные и подобно расположенные прямолинейные фигуры KAB, LCD, а на EI и HG подобные и подобно расположенные прямолинейные фигуры MI и NG (черт. 23); я утверждаю, что как KAB к LCD, так и MI к NG.



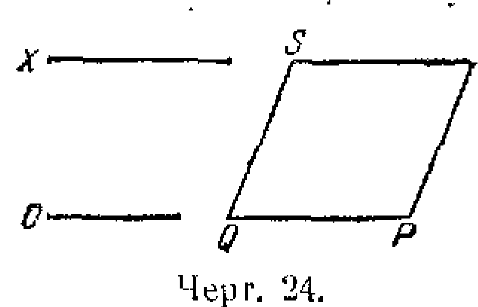
Черт. 23.

Действительно возьмём для AB, CD третью пропорциональную X, а для EI, HG третью пропорциональную O (предложение 11). И поскольку будет, что как AB к CD, так и EI к HG как

*) В подлиннике ἀναγεγραμμένα — начерченные.

же CD к X, так и HG к O *) (черт. 24), то значит, «по равенству» будет, что как AB к X, так и EI к O (предложение 22 книги V). Но как AB к X, так и KAB к LCD (предложение 19, следствие), как же EI к O, так и MI к NG (там же); и значит, как KAB к LCD, так и MI к NG.

Но вот пусть будет, что как KAB к LCD, так и MI к NG; я утверждаю, что будет и как AB к CD, так EI к HG. Действительно, если не будет, что как AB к CD, так и EI к HG, то пусть будет, что как AB к CD, так и EI к QP (предложение 12) и на QP построим прямолинейную фигуру SP, подобную и подобно расположенную каждой из фигур MI и NG (предложение 18 и предложение 21).



Черт. 24.

Поскольку теперь будет, что как AB к CD, так и EI к QP, и на AB, CD построены подобные и подобно расположенные фигуры KAB и LCD, на EI, QP же подобные и подобно расположенные ⟨фигуры⟩ MI и SP, то значит, будет, что как KAB к LCD, так и MI к SP. Предполагается же, что и как KAB к LCD, так и MI к NG; и значит, как MI к SP, так и MI к NG. Значит, MI имеет то же самое отношение к каждой из NG, SP; значит, NG равна SP (предложение 9 книги V). Она же ей подобна и подобно расположена; значит, HG равна QP **). И поскольку будет, что как AB к CD, так и EI к QP, QP же равна HG, то значит, будет, что как AB к CD, так и EI к HG.

Значит, если четыре прямые пропорциональны, то и подобные и подобно построенные на них прямолинейные фигуры будут пропорциональны; и если подобные и подобно построенные на них прямолинейные фигуры пропорциональны, то и сами эти прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать.

---

*) Ибо по предположению: $AB:CD = CD:X$ и $EI:HG = HG:O$ и $AB:CD = EI:HG$ (Гейберг).

**) Ибо, если $NG:SP = HG^2:QP^2$ (предложение 20) и $NG = SP$, то будет $QP^2 = HG^2$, т. е. $QP = HG$ (Гейберг).

[Лемма]

[А что если прямолинейные фигуры равны и подобны, то будут равны между собой и их соответственные стороны, мы докажем так.

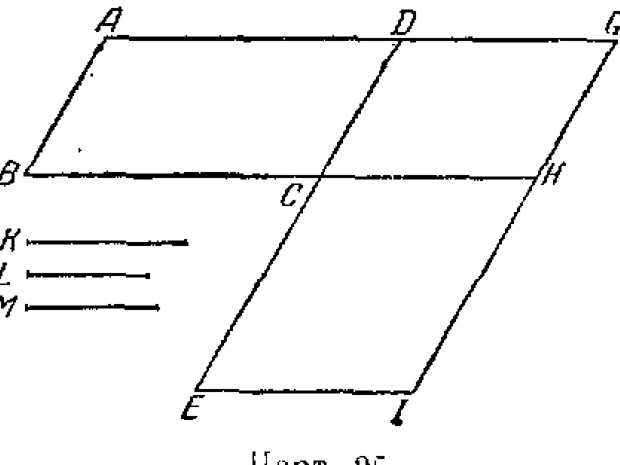
Пусть равные и подобные прямолинейные фигуры будут *NG*, *SR* и пусть будет, что как *GH* к *HN*, так и *RP* к *PS*; я утверждаю, что *RP* равно *GH*.

Действительно, если они не равны, то одна из них будет больше. Пусть *RP* будет больше *GH*. И поскольку будет, что как *RP* к *PS*, так и *GH* к *HN*, и, «переставляя», как *RP* к *GH*, так и *PS* к *HN*, *RP* же больше *GH*, то значит, и *PS* больше *HN*; так что и *RS* больше *GN*. Но *она и равна, что невозможно. Значит, не* будет *RP* неравной *HG*; значит, она равна, что и требовалось доказать.]

Предложение 23

Равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон.

Пусть будут равноугольные параллелограммы *AC*, *CI*, имеющие угол *BCD*, равный *ECH* (черт. 25); я утверждаю, что параллелограмм *AC* имеет к параллелограмму *CI* отношение, составленное из ⟨отношений сторон⟩.



Черт. 25.

Действительно, поместим их так, чтобы *BC* была по прямой с *CH*; значит, и *DC* будет по прямой с *CE*. И дополним параллелограмм *DH*, отложим некоторую прямую *K* и сделаем, чтобы как *BC* к *CH*, так и *K* к *L*, как же *DC* к *CE*, так и *L* к *M*.

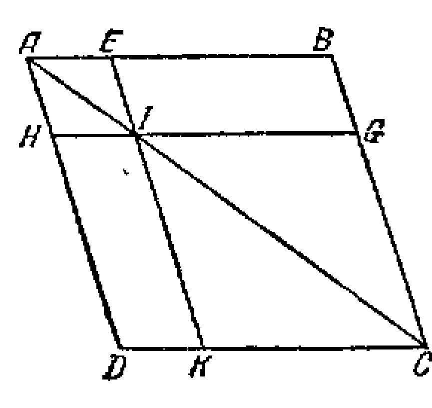
Значит, отношения K к L и L к M такие же, что и отношения сторон, ⟨именно⟩ *BC* к *CH* и *DC* к *CE*. Но отношение *K* к *M* составляется из отношений *K* к *L* и

L к M; так что и K имеет к M отношение, составленное из ⟨отношений⟩ сторон. И поскольку будет, что как BC к CH, так и параллелограмм AC к CG (предложение 1), но как BC к CH, так и K к L, то значит, как K к L, так и AC к CG. Далее, поскольку будет, что как DC к CE, так и параллелограмм CG к CI (предложение 1), но как DC к CE, так и L к M, и значит, как L к M, так и параллелограмм CG к параллелограмму CI. Поскольку теперь доказано, что как K к L, так и параллелограмм AC к параллелограмму CG, как же L к M, так и параллелограмм CG к параллелограмму CI, то значит, «по равенству» (предложение 22 книги V), будет, что как K к M, так и AC к параллелограмму CI. K же имеет к M отношение, составленное из ⟨отношений⟩ сторон; и значит, AC к CI имеет отношение, составленное из ⟨отношений⟩ сторон.

Значит, равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон, что и требовалось доказать.

Предложение 24

Во всяком параллелограмме параллелограммы на диаметре подобны и целому и между собой.



Черт. 26.

Пусть будет параллелограмм $ABCD$, диаметр же его AC, параллелограммы же на AC пусть будут EH и GK (черт. 26); я утверждаю, что каждый из параллелограммов EH, GK подобен целому $ABCD$ и друг другу.

Действительно, поскольку в треугольнике ABC параллельно одной из сторон BC проведена EI, то будет пропорция — как BE к EA, так и CI к IA (предложение 2). Далее, поскольку в треугольнике ACD параллельно одной из сторон CD проведена IH, будет пропорция — как CI к IA, так и DH к HA (там же). Но как CI к IA, так по доказанному и BE к EA; и значит, как BE к EA, так и

DH к *HA*, и значит, «соединяя» (предложение 18 книги V) как *BA* к *AE*, так и *DA* к *AH*, и «переставляя» — как *BA* к *AD*, так и *EA* к *AH* (предложение 16 книги V). Значит, в параллелограммах *ABCD*, *EH* стороны при общем угле *BAD* пропорциональны. И поскольку *HI* параллельна *DC*, то угол *AIH* будет равен *DCA* (предложение 29 книги I); и *DAC* есть общий угол двух треугольников *ADC*, *AHI*; значит, треугольник *ADC* равноуголен треугольнику *AHI* (предложение 32 книги I). Вот вследствие того же и треугольник *ACB* равноуголен треугольнику *AIE*, и весь параллелограмм *ABCD* равноуголен параллелограмму *EH*. Значит, будет пропорция: как *AD* к *DC*, так и *AH* к *HI*, как же *DC* к *CA*, так и *HI* к *IA*, как же *AC* к *CB*, так и *AI* к *IE*, и ещё, как *CB* к *BA*, так и *IE* к *EA* (предложение 4). И поскольку доказано, что как *DC* к *CA*, так и *HI* к *IA*, как же *AC* к *CB*, так и *AI* к *IE*, то значит, «по равенству» (предложение 22 книги V) будет, что как *DC* к *CB*, так и *HI* к *IE*. Значит, в параллелограммах *ABCD*, *EH* стороны при равных углах пропорциональны*); значит, параллелограмм *ABCD* подобен параллелограмму *EH*. Вследствие того же вот и параллелограмм *ABCD* подобен параллелограмму *KG*; значит, каждый из параллелограммов *EH*, *GK* подобен [параллелограмму] *ABCD*. ⟨Фигуры⟩ же, подобные одной и той же прямолинейной фигуре, подобны и между собой (предложение 21); и значит, параллелограмм *EH* подобен параллелограмму *GK*.

Значит, во всяком параллелограмме параллелограммы на диаметре подобны и целому и между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 25

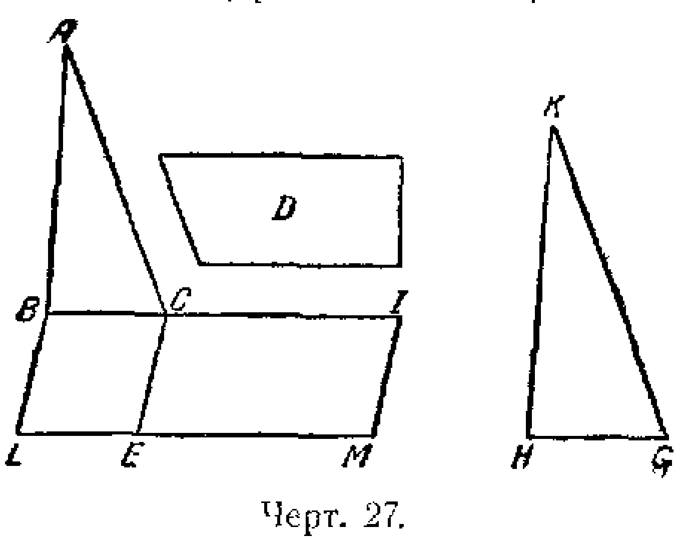
Построить подобную данной прямолинейной фигуре и равную другой данной ту же ⟨фигуру⟩.

Пусть *ABC* будет та данная прямолинейная фигура, которой должна быть подобна строящаяся, *D* же та, ко-

*) Ибо доказано, что $BA:AD = EA:AH$, $AD:DC = AH:HI$, $HI:IE = DC:CB$, $IE:EA = CB:BA$ (Гейберг).

торой должна быть равна (черт. 27); вот требуется построить подобную *ABC* и равную *D* ту же ⟨фигуру⟩.

«Приложим» к *BC* параллелограмм *BE*, равный треугольнику *ABC* (черт. 27) (предложение 44 книги I), к *CE* же параллелограмм *CM*, равный *D*, в угле *ICE*, который равен *CBL* (предложение 45 книги I). Значит, *BC* будет по прямой с *CI*, а *LE* с *EM*. И возьмём для *BC* и *CI* среднюю пропорциональную *HG* (предложение 13) и построим на *HG* ⟨треугольник⟩ *KHG*, подобный и подобно расположенный с *ABC* (предложение 18).



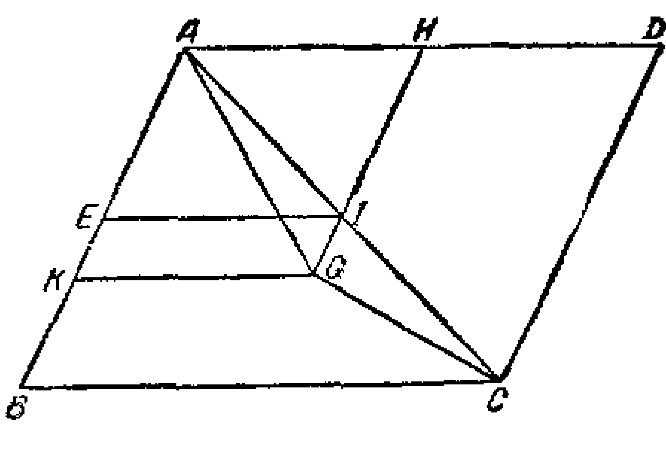
Черт. 27.

И поскольку будет, что как *BC* к *HG*, так и *HG* к *CI*, если же три прямые пропорциональны, то будет, что как первая к третьей, так и фигура, ⟨построенная⟩ на первой к подобной и подобно построенной на второй (предложение 19, следствие), значит, будет, что как *BC* к *CI*, так и треугольник *ABC* к треугольнику *KHG*. Но и как *BC* к *CI*, так и параллелограмм *BE* к параллелограмму *EI* (предложение 1). И значит, как треугольник *ABC* к треугольнику *KHG*, так и параллелограмм *BE* к параллелограмму *EI*; значит «переставляя», как треугольник *ABC* к параллелограмму *BE*, так и треугольник *KHG* к параллелограмму *EI* (предложение 16 книги V). Треугольник же *ABC* равен параллелограмму *EB*; значит, и треугольник *KHG* равен параллелограмму *EI*. Но параллелограмм *EI* равен *D*; и значит, *KHG* равен *D*. И также *KHG* подобен *ABC*.

Значит, построена подобная данной прямолинейной фигуре ABC и равная другой данной D та же ⟨фигура⟩ KHG, что и требовалось сделать.

Предложение 26

Если от параллелограмма отнимается параллелограмм, подобный и подобно расположенный целому, имеющий с ним общий угол, то он будет на том же диаметре, что и целый.



Черт. 28.

Пусть от параллелограмма $ABCD$ отнимается параллелограмм AI (черт. 28), подобный и подобно расположенный с $ABCD$, имеющий с ним общий угол DAB; я утверждаю, что $ABCD$ будет на том же диаметре, что и AI.

Действительно, пусть не так, но если возможно, пусть [у них] будет диаметр AGC; продолженную HI доведём до G и через G параллельно каждой из AD, BC проведём GK (предложение 31 и 30 книги I).

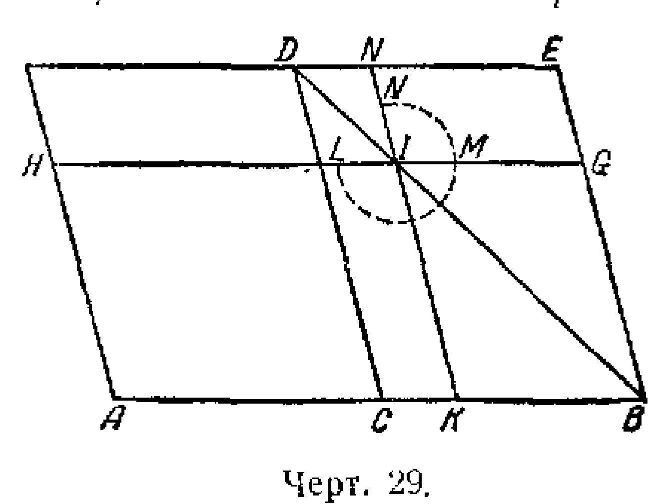
Поскольку теперь $ABCD$ будет на том же диаметре, что KH, будет значит, что как DA к AB, так и HA к AK. Вследствие же подобия $ABCD$, EH будет, что и как DA к AB, так и HA к AE (определение 1); и значит, как HA к AK, так и HA к AE. Значит, HA к каждой из AK, AE имеет то же отношение. Значит, AE равна AK (предложение 9 книги V), меньшая большей, что невозможно. Значит, не будет $ABCD$ не на том же диаметре, что и AI;

значит, параллелограмм $ABCD$ будет на том же диаметре, что и параллелограмм AI.

Значит, если от параллелограмма отнимается параллелограмм, подобный и подобно расположенный целому, имеющий с ним общий угол, то он будет на том же диаметре, что и целый, что и требовалось доказать.

Предложение 27

Из всех параллелограммов, приложенных к той же прямой и имеющих недостатки в виде параллелограммов), подобных и подобно расположенных ⟨параллелограмму⟩, построенному на половине, наибольшим будет [параллелограмм], приложенный к половине и подобный своему недостатку.*



Черт. 29.

Пусть прямая будет AB, пусть она рассечена пополам в C и пусть к прямой AB приложен параллелограмм AD (черт. 29), имеющий недостаток в виде параллелограмма DB, построенного на половине AB, т. е. CB; я утверждаю, что из всех параллелограммов, приложенных к AB, имеющих недостатки в виде [параллелограммов], подобных и подобно расположенных с DB, наибольший будет AD. Приложим к прямой AB параллелограмм AI, имеющий недостаток в виде параллелограмма IB, подобного и по-

---

*) Несколько вольный перевод евклидова ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις — недостающих параллельно-линейными фигурами.

Кроме того, следует сказать, что здесь, как и в других случаях, термин ἔλλειπον остаётся не вполне выясненным. Недостаток параллелограмма ACD, построенного на прямой AB (при $AC < AB$) — это прилежащий к нему справа параллелограмм $CBED$, который вместе с ACD даёт весь построенный на AB параллелограмм.

добно расположенного с *DB*; я утверждаю, что *AD* больше *AI*.

Действительно, поскольку параллелограмм *DB* подобен параллелограмму *IB*, то они будут на одном и том же диаметре (предложение 26). Проведём их диаметр *DB* и достроим чертёж *).

Поскольку теперь *CI* равна *IE* (предложение 43 книги I), *IB* же общая, то значит, вся *CG* равна всей *KE*. Но *CG* равна *CH*, поскольку и *AC* <равна> *CB* (предложение 1). И значит, *HC* равна *EK*. Прибавим общую *CI*; значит, весь *AI* равен гномону *LMN*; так что параллелограмм *DB*, т. е. *AD*, больше параллелограмма *AI*.

Значит, из всех параллелограммов, приложенных к той же прямой и имеющих недостатки в виде параллелограммов, подобных и подобно расположенных <параллелограмму>, построенному на половине, наибольшим будет приложенный к половине, что и требовалось доказать (27, 28).

Предложение 28

К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм, имеющий недостаток в виде параллелограмма, подобного данному; необходимо же, чтобы данная прямолинейная фигура [равную которой надо приложить], была не больше <фигуры>, построенной на половине, подобной недостатку [от <фигуры> на половине и подобную которой надо взять в недостатке].

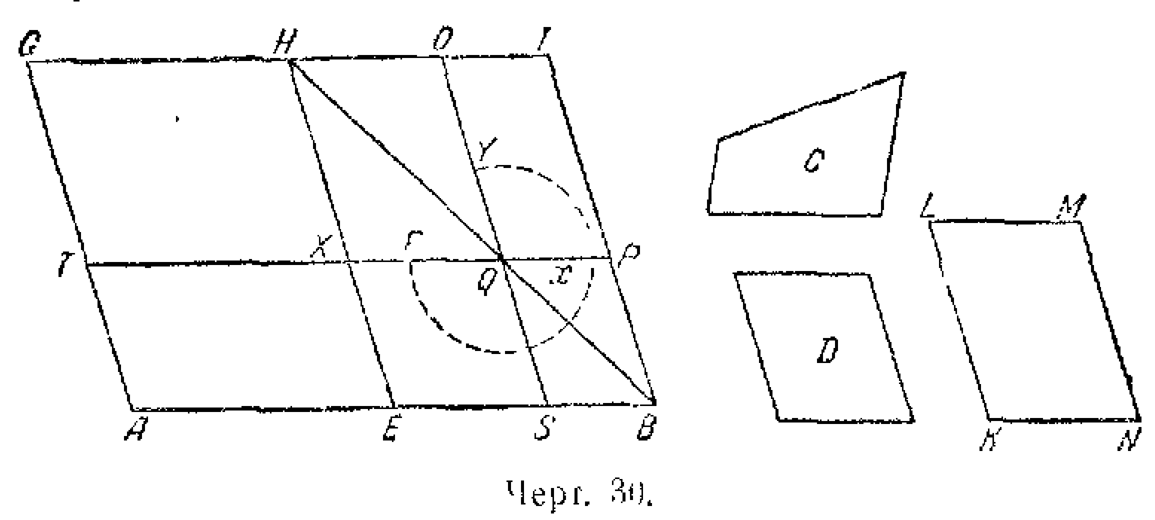
Пусть данная прямая будет *AB*, данная же прямолинейная фигура, равную которой следует приложить к *AB* (черт. 30), пусть будет *C*, не большая построенной на половине *AB* и подобной недостатку, та же, которой должен быть подобен недостаток, пусть будет *D*; вот требуется к данной прямой приложить параллелограмм, равный данной прямолинейной фигуре *C* с недостатком в виде параллелограмма, подобного *D*.

---

*) καταγεγράφθω τὸ σχῆμα — то же самое выражение, что и в предложениях 7 и 8 книги II.

Рассечём AB пополам в точке E и на EB построим $EBIH$, подобный и подобно расположенный с D (предложение 18), и дополним параллелограмм AH.

Если теперь AH равен C, то заданное уже было бы сделано, *ибо к данной прямой AB приложен равный данной прямолинейной фигуре C параллелограмм AH, у которого недостаток в виде параллелограмма HB, подобного D.*



Черт. 30.

Если же нет, то пусть GE будет больше C. Но GE равно HB; *значит, HB больше C*. Вот построим равную тому избытку, на сколько HB больше C, а также подобную и подобно D расположенную ту же ⟨фигуру⟩ $KLMN$ (предложение 25). Но D подобна HB; и значит, KM подобна HB (предложение 21). Пусть теперь KL будет соответственной HE, LM же ⟨соответственной⟩ HI. И поскольку HB равна C, KM ⟨вместе⟩, то значит, HB больше KM; значит, и HE больше KZ, а HI больше LM *). Отложим HX, равную KL, HO же, равную LM, и дополним параллелограмм $XHOQ$; значит, [HQ] равен и подобен **) KM [но KM подобен HB]. И значит, HQ подобен HB (предложение 21); значит, HQ будет на одном и том же

*) Ибо по предложению 20 будет: $HB:KM = HE^2:KL^2 = HI^2:LM^2$. Уже если $HB > KM$, то будет $HE^2 > KL^2$, $HI^2 > LM^2$, т. е. $HE > KL$, $HI > LM$ (Гейберг).

**) Так как HB подобен KM, то $\angle OHX = \angle KLM$. Значит, HQ и KM равноугольны, а поэтому и подобны (определение 1) и равны (предложение 14) (Гейберг).

диаметре с HB (предложение 26). Пусть их диаметр будет HQB, и достроим чертёж*).

Теперь, поскольку BH равна C, KM <вместе>, из которых KM равна HQ, то значит, остаток-гномон YxF равен остатку C. И поскольку OP равен XS (предложение 43 книги I), прибавим общую QB; значит, вся OB равна всей XB.

Но XB равен TE, поскольку и сторона AE равна стороне EB (предложение 1); и значит, TE равен OB. Прибавим общую XS; значит, вся TS равна всему гномону FxY. Но доказано, что гномон FxY равен C; и значит, TS равен C.

Значит, к данной прямой AB приложен равный данной прямолинейной фигуре C параллелограмм ST, имеющий недостаток в виде параллелограмма, подобного D [поскольку QB подобна HQ]**), что и требовалось сделать (29).

Предложение 29

*К данной прямой приложить равный данной прямолинейной фигуре параллелограмм с избытком***) в виде параллелограмма, подобного данному.*

Пусть данная прямая будет AB, данная же прямолинейная фигура, равную которой следует приложить к AB, пусть будет C, а та, которой должен быть подобен избыток, пусть будет D (черт. 31); вот требуется к прямой AB приложить равный прямолинейной фигуре C параллелограмм с избытком в виде параллелограмма, подобного D.

Рассечём AB пополам в E и на EB построим подобный и подобно расположенный D параллелограмм BI и по-

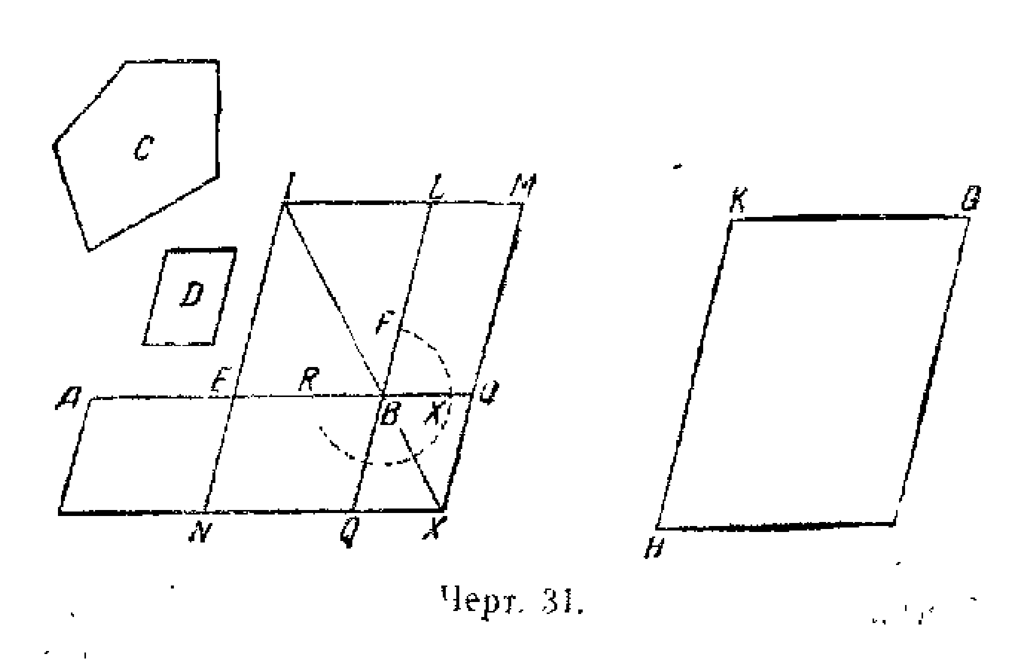
*) καταγεγράφθω τὸ σχῆμα — см. предложение 27.

**) Ибо QB подобна HQ (по предложению 24) и подобна D. Поставленные в скобках слова подложны, ибо без причины делается упоминание о HQ (Гейберг).

***) Термин ὑπερβάλλον страдает тем же недостатком, что и ἐλλεῖπον. Если взять прямые EO и EB, то при $EO > EB$ избытком надо считать параллелограмм $BOLM$, который следует отнять от всего параллелограмма $EOMI$, чтобы получить параллелограмм $EBLI$, построенный только на стороне EB.

строим равный вместе взятым BI, C, подобный и подобно расположенный D (предложение 25) ⟨параллелограмм⟩ HG.

Пусть KG будет соответственной IL, а KH соответственной IE. И поскольку HG больше IB, то значит, и KG больше IL, а KH больше IE. Продолжим IL, IE и пусть ILM будет равна KG, а IEN равна KH, и дополним MN; значит, MN равен и подобен HG. Но HG подобен EL; значит, и MN подобен EL (предложение



Черт. 31.

21); значит, EL будет на одном диаметре с MN (предложение 25). Проведём диаметр их IX и достроим чертёж.

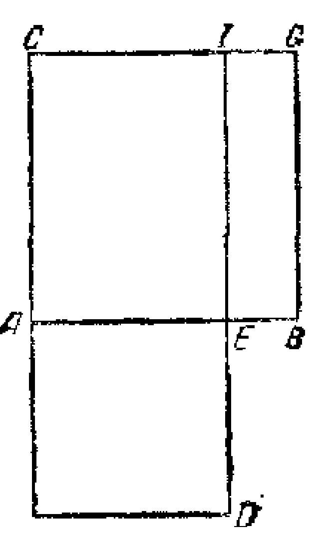
Поскольку HG равен EL, C ⟨вместе⟩, но HG равен MN, то значит, и MN равен EL, C ⟨вместе⟩. Отнимем общую EL; значит, остаток гномон RXF равен C. И поскольку AE равна EB, то и AN равен NB, то-есть LO (предложение 43 книги I). Прибавим общую EX; значит, весь AX равен гномону RXF. Но гномон RXF равен C; и значит, AX равен C.

Значит, к данной прямой AB приложен равный прямолинейной фигуре C параллелограмм AX с избытком в виде параллелограмма QO, подобного D, поскольку и OQ подобен EL (предложение 24), что и требовалось сделать (30).

Предложение 30

Данную ограниченную прямую рассечь в крайнем и среднем отношении.

Пусть данная ограниченная прямая будет AB; вот требуется рассечь прямую AB в крайнем и среднем отношении (черт. 32).



Черт. 32.

Построим на AB квадрат BC и приложим к AC равный BC параллелограмм CD с избытком — фигурой AD, подобной BC (предложение 29).

BC же есть квадрат; значит, и AD квадрат. И поскольку BC равен CD, то отнимем общее CE; значит, остаток BI равен остатку AD. Он же и равноуголен ему*); значит, в BI и AD стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14); значит, будет, что как IE к ED, так и AE к EB. Но IE равна AB**), ED же равна AE. Значит, будет, что как BA к AE, так и AE к EB. Но AB больше AE; значит, и AE больше EB (предложение 14 книги V).

Значит, прямая AB рассечена в E в крайнем и среднем отношении (определение 3) и больший её отрезок AE, что и требовалось сделать (31, 32).

Предложение 31

В прямоугольных треугольниках фигура на стороне, стягивающей прямой угол, равна ⟨вместе взятым⟩ фигурам на сторонах, заключающих прямой угол, подобным ей и подобно построенным.

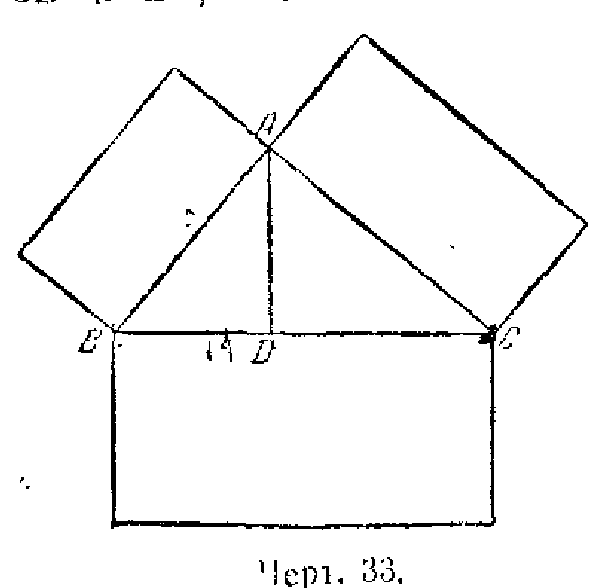
Пусть будет прямоугольный треугольник ABC, имеющий прямой угол BAC; я утверждаю, что фигура на BC равна

*) Ибо оба прямоугольники (Гейберг).

**) Ибо $IE = AC$ (предложение 34 книги I) и $AC = AB$ (Гейберг).

фигурам на BA и AC, подобным и подобно построенным (черт. 33).

Проведём перпендикуляр AD. Поскольку теперь в прямоугольном треугольнике ABC из прямого угла при A проведён к основанию BC перпендикуляр AD, треугольники ABD и ADC при перпендикуляре подобны и целому ABC и между собой (предложение 8). И поскольку ABC подобен ABD, то (по определению 1) значит, будет, что как CB к BA, так и AB к BD. И поскольку три прямые пропорциональны, то будет, что как первая к третьей, так и фигура на первой к фигуре на второй, ей подобной и подобно построенной (предложение 19, следствие). Значит, как CB к BD, так и фигура на CB к подобной и подобно построенной на BA. Вот вследствие того же и как BC к CD, так и фигура на BC к <фигуре> на CA *).



Черт. 33.

Так что и как BC к BD, DC <вместе>, так и фигура на BC к <фигурам> на BA, AC, подобным и подобно построенным **). BC же равна BD, DC <вместе>; значит, и фигура на BC равна <вместе взятым> фигурам на BA, AC, подобным и подобно расположенным ***).

---

*) Ибо ABC подобна ADC. Значит, $BC:CA = CA:CD$ (Гейберг).

**) Пусть построенные на BC, AC и AB фигуры будут a, b, c. Мы доказали, что $BC:BD = a:c$, $BC:CD = a:b$. Значит, $BC:a = CD:b = BD:c$,

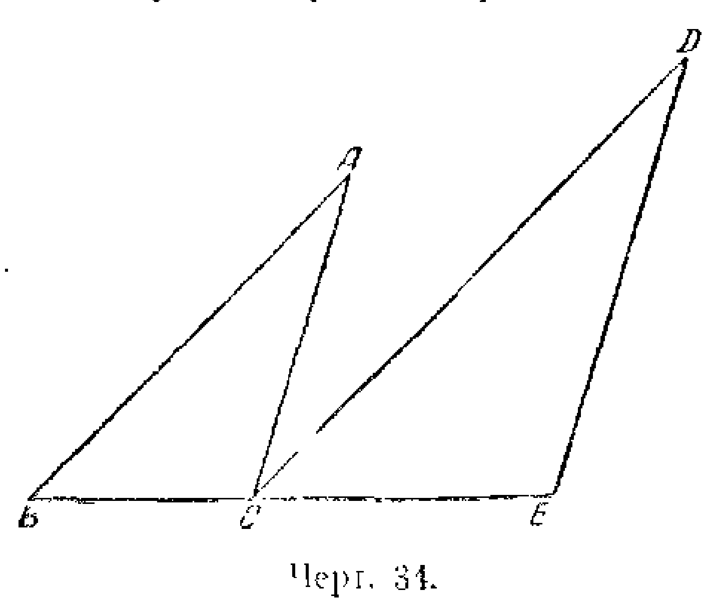
$$CD:BD = b:c,$$
$$(CD + BD):BD = (b + c):c,$$
$$(CD + BD):(b + c) = BD:c = BC:a,$$
$$BC:(CD + BD) = a:(b + c) \quad \text{(Гейберг).}$$

***) Ибо $BC:a = (CD + BD):(b + c) = BC:(b + c)$. **Поэтому** $a = b + c$ (предложение 9 книги V) (Гейберг).

Значит, в прямоугольных треугольниках фигура на стороне, стягивающей прямой угол, равна ⟨вместе взятым⟩ фигурам на сторонах, заключающих прямой угол, подобным ей и подобно построенным, что и требовалось доказать (33, 34).

Предложение 32

Если два треугольника, имеющих две стороны пропорциональные двум сторонам, приставляются одним



Черт. 34.

углом, так, чтобы соответственные стороны были и параллельны, то остальные стороны треугольников будут по ⟨одной⟩ прямой.

Пусть будут два треугольника *ABC*, *DCE*, имеющих две стороны *BA*, *AC* пропорциональные двум сторонам *DC*, *DE*, как *AB* к *AC* так и *DC* к *DE*, и *AB* параллельна *DC*, *AC* же *DE*; я утверждаю, что *BC* будет по ⟨одной⟩ прямой с *CE* (черт. 34).

Действительно, поскольку *AB* параллельна *DC* и на них упала прямая *AC*, то накрестлежащие углы *BAC*, *ACD* равны между собой (предложение 29 книги I).

Вот вследствие того же и угол *CDE* равен углу *ACD*. Так что и угол *BAC* равен углу *CDE*. И поскольку есть два треугольника *ABC*, *DCE*, имеющих один угол при *A*, равный одному углу при *D*, стороны же при равных

углах пропорциональные: как BA к AC, так и CD к DE, то значит, треугольник ABC равноуголен треугольнику DCE (предложение 6); значит, угол ABC равен углу DCE. Доказано же, что и угол ACD равен BAC; значит, весь угол ACE равен двум углам ABC, BAC. Прибавим общий угол ACB; значит, углы ACE, ACB равны BAC, ACB и CBA. Но углы BAC, ABC, ACB равны двум прямым; и значит, углы ACE, ACB равны двум прямым. Вот на некоторой прямой AC при её точке C две прямые BC, CE, расположенные не с одной стороны, образуют смежные углы ACE, ACB, ⟨вместе⟩ равные двум прямым; значит, BC будет по ⟨одной⟩ прямой с CE (предложение 14 книги I).

Значит, если два треугольника, имеющих две стороны, пропорциональные двум сторонам, приставляются одним углом так, чтобы соответственные стороны были и параллельны, то остальные стороны будут находиться на одной прямой, что и требовалось доказать (35).

Предложение 33

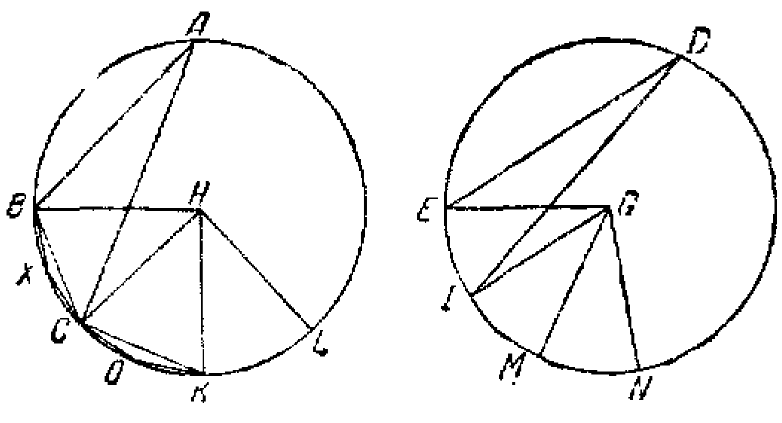
В равных кругах углы имеют то же отношение, что обводы, на которых они стоят, будут ли они находиться при центре или при обводах.

Пусть будут равные круги ABC, DEI, и пусть при их центрах H, G будут углы BHC, EGI, на обводах же углы BAC, EDI; я утверждаю, что будет как обвод BC к обводу EI, так и угол BHC к углу EGI и как угол BAC к углу EDI (черт. 35).

Отложим подряд сколько угодно равных обводу BC смежных ⟨дуг⟩ CK, KL и столько же равных обводу EI ⟨дуг⟩ IM, MN и соединим HK, HL, GM, GN.

Теперь, поскольку равны между собой обводы BC, CK, KL, будут равны между собой и углы BHC, CHK, KHL (предложение 27 книги III); значит, сколько раз обвод BL кратен обводу BC, столько же раз угол BHL кратен углу BHC. Вот вследствие того же и сколько раз обвод EN кратен обводу EI, столько же раз и угол NGE кратен EGI. Значит, если обвод BL равен обводу EN, то и угол BHL равен углу EGN, и если обвод BL больше

обвода EN, то и угол BHL больше EGN, и если меньше, то меньше. Вот для четырёх величин — двух обводов BC, EI и двух углов BHC, EGI взяты обвода BC и угла BHC равнократные — обвод BL и угол BHL, дуги же EI и угла EGI равнократные — обвод EN и угол EGN. И доказано, что если обвод BL превышает обвод EN, то



Черт. 35.

и угол BHL превышает угол EGN, и если равен, то равен, и если меньше, то меньше. Значит, будет, что как (определение 5 книги V) обвод BC к EI, так и угол BHC к EGI (предложение 15 книги V). Но как угол BHC к EGI, так и BAC к EDI (предложение 15 книги V), ибо каждый вдвое больше другого (предложение 20 книги III). И значит, как обвод BC к обводу EI, так и угол BHC к EGI и угол BAC к EDI.

Значит, в равных кругах углы имеют то же отношение, что обводы, на которых они стоят, будут ли они находиться при центре или при обводах, что и требовалось доказать (36, 37).



КОММЕНТАРИИ

Д. Д. Мордухай-Болтовского

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ I

1. **Евклидовы определения.** Большую ошибку делают те комментаторы, которые видят в евклидовых определениях *номинальные* (чисто словесные) определения. Начало этой ошибки относится к XVII в., когда признавали только два рода определений: *реальные* и *номинальные* [1]), причём первые мыслились согласно общему мировоззрению того времени иначе, чем мыслились определения в античное время.

Такой взгляд проводится в XVIII в. Ламбертом [2]). «То, что Евклид предпосылает в определениях, — говорит он, — это только *номенклатура*; он делает не что иное, как то, что делает часовщик или какой-либо другой ремесленник, который, начиная обучать ученика, знакомит его прежде всего с названием своих инструментов».

Номинальный характер в евклидовых определениях видел и Кестнер [3]) на том основании, что Евклид не старался оправдать своих определений.

Следует обратить внимание, что в определениях 10, 11, 13, 14, 17, 18 и др. книги I стоит «есть», а «называется» только в 9, 10, 16. Уже это одно говорит в пользу того, что мы здесь имеем не номинальные определения, а *определения-описания*, которые представляют собой типичные *античные* определения, правда, смешанные с *генетическими* определениями более раннего типа.

Я предлагаю читателю внимательно прочесть евклидовы определения.

Определение 1: «точка есть то, что не имеет частей». Затем идёт определение линии: «длина без ширины». Всё это, конечно,

---

[1]) (Arnauld et Nicole), L'art de penser (порт-роялевская логика), 1662.

[2]) Lambert, Organon, т. I, стр. 32. Deutscher Gelehrter Briefwechsel, т. IV, Brief an Holland, 1764, стр. 23.

[3]) Kästner, Philosophisch-Mathematische Abhandlungen, s. Wass heisst in Euclid's Geometrie möglich? § 13, стр 17.

логически не действующие определения, описания, не имеющие отношения к выводам, относящимся к точке и линии.

Но затем следует определение 3: «Концы же линии точки». Здесь не даётся *названия* и вовсе не исследуется *сущность* концов; это, конечно, не второе определение точки, которая уже *определена; это просто констатирование геометрического факта:* в концах линии точки.

Четвёртое определение, тоже логически не действующее, имеет явно выраженный характер *описания:* «Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней» *(см. комментарий 4).*

Определение 10 прямого угла не следует толковать в том смысле, что название «прямой угол» даётся тому углу, который равен своему смежному, а в том, что угол, который в таком случае получается, есть как раз тот, который называется прямым.

То же относится и к определению прямой, перпендикулярной к плоскости (предложение 3 книги XI).

Неужели определение 13, говорящее, что граница есть то, что является наиболее внешним в вещи (оконечность её), будет определением в нашем смысле? Это опять только выявление характерного свойства того, что *известно* и что уже имеет определённое название.

Только там, где указываемыми в определении признаками вещь *вполне* определяется, и где термин такой, что можно геометру приписать его введение, можно ещё видеть *номинальное* определение, а именно, в определениях 19, 20, 21, 22, 23 книги I Начал.

Выявляя характерные признаки геометрических объектов, некоторые евклидовы определения носят характер аксиом и могут быть сформулированы как аксиомы, но при этом можно прибавить: *в высшей степени очевидные.* Так, в определении I книги III Начал устанавливается равенство кругов по равенству диаметров, что в некоторых учебниках XVII в. выставляется как аксиома.

К числу такого рода определений я отношу и определение 11 книги III: «Подобные сегменты те, которые заключают равные углы или в которых углы друг другу равны».

То же следует думать и об определении подобия прямолинейных фигур (определение 1 книги VI).

В книге V имеется определение 3 отношения: *отношение — это зависимость двух однородных величин по количеству* [4]).

Это, конечно, логически не действующее и очень общее определение. Но за ним следует определение 4: *говорят, что*

---

[4]) Д. Мордухай-Болтовской, К истории пятой книги Начал Евклида, Математическое Образование, 1916.

величины имеют отношение друг к другу, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.

Это определение тоже обнаруживает *аксиоматический* характер; оно указывает, когда такая зависимость, о которой говорит определение 3, имеет место.

Описательные определения мы находим и до Евклида, например, у Платона[5]), который в диалоге «Парменид» говорит, что прямая — это линия, середина которой покрывает оба конца; это сводится к *зрительному эксперименту* над прямой, при котором прямая представляется точкой.

Определения Герона[6]) представляют развитие евклидовых описательных определений, а именно, в направлении более подробного и более лёгкого описания. Герон рассказывает, что линия не имеет ни ширины, ни глубины, что она возникает, если точка движется сверху вниз без перерыва, что она составляется из точек и ограничена точками и что она представляет границы поверхности. К тому, что Евклид говорит о прямой, Герон прибавляет то, что она (как это до него отмечает ещё Архимед) кратчайшая из линий, имеющих те же концы. К евклидову определению плоскости он прибавляет, что прямая с двумя точками на плоскости целиком оказывается на ней.

К *генетическим* определениям (т. е. определениям, дающим способ образования вещи) можно отнести только содержащиеся в книге XI определения шара (14), конуса (18) и цилиндра (21).

Но почему Евклид не даёт и окружности, а через неё и кругу, тоже *генетическое* определение?

Не проще было бы получить круг вращением прямой около неподвижной точки, чем определять окружность равенством расстояний от центра?

Я думаю, что раньше так и было. Окружность являлась кривой, проводимой циркулем; только потом произошло расслоение на определение 15 и постулат 3, утверждающий возможность получить циркулем кривую линию со свойствами определения 15.

Что же касается шара, то здесь дело обстоит как раз наоборот: для него первоначально не могло существовать генетического определения, а могло быть только *описание*; оно, вероятно, и существовало в форме, аналогичной определению *плоскости, и при этом не для шара непосредственно, а для его* поверхности. Вероятно, она определялась равенством расстояний от центра; генетическое же определение было вызвано предложением 18 книги XII, дающим отношение объёмов двух шаров.

---

5) Платон, Творения, диалог «Парменид». Пер. Карпова или Соловьева, Спб. 1863 — 1879 и 1899 — 1903.

6) Heronis Alexandrini, Opera, bearbeitet von Schmidt, Schoene, Heiberg, Leipzig, 1899—1912.

Аристотель [7, 8]) говорит обычно только о *реальных* определениях, хотя от него идёт различение номинальных и реальных определений.

По Вейдлеру [9]) номинальные определения дают только признаки различаемых вещей, реальные же говорят о происхождении. При таком понимании негенетические евклидовы определения оказываются номинальными.

В заключение заметим, что Лейбниц [10]) *номинальные* определения понимает шире, чем просто словесные; они указывают признаки, по которым можно отличить одну вещь от другой. Реальными же будут такие, которые выявляют возможность существования вещей; иначе говоря, реальными будут только оправданные определения.

Казалось бы, что с этой точки зрения следует все определения Евклида принять за номинальные. Но с точки зрения Евклида вводимые определения, повидимому, оправдывались интуицией; поэтому и с этой точки зрения его описательные определения не являются номинальными.

2. Точка. Существует несколько определений точки [11]). Прежде всего *отрицательные*, против которых решительно выступают многие методисты. Таково евклидово определение; в нём отмечается *неделимость* точки, так что совершенно одинаково определяется и точка и *актуально-бесконечно малое* неделимое в смысле Кеплера и Кавальери; оба понятия сливаются.

Конечно, евклидово определение точки менее всего подходило к идеям того времени, когда практиковался метод неделимых. Гораздо лучше с этими идеями ладило определение Герона [12]) — *точка то, что не имеет величины* (по нашему протяжения).

Но героновское определение, как и другие отрицательные определения, грешит тем, что под него подходит и много других вещей, ничего общего не имеющих с точкой.

В средние века подчёркивалось, что точка есть *место без протяжения* [13]).

---

7) Aristotelis, Opera, ed. Didot, Analytica Posteriora, кн. 2, стр. 3, 7. Topica, кн. 7, стр. 3.

8) Joh. Broscius, Aristotelis et Euclidis defensio contra Petrum Ramum, Amstelodami, 1640, — Meynard, Abregé et définitions des sciences principales et des plusieurs de leurs termes, Paris, 1694.

9) Weidlerus, Institutiones Mathematicae. Vitenbergae, 1751, Prologium.

10) Leibniz, Opera, ed. Gerhardt, т. IV, стр. 452, Lettre à Tschirnhausen.

11) См. прим. 8.

12) См. прим. 6.

13) Mich. Psellus, Compendium Mathematicum Leyden, 1647. — Savilius, Lectiones mathematicae et opticae III, — Fre-

За положительное определение точки выставляется обычно то, которым пользуется современный учебник, заставляющий мыслить точку, согласно определению 3 Евклида (являющемуся для Евклида по существу аксиомой), как границу линии. С методической точки зрения оно является лучшим.

Определение точки и линии как границы находим у Бальцера, Каталана, Рушэ-Комберусса, Бланшэ. Рейхенбенгер собирает различные определения точки: 1) точка не имеет измерений, 2) не имеет ни длины, ни ширины, ни глубины, 3) единое и неделимое, наименьшее различимое.

В чисто *схоластическом* направлении идёт Патриций[14]), пытающийся построить основы геометрии: точка для него не только то, что не имеет частей, но ещё и то, что неделимо (ибо части могут получаться и не процессом деления, который относится к континууму). Затем точка — не количество, точка не может быть больше и не может быть меньше (возрастающее им мыслится независимо от делимости). Точка не сравнима. Она не измерима. Она не занимает никакого пространства. К этим свойствам он присоединяет ещё ряд других, причём всегда отрицательных.

3. Линия. Евклидово второе определение в несколько неуклюжей форме выражает, что линия есть протяжение *одного измерения*. Интересно отметить, что некоторые выставляют характерным свойством линии не её *одномерность*, а её *двусторонность* в том смысле, что от всякой точки она протягивается только *в две стороны*, а не в бесконечное множество сторон, как поверхность.

Такое определение, конечно, относится только к бесконечно продолженным линиям, а не к отрезкам, так как в случае ограниченности на одном конце линия протягивается только в *одну* сторону (полупрямая) или совсем не протягивается.

Обычно школьное определение линии как *границы поверхности* иногда заменяется *форономическим* (в основе которого лежит движение): *линия есть то, что описывается движущейся точкой.*

4. Прямая. Выше было отмечено, что евклидовы определения[15]) носят *описательный* характер. Евклидов тип определений сохраняется в учебниках в большей или меньшей мере во все эпохи, и эти определения с *методической* точки зрения *неизбежны*.

Всякое не только *форономическое*, но даже *генетическое* определение использует то представление о геометрическом объекте, которое ученик имеет, хотя и в смутной форме, до

senius, Der mathem. Punkt. Zeitschrift der mathem. Unterricht, т. IV, стр. 350—354.

[14]) Patricius, Scientia nova, XVI в.

[15]) H. Müller, Lehrbuch der Geometrie, Leipzig, 1874.

начала изучения геометрии. И к этому представлению геометрический учебник должен приспособляться.

Нельзя отрицать, что некоторые форономические приёмы с методической точки зрения очень ценны, но форономическое определение прямой как линии, не меняющей положения при вращательном движении, с закреплёнными двумя концами совершенно не годится. Это определение приписывается Платону; оно приводится Проклом, затем Лейбницем. Определение прямой *единственностью* направления лучше, но для учебника наиболее удобно то свойство, которое намечается самим Евклидом [16].

Следует уяснить себе, что Евклид (в определении 4) имеет в виду *изогенность* прямой, т. е. сохранение всех её свойств в различных точках. Они здесь таковы же, как там. Совершенно неправильно выставляют окружность как опровержение евклидова определения: Евклид имеет в виду все свойства прямой, включая сюда и направление.

Но Лейбниц [17] (видимо, неправильно толкуя определение Евклида) имеет в виду *гомогенность*, т. е. то, что прямая в целом имеет те же свойства, что всякая её часть. В *малом* она то же, что в *большом*.

В середине XIX в. иногда приводилось определение Л. Бертрана [18], который тоже подчёркивает *изогенность* прямой; прямая характеризуется тем, что разделяет плоскость на две части, обладающие совершенно одинаковым свойством по отношению к этой прямой. Следует отметить, что это свойство, хотя и в несколько иной форме, выдвигалось Лейбницем.

Можно сомневаться в отнесении к описательным определениям лежандрова [19, 20] определения прямой как *кратчайшего*

---

[16] Kraft, Institutiones Geometricae, Tübingen, 1788.— Krause, Elemente der Geometrie, Berlin, 1875.

[17] Leibniz, Mathem. Schriften, her. Gerhardt, Abt. 2, т. III. Characteristica Geometrica, стр. 131; In Euclidis πρῶτα, стр. 183.— Zacharias, Die Definition der geraden Linie nach Cornelius und Mohrman.— Cornelius, Psychologie des Erfahrungs-Wissenschaft. Leipzig, 1892 (определение Лейбница).

[18] L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire de Géométrie, Génève, 1778. Его же, Géométrie, 1812.— Delboeuf, Prolegomènes philos. de la Géométrie 1860. Revue philosophique, т. 36—39.— Laplace, Exposition du système du monde, Paris, 1824 (есть русский перевод).

[19] H. Grassman, Ausdehnungslehre. Einleitung, 1844, Werke, т. I, стр. 28.— Dixon, The foundations of Geometry, Cambridge, 1891.— Beltini, Sulla definizione della retta linea. Periodico di Mathematica, VIII, 1893, стр. 49.

[20] Legendre, Eléments de Géométrie. 1794. Есть русский перевод 1837.

расстояния между двумя точками (оно выставлялось скорее как аксиома Архимедом)[21].

Такое определение является чем-то вроде постулата, выдвигающего некоторые свойства, которые хотя, может быть, и очевидны, но в значительно меньшей степени, чем очевидны аксиомы. Действительно, при лежандровом определении мы постулируем, что в процессе сравнения длин бесконечного множества различных линий мы в конце концов приходим к некоторой линии, длина которой оказывается наименьшей.

Следует отметить, что неясное определение Евклида истолковывается различными лицами различно.

Я считаю близким к истине толкование Симона[22], который понимает κεῖται как страдательную форму от τίθημι (кладу) и разъясняет так, что прямая есть линия, равномерно данная своими точками, т. е. линия, на которой ни одна точка не отличается от другой (свойство изогенности прямой).

Другие связывают τοῖς σημείοις (точками) с κεῖται и переводят так: прямая есть линия, равномерно расположенная относительно своих точек. При этом «равномерность» одними истолковывается в смысле определяемости прямой при помощи двух точек (что, по моему мнению, неправильно, ибо тогда наряду с постулатом 1 оказалась бы совершенно лишняя аксиоматизированная его форма, данная в виде определения).

Третьи понимают равномерность в том смысле, что на всём протяжении прямой найдутся отрезки, равные данному[23]. Это тоже я считаю маловероятным, потому что Евклид должен же был заметить, что аналогичное свойство присуще и окружности.

Энриквес[24] защищает ту точку зрения, на которой стоит Прокл[25] в своём толковании. Он считает τοῖς σημείοις определением к ἐξ ἴσου и переводит так: прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно своих точек. Это вполне соответствует разъяснению Прокла, что прямая есть такая линия, отрезок которой между двумя её точками совпадает с расстоянием между ними.

---

21) Arhimedes. Werke übers. Nizze-Strasburg, 1824, стр. 43.

22) Simon, Euclidis sechs-planimetrische Bücher, Leipzig, 1901.

23) См. Cornelius, прим. 17.

24) Энриквес, Вопросы элементарной геометрии, 1913. Статья Амальди, О понятии прямой и плоскости.

25) Procli, Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarium, bearb. Friedlein, Leipzig, 1873, Старое издание Barocius'a, Padova, 1560. — О Прокле см. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. I, стр. 463. — Hartmann, Des Proclus Diadochus Philos. Anfangsgründe der Mathematik. Philos. Abhandlungen, herausg. Rohn und Natorp, I тетр. Giessen, 1909.

Аналогично этому можно было бы сказать, что прямая есть единственная линия, направление которой совпадает с направлением относительного расположения двух её точек. Эта точка зрения, при которой приоритет предоставляется *направлению*, и прямая определяется как линия, во всех точках которой направление одно и то же, *приводится во многих учебниках*, начиная с Грассмана.

Оба эти толкования могут быть приняты только в одной из приведённых *частных* форм, так что термин «относительно» остаётся совершенно неопределённым. Нужно сказать, что нигде у Евклида не видно, чтобы понятия расстояния или направления он считал бы первичными, предваряющими понятие прямой. Очень часто понятие прямой вводится неявно при помощи постулата (Каталан, Бальцер, Рушэ, Дюгамель, Безу, Боссю), и тогда свойство, что она является кратчайшим расстоянием, уже доказывается.

Во всех таких толкованиях чисто *описательное* евклидово определение хотят сделать так или иначе логически действующим, возвести его в ранг рабочей аксиомы.

Заканчивая разбор евклидовского определения прямой, вполне уместно будет сопоставить и то, как вообще определялось понятие линии.

По Герону, линия есть то, что имеет измерение в одном лишь направлении (определение 8), поверхность — в двух (определение 10), тело же есть то, что имеет три измерения (определение 13).

Кривая Евклида и Лежандра — это линия[26]), не являющаяся ни прямой и ни ломаной. По Боссю и Безу, это траектория движущейся точки, меняющей направление своего движения. У Ламарля[27]) кривая есть траектория, описываемая точкой, скользящей по прямой, которая вращается вокруг своего конца; это определение по существу равносильно выражению уравнения кривой не в декартовых, но в полярных координатах.

Евклид определяет линию (мы теперь сказали бы — кривую) как *длину без ширины*. В настоящее время мы выразили бы это так: кривая представляет плоское множество без *внутренних* точек. Другое свойство линии — это её связность, т. е. возможность проведения через точки множества такой ломаной линии, что все стороны последней меньше любого наперёд заданного отрезка. Г. Кантор считает все свойства кривой исчерпанными в следующем определении[28]):

---

[26]) См. прим. 20, также I. Müller, Lehrbuch der Mathematik, Halle, 1844.

[27]) Lamarle, Exposé Géométrique du calcul diff. et intégr. Paris, 1861.

[28]) Mangoldt, Die Begriffe der Linie und Fläche. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, т. III, стр. 130.

Кривая есть совершенное и связное множество без внутренних точек.

В поисках обобщения иногда отходят от более естественного геометрического определения кривой и определяют её аналитически. Таково *жордановское* определение кривой при помощи параметрических уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где φ и ψ представляют непрерывные функции параметра t. Это определение вполне отвечает форономическому определению линии как траектории движущейся точки; параметр t в последнем случае является временем.

Для жордановского[29] определения существенно то, что если рассматриваемая кривая замкнута и не имеет кратных точек, то она делит плоскость на две части — внешнюю и внутреннюю[30].

5. Поверхность. О поверхности приходится повторить всё то, что сказано выше о линии. Хорошо всем известно школьное определение поверхности как границы тела. Часто оно заменяется форономическим: поверхность есть то, что описывается движущейся *линией. При этом, однако, не замечают того*, что линия может описывать тоже линию, а не поверхность — это в том случае, если она может двигаться по самой себе. Такова прямая, двигающаяся по своему направлению, или окружность, вращающаяся около своего центра.

6. Плоскость. Евклидово описательное определение плоскости, основанное на изогенности, не пользуется распространением. Также не пользуется распространением лейбницевское определение плоскости, основанное на гомогенности и аналогичное его определению прямой. Оно в значительной мере осложняется введением корректива: следует требовать подобия части и всей плоскости, предполагая, что и часть и целое обнимаются подобными линиями.

Л. Бертран[31]) определяет плоскость как поверхность, делящую пространство на части, находящиеся к ней в одинаковом отношении.

Обычное наше определение плоскости как такой поверхности, с которой совмещается *всякая прямая, имеющая* с ней две общие точки, должно быть отнесено к *форономическим*; оно совершенно не евклидовского характера и более подходит к определениям геометров до Евклида.

---

[29]) Jordan, Cours d'Analyse, 2 éd., т. I, Paris, 1893. стр. 91.

[30]) Н. Лузин, Теория функций вещественного переменного, Москва, 1940. — Osgood, Lehrbuch der Functionentheorie, Leipzig. 1906, стр. 120—121.

[31]) См. прим. 18.

Следует отметить *генетическое* определение плоскости как поверхности, образуемой движением прямой, проходящей через точку и пересекающей прямую.

Данное выше генетическое определение, выдвинутое Крелле[32], было вызвано замечанием Гаусса[33] об обычном определении плоскости, которое Крелле приписывает Р. Симсону[34], хотя оно имеется уже у Герона[35]. Гаусс замечает, что это определение содержит в себе постулат (или теорему), что плоскость получается проектированием прямой из какой-либо точки, ей не принадлежащей.

Крелле пытался, но не вполне удачно, доказать, что вид получаемой поверхности не зависит от выбора точки и прямой и что прямая, имеющая две точки на этой поверхности, целиком лежит на ней.

Форономическое определение плоскости даётся Бальцером и Уэлем. Дюгамель определяет плоскость как поверхность, описываемую прямой, вращающейся вокруг другой прямой (оси вращения) и ей перпендикулярной. Отметим в заключение ещё довольно искусственное определение, приводимое тоже Лейбницем и используемое Лобачевским и Больяй: *прямая есть геометрическое место точек, равноотстоящих от двух заданных точек.*

7. **Угол.** Герон[36] определяет угол несколько иначе, чем Евклид: угол — это сжимание поверхности в точке, производимое ломаной линией (определение 11). Плоский угол — это сжатие в точке (определение 12).

Евклидово определение угла[37] как наклонения было наиболее распространено в школе XIX в. Интересно, что параллельно ему даётся и другое определение, которое, как *чисто номинальное*, выдвигается уже и современной формально гипотетической геометрией, например у Гильберта[38]. Угол здесь сводится просто к *паре прямых*. Это определение даётся и другими авторами только с целью «выдержать систему», а именно, до изучения фигуры, образованной *тремя* прямыми, рассмотреть фигуры, образованные сперва одной, затем *двумя* прямыми.

---

[32] Crelle, Zur Theorie der Ebene, Crelle's Journal für Mathematik, т. 45, 1845. — Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie, Berlin, 1847.

[33] Письмо к Бесселю от 27.VII 1827.

[34] R. Simson, Euclidis elementorum libri priores sex item undecima et duodecima, Glasguae, 1756.

[35] См. прим. 6.

[36] Tannery, Quelques fragments d'Apollonius de Perge (определение Герона). Bulletin des sciences mathem., 2 série, 5, 1881.

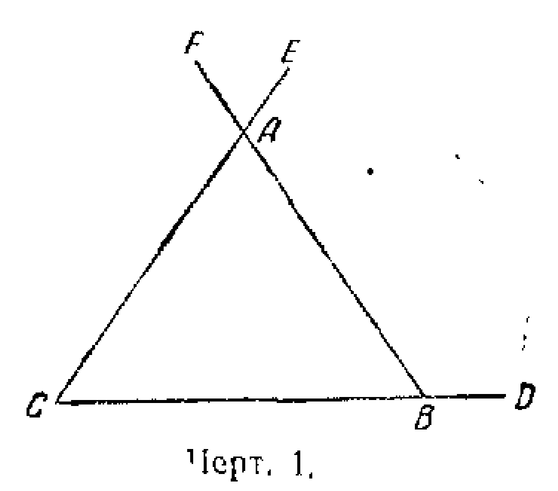
[37] См. также Wernicke, Geométrie des Maasses, Braunschweig, 1874.

[38] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899—1930. Есть русский пер. под ред. П. К. Рашевского, 1948.

Там, где прямая определяется как линия *одного направления*, и угол определяется как различие направлений[39]. Это определение впервые встречается у Арнета[40] и Винтера[41] и усваивается многими учебниками.

У форономистов угол перестаёт быть евклидовым наклонением: он даже *не мера вращения*[42] (так как мера вращения — число, а форономисты предпочитают оперировать *образами*) — это просто отклонение направления при вращении.

Угол и угловое пространство. Бертран определяет угол как неопределённую часть плоскости, ограниченную двумя прямыми, пересекающимися в одной точке.



Черт. 1.

Некоторые учебники рассматривают оба понятия — угол в евклидовском смысле (Winkel) и угол в бертрановском смысле (Winkelraum — угловое пространство)[43].

Бертран сравнивает углы и угловые пространства: они могут быть больше и меньше. Более того, он сравнивает их с параллельными полосами. Часть плоскости между параллельными потому меньше угла, что плоскость заполняется конечным числом углов, но бесконечным числом полос.

То, что внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного, т. е. что $\angle ABD > \angle ECB$ (черт. 1.), следует

---

[39] Величины отклонения: Wagner (1874), Fabiani (1871). — Изменение направления: Schlömilch, Geometrie des Maasses, 1874. Martus (1890), Milinowski (1881).

[40] Arneth, System der Geometrie, Stuttgart, 1840.

[41] Winter, Die Elemente der ebenen Geometrie, Leipzig, 1840. Также August (1852), Kunze (1857), Salomon (1857). Fischer (1873), Fresenius (1853), Baltzer, Beck и др.

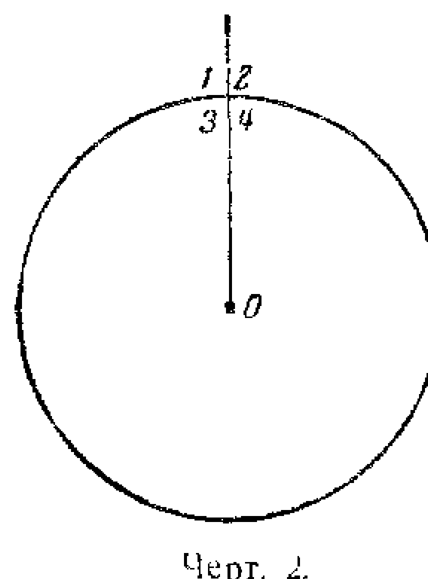
[42] L. Bertrand (1812), Crelle (1826), Francoeur (1841). Schlegel (1872), Spiecker, Ebene Geometrie, Baltzer Die Elemente der Mathematik 1874. Polster (1877), Korner (1879), Heger (1882), Kommerell-Finck (1882), Noack (1890). — Simon, Die Elemente der Geometrie, Strassburg, 1890, Шохор-Троцкий (1891).

[43] Евклидово определение у Schweins (1808), Forstner (1826), van Swinden (1834), Becker (1859), Snell (1857), Brockman (1871), Kambly (1884), Fischer (1877), Hartmann, Helmes (1874).

из того, что первый составлен из части $EABD$ и угла EAF, а второй из той же части $EABD$ и конечного треугольника ACB [44]).

Рёссель подчёркивает, что угол следует мыслить не как часть плоскости, но как часть пучка. Угол в пучке лучей аналогичен отрезку на прямой линии. Но Энриквес различает *область угла* как часть плоскости и *угол* как часть пучка [45]).

8. Перпендикуляр. Евклид не имеет термина «смежный угол». Мы начинаем с определения смежного угла и определяем прямой угол как равный своему смежному. Рамус [46]), стараясь всегда раньше определять *род*, а затем перейти к *виду* (например, от общего понятия перпендикулярности и параллельности перейти к этим понятиям в отношении к прямой), даёт такое определение перпендикулярности: «прямые или вообще линии взаимно перпендикулярны, если одна, падая на другую, равномерно лежит между отрезками другой».



Черт. 2.

Рамус не может определить перпендикулярность с помощью смежных углов, ибо согласно его плану общие свойства линии следует излагать раньше, чем свойства углов.

Как следует понимать слово: равномерно (aequaliter)? Конечно, не в смысле равенства смежных углов. Оно означает: по одну сторону падающей кривой или прямой то же, что по другую (см. бертрановское определение прямой). Это безусловно верно для каждой из двух пересекающихся перпендикулярных прямых.

Но радиус круга и окружность удовлетворяют этому требованию лишь наполовину: пространства в смежных углах *1* и *3*, образованных окружностью с прямой, отличаются между собой, но пространства *1* и *2*, образованные прямой с окружностью, одинаковы (черт. 2).

По Рамусу, радиус перпендикулярен к окружности, но не обратно.

9. Развёрнутый угол. Многие учебники вводят понятие *развёрнутого* угла, отвечающего случаю, когда одна сторона

---

44) См. прим. 18.

45) Подробности см. Schooten. Die Planimetrische Unterricht Leipzig, 1890.

46) Petri Rami, Geometriae libri 27, Basileae, 1567. Scholarum mathematicarum libri unus et triginta, Basileae, 1569.

служит продолжением другой[47]). Прямой угол тогда определяется как половина развёрнутого угла. Равенство прямых углов есть тогда прямое следствие 6-й аксиомы Евклида. Вывод предложения 13 о сумме смежных углов упрощается. Но развёрнутый угол может появиться только в том случае, если угол мыслится как *поворот*; для Евклида же, у которого угол есть *наклонение*, развёрнутый угол не имеет смысла.

10. Тринадцатое определение. Является ли это определение чисто номинальным? Сводится ли оно к тому, что одно слово «оконечность» заменяется другим «граница»? Я думаю, что это не так: оно, как и определение 3 Евклида, утверждает, что то, что ограничивает что-либо, вполне его определяя, является в нём самым крайним.

Оконечность является *родом*, граница — *видом*. Лейбниц определяет границу как общий член, присущий двум, не имеющим общих частей объектам.

11. Фигура. Следует обратить внимание на то, что Евклид мыслит фигуру не как совокупность точек и прямых, как, например, понимаются в проективной геометрии треугольники. Для Евклида треугольник вовсе не является совокупностью трёх прямых, не пересекающихся в одной точке, а ограниченной этими прямыми частью плоскости. Проективный треугольник остаётся треугольником, если изъять внутри него всю или часть плоскости; евклидов же треугольник перестаёт в этом случае быть треугольником.

Очень далеко от Евклида *логистическое* определение фигуры у итальянского геометра второй половины XIX в. Пиери. Для него фигура есть *класс* точек. Две фигуры тождественны или совпадают, если они построены из одних и тех же точек.

12. Круг и окружность. Круг для античной мысли имел важное философское значение. По Аристотелю[48]), лёгкие тела прямолинейно двигаются вверх, тяжёлые вниз, к центру земли (тяжёлыми элементами являются земля и вода, лёгкими — воздух и огонь). Небесная же материя, из которой состоят планеты и звёзды, как *совершенная* должна двигаться по *совершенной линии* — окружности. Платон много говорит о круге и определяет его так же, как Евклид (диалог Парменид, «Круглое есть то, оконечности которого везде одинаково отстоят от середины»).

То, что Евклид очень много говорит о круге, объясняется не только тем, что круг проще других кривых и легче поддаётся исследованию, но и тем, что он более интересен.

Античная проблема о квадратуре круга[49]), т. е. о разыскании квадрата, равновеликого кругу, совершенно обходится Евк-

---

[47]) См., напр., Долгушин, Систематический курс геометрии, СПБ, 1912.

[48]) Aristoteles, Opera, ed. Didot (De Coelo).

[49]) Рудио, О квадратуре круга, М. — Л., 1934.

лидом не только как ещё не разрешённая, но и как не имеющая отношения к основной цели, которую он себе ставит.

Комментатор Прокл [50]), который жил в эпоху упадка античной математики, больше всего распространяется о круге; метафизические понятия в его время приобретают уже магическое значение. Он много говорит о простоте прямой и круга и старается опровергнуть мнение о большей сложности окружности в сравнении с прямой. Даже его толкование евклидовского определения прямой (прямая линия есть та, которая равна расстоянию между её концами), выражающее совсем не то, что хотел сказать сам Евклид, приводится, чтобы получить основу по существу для магических выводов.

Комментаторы, начиная с Прокла, долго останавливаются на круге. В то время как из земных тел тяжёлые падают к центру земли, лёгкие же подымаются вверх, небесные тела уже по своей природе двигаются по совершенным линиям — окружностям. Эта мысль очень крепко засела в головах учёных и направила астрономию по неверному пути. Вместо эллиптических орбит старались заставить планеты двигаться по кругам (эпициклам), центры которых в свою очередь двигались по другим кругам (деферентам); так продолжалось вплоть до Кеплера, показавшего, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце.

13. Слова «которая называется окружностью» и «на окружность круга» Гейберг считает позднейшей вставкой, почему они и поставлены в квадратные скобки. Правда, они имеются в большинстве дошедших до нас рукописей, но их нет у античных комментаторов, а также и в папирусе, найденном при раскопках Геркуланума и содержащем отрывок из евклидовых «Начал». По сути дела они излишни, так как греческий термин περιφέρεια (наше «периферия»), означающий у Евклида всю окружность, так и её часть — дугу, в обиходном языке значит просто «обвод». Необходимость дать перевод, который читался бы как с этими словами, так и после их исключения, объясняет несколько тяжёлую конструкцию фразы.

14. Центр. Слово τὸ κέντρον обозначает колющее орудие, которым в древности подгоняли животных в упряжке (старое русское слово «рожон»). В нашем случае речь идёт об острие ножки циркуля, закреплявшейся при вычерчивании круга. Этим термином пользовался ещё автор первых «Элементов» Гиппократ. Латинский термин centrum возникает не сразу. У Марциана Капеллы (5 в. н. э.) ещё говорится «punctum circuli» (точка круга) и «media nota circuli» (средняя метка круга).

15. Класс линий. Деление линий на εὐθεῖαι (прямые), περιφερεῖς (круговые) и μικταί (смешанные), по Проклу, следует относить к Платону и Аристотелю. Кривые линии греки делили ещё на ἑλικοειδεῖς (винтовые, или спиральные — вообще кривые, полу-

[50]) См. прим. 25.

чаемые движением точки) и καμπύλαι (изогнутые — кривые, получаемые в результате сечения кривой поверхности — например, конические сечения).

16. Род и вид фигур. Для нас параллелограмм — это *род*, прямоугольник — *вид*, другой вид — ромб. Прямоугольник — это параллелограмм с прямыми углами, квадрат — это прямоугольный ромб. По Евклиду, ромбоид (параллелограмм) считается таковым только при условии, что он не равносторонний и не прямоугольный, т. е. не ромб и не прямоугольник. Впрочем, подведение прямоугольника под параллелограмм, а в особенности квадрата под ромб, вовсе не является совершенно бесспорным с методической точки зрения приёмом, и школьная практика совершенно определённо указывает на большие затруднения при проведении другого деления, чем у Евклида.

Следует отметить, что под трапецией Евклид разумеет не то, что мы, а четыреугольник, не подходящий ни под одно из четырёх вышеприведённых определений.

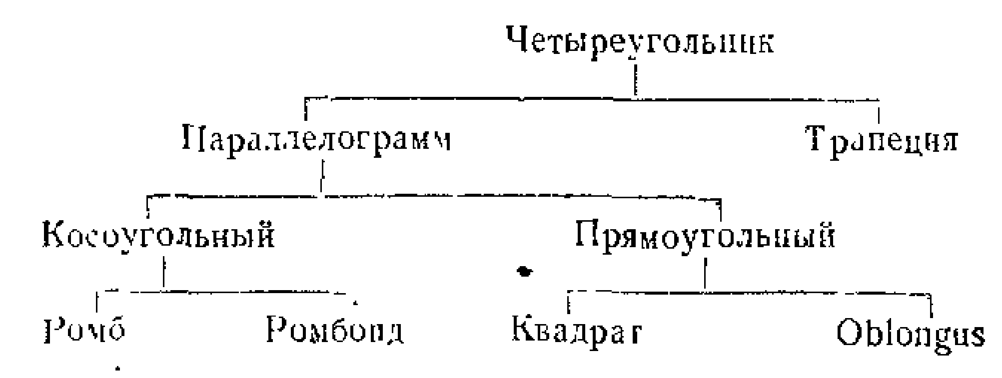
Но как это ни странно, Евклид в стереометрических книгах в противоречие со своими определениями говорит о прямоугольнике как о прямоугольном параллелограмме и о ромбе как о равностороннем параллелограмме.

Рамус, исправляя Евклида, заменяет евклидову схему[51]:

Род: Четыреугольная фигура

Виды: Квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм, трапеция

другой, в которой выдержано дихотомическое деление:



У него ромбоид нечто отличное от параллелограмма и прямоугольника; но, как у нас, прямоугольник не противопоставляется параллелограмму, а мыслится как вид параллелограмма. Он создаёт особый термин oblongus (продолговатый) для прямоугольника — не квадрата, евклидовского ἑτερομήκης.

[51]) Ramus, Geometria. Basileae, 1569. - Ch. Wolff, Elementa Matheseos, 1732, t. I, § 78.

17. Параллельные прямые. Недостаток евклидова определения параллельных состоит в том, что такое определение *не может быть проверено*; оно заключает некоторый признак, в отсутствии которого мы можем убедиться только без конца продолжаемым процессом. Это определение совершенно не соответствует настроению античного ума, отвергавшего бесконечное. Представляется вероятным, что искать доказательство 5-го постулата древних заставляла вовсе не недостаточная очевидность этой аксиомы, а только её *неприемлемая в то время форма.*

Определению параллельных вполне соответствует и евклидов постулат параллельности. И в этом случае возможно, что прямые встретятся на таком большом от нас расстоянии, что мы не будем в состоянии это установить.

Все эти дефекты отпали бы, если бы мы определили параллельные как две равноотстоящие друг от друга прямые и, кроме того, добавили бы положение, что при этом получаемые в пересечении с третьей прямой соответственные углы равны. Такое определение параллельных предлагалось в древности Посидонием, затем горячо защищалось Рамусом [53] и Схоутеном и в последствии проводилось в некоторых учебниках.

Введение такого определения, конечно, должно быть оправдано, иными словами, должно быть доказано, что геометрическое место точек, расстояния которых до данной прямой равны, тоже будет представлять некоторую прямую. В неевклидовой геометрии такое положение, как известно, уже не будет справедливым.

Определение параллельных прямых как равноотстоящих затемняет аксиоматическую конструкцию геометрии, ибо требует введения в качестве аксиомы положения, которое не только не очевидно, но в неевклидовых геометриях и неверно. Поэтому, в то время как в других местах выявляются аксиомы более высокой степени очевидности, эту «аксиому» приходится затушёвывать и обходить молчанием. Затем, если бы мы всё-таки попытались явно формулировать эту аксиому, то при дальнейшей разработке встретились бы с рядом серьёзных затруднений. Вводя понятие о расстоянии между параллельными, мы должны были бы предположить аксиому, что прямая, перпендикулярная к одной из параллельных, будет перпендикулярна и к другой, или какую-нибудь другую, ей эквивалентную.

Таким образом, до теоремы о параллельных можно говорить лишь о расстоянии точек прямой l' до прямой l, опуская из них перпендикуляры на l.

Но тогда параллельность будет односторонняя: если $l' \parallel l$, то остаётся открытым, будет ли $l \parallel l'$?

Несмотря на свои недостатки, евклидово определение параллельных остаётся всё-таки *лучшим.* Если определять параллельные как прямые, образующие равные углы с *определённой* транс-

---

[53]) См. также Lambert, Briefwechsel, I, I, стр. 23.

версалью, то приходится доказывать, что то же свойство имеет место и для других трансверсалей.

До доказательства этого положения определение заключает элемент произвола; остаётся невыясненным, как следует выбирать эту одну определённую трансверсаль. Правда, можно в качестве этой трансверсали брать перпендикуляр и определить параллельные как перпендикулярные к одной прямой; но в этой форме признак, выдвигаемый в определении, является наименее характерным. На неевклидовой плоскости такие прямые являются *сверхпараллельными*; они расходятся в обе стороны от общего перпендикуляра.

В некоторых учебниках параллельные определяются как прямые *одного направления* [53]). Конечно, существует *доматематическое* понятие о направлении, но оно не может быть математизировано и вложено в аппарат логической геометрии.

Такая перетасовка, т. е. возведение направления в первичное понятие, а параллелизма в производное, выходит совершенно из рамок интуитивно-логической геометрии Евклида.

18. Постулаты. Евклид не задавался целью вывести все свои положения *силлогистически* из немногих высказанных им определений, постулатов и аксиом. Его целью было лишь *убедить читателя в определённых истинах*, и он вовсе не считал единственным способом убеждения формально логический вывод положений из признанных читателем в начале изложения истин, но считал, что убедить можно специальной операцией, вызывая в уме образ с непосредственно очевидным свойством.

Очевидность только рационалистами XVII в. вполне определённо признана за критерий истинности положений, в аристотелевской же логике она не играет этой роли.

За правильность предпосылок, с которых начинается цепь доказательств, говорит только их *общепризнанность*, вследствие чего аксиомы и называются κοιναὶ ἔννοιαι (общие понятия).

Доказательства Евклида вполне отвечают схеме, выработанной *софистикой* [54]). Вначале софист приводит противника к признанию некоторых положений, отнюдь не апеллируя к очевидности, ибо противник мог бы поднять вопрос об *относительности* понятия очевидности и признать для себя не очевидным то, что для противника вполне очевидно.

Более сильным фактором является *общепризнанность* положений, приводящая к тому, что отрицающий их противник рискует попасть в смешное положение.

---

[53]) Kosack (1857), Gerneth (1853), Polster (1878) — прямые равного направления. — Schlegel, Systematische Raumlehre, Leipzig, 1872 — прямые равного положения.

[54]) О софистах см. диалог «Протагор» Платона. Гиляров, Греческие софисты, Москва, 1870. — Ягодинский, Протагор, Казань, а также любой курс истории греческой философии.

Этим и объясняется то, что аксиомы стягивались к самому началу сочинения, а не вводились по мере надобности при дальнейшем развитии излагаемых теорий.

Но что такое постулаты, выставленные Евклидом рядом с аксиомами?

Неправильно было бы относить к аксиомам только очевидные положения общего характера (например, касающиеся общих свойств величин, как аксиомы 1, 2 и др.), а постулаты отождествить только со специально геометрическими положениями. Действительно, хотя аксиома о параллельных фигурирует у Гейберга как постулат 5, но аксиома 7, говорящая о равенстве налагающихся фигур, носит определённо геометрический характер.

Далее, гейберговская классификация аксиом и постулатов не может всё-таки быть общепризнанной. Ведь установил же Пейрард другую классификацию, пользуясь, повидимому, в основном теми же источниками, которые были известны и Гейбергу. По крайней мере по моему глубочайшему убеждению, аксиома о параллельных определённо была ранее аксиомой, а не постулатом, как она фигурирует в издании Гейберга.

Только отказавшись от проектирования в прошлое современных формально логических понятий, мы будем в состоянии понять, что представляли для самого Евклида постулаты.

Евклид вовсе не приписывал идеального существования геометрическим объектам, как это делал Платон. При доказательстве какой-нибудь теоремы производилось *построение* нужной геометрической фигуры, которая, таким образом, и вызывалась к существованию. Возможность существования прямой, круга и т. д. обусловливалась признанием возможности производящего их акта, мы сказали бы — построения.

Более того, признание возможности этого акта вынуждало к признанию некоторых истин; так, признавая согласно постулату 3 возможность описывания кругов, мы тем самым приходили к признанию необходимости пересечения кругов, проходящих через центры друг друга.

Гемин даёт объяснение, вполне согласное с предлагаемым: «постулат, — говорит он, — представляет требование найти и сделать то, что достигается просто и непосредственно, в чём ум не затрудняется ни в понимании, ни в построении».

Прокл, говоря о различии теорем и проблем и отмечая, что целью первых является *познать*, а целью вторых — *сделать*, приводит в соответствие с первыми аксиомы, а со вторыми — постулаты, определяя последние близко к Гемину.

Гоббс [55]) вполне ясно выражает ту же мысль. По его мнению, то, что называется постулатом, — это основа не *доказательств*, а *построений*, не знания, а возможности существования.

---

55) Hobbes, Opera, London, 1839, De corpore. VI, § 13, стр. 22.

Правда, в XVII в. постулаты эволюционировали в аксиомы: они сделались просто *менее очевидными* аксиомами, причём и в настоящее время многие держатся этой точки зрения, совершенно неправильно толкуя Аристотеля. В учебниках XVII в. можно также встретить определение постулатов как не вполне очевидных, но не нуждающихся в подтверждении истин, основанных на *соглашении*.

У Арно[56]) постулаты совершенно определённо становятся аксиомами. Изложив ряд аксиом о величинах *вообще*, он переходит к видам величин; после аксиомы о том, что прямая — кратчайшее расстояние между двумя точками, он приводит уже как *аксиомы* три евклидовых постулата; после них идут аксиомы о том, что прямые, имеющие общий отрезок, совпадают, что две прямые могут пересекаться лишь в одной точке, что две сближающиеся прямые, продолженные в одну сторону, пересекаются.

В учебниках XVIII в. большей частью аксиомы, следуя Евклиду, отделяются от постулатов. Аксиомы — это те предложения, истинность которых настолько очевидна, что они всякому мыслящему уму тотчас выявляются, вследствие чего никем не могут отрицаться и поэтому не нуждаются в доказательстве. В этом определении *непосредственность выявления* выставляется как признак аксиомы. Но при развитии геометрии аксиомы высокой степени очевидности выплывают только постепенно; можно даже сказать, что чем более очевидной являлась аксиома, тем позднее она включалась в систему геометрии. Кроме того, характерным свойством аксиомы считалась её *недоказуемость*. Что же касается постулатов, то они содержат то, что должно быть *сделано* или *принято* для того, чтобы какая-нибудь теорема могла быть выведена. Таким образом, в разряд постулатов попадают и не вполне очевидные положения, истинность которых только *принимается*.

В школьном Евклиде Тодгентер[57]) даёт такое определение евклидовых постулатов:

«Постулаты устанавливают, что принимаемая нами операция даёт результат, например, что мы можем провести прямую между двумя точками, продолжить её, описать круг данным радиусом».

В евклидовой системе недостаёт положения взаимного перному: две прямые пересекаются только в одной точке. В геометрии Гильберта это положение доказывается, а у Евклида даже не выставляется как аксиома, а просто остаётся скрытым под порогом сознания положением, которым Евклид, сам того не замечая, пользуется.

Указанный выше сдвиг в понимании постулатов резко выявляется в «Характеристике» Лейбница. Его комментарии и

---

56) Arnauld, Nouveaux éléments de Géométrie, Paris, 1687.

57) Todhunter, Euclid for the use of schoolls and colleges, 1869.

дополнения к системе постулатов Евклида ясно обнаруживают сдвиг последних в сторону аксиом.

Первый постулат о возможности проведения прямой между двумя точками уже не является требованием *возможности построения*; он просто утверждает, что построенная таким образом прямая является единственным геометрическим местом уже существовавших точек, обладающих определённым свойством.

Х. Вольф уже совершенно открыто обращает первый постулат в аксиому: между двумя точками *проходит* только одна прямая.

То же следует сказать и о втором евклидовом постулате, утверждающем возможность продолжения прямой. По Вольфу, этот постулат тотчас же вытекает из *определения* прямой как линии, часть которой подобна целому, ибо если часть продолженная образует целое, то и целое продолжением может дать большее (т. е. новый отрезок).

Особое место среди постулатов занимают 4 и 5. Мне представляются неубедительными объяснения Цейтена правильности отнесения их к постулатам, а не к аксиомам. Ему приходится отказаться от определения постулатов как требований возможности построений, из которых, по Евклиду, вытекает существование фигур, получившихся в результате этих построений. Вместо этого он определяет постулаты как утверждения существования того, что желательно допустить без всякого доказательства и проверки. Таким образом, забыв то, что он сам раньше говорил, и не обращая внимания на форму первых трёх единственно совершенно бесспорных постулатов, Цейтен уклоняется в сторону псевдоаристотелева понимания постулатов как истин меньшей степени очевидности. Цейтен подчёркивает *экзистенциальный* характер постулатов, которые, таким образом, утверждают не наличие некоторых свойств у объектов, а существование самих этих объектов, причём существование это понимается уже не в евклидовом смысле [58, 59]).

В постулате 4 Цейтен видит утверждение существования и, кроме того, единственности существующего объекта, в то время как сама форма выражения ясно говорит об общем свойстве всех прямых углов — их равенстве. В постулате 5 он усматривает утверждение о существовании пересекающихся прямых. То обстоятельство, что в постулатах 1 и 2 нет указания на единственность возможного построения, он считает их определённым дефектом. Однако дефект этот полностью пропадает, если понимать постулаты исключительно лишь в смысле утверждения возможности описываемого построения. Не говорят ли эти тщет-

---

[58]) Zeuthen, Om Konstruktions Existensbevis in den Græske Mathematik, Nyt Tidskrift for Mathematik. — Цейтен, История математики в древности и в средние века, М. — Л., 1932.

[59]) Hinton, Euclide et constructions, Scientia 30, 1926.

ные попытки оправдания подобного разделения постулатов и аксиом за то, что такое разделение является позднейшим ошибочным исправлением того, что находилось в тексте самого Евклида или в более ранних его копиях.

В заключение должно отметить, что постулаты ограничиваются употреблением линейки и циркуля. Линейка предполагается не градуированной, исключающей возможность числового измерения расстояний. С циркулем невозможны другие операции, кроме описания окружности из данной точки радиусом, равным данному раствору, который во время операции предполагается неизменным. При таком понимании геометрия перестаёт быть чисто логической дисциплиной: линейка и циркуль с дозволенными операциями служат для убеждения так же, как и силлогизм.

19. Предки аксиом сочетания. Лежандр доказывает, что две прямые, имеющие две общие точки, совпадают на всём своём протяжении. По Мансиону, его доказательство представляет ложный круг, так как без этого положения нельзя установить понятия смежного и прямого угла. Каталан, Руше и др. выбрасывают эту теорему из «элементов» Лежандра [60]).

Из евклидовых постулатов развились позднее аксиомы сочетания Гильберта [61]).

Плоскостными аксиомами сочетания являются следующие:

I_1. Две различные точки A и B всегда определяют прямую a.

I_2. Любые две различные точки прямой определяют эту прямую.

I_3. На прямой всегда существуют по меньшей мере две точки.

Аксиомы, отвечающие 1 и 2 евклидовым постулатам, получаются. разбивая I_1 на две части: «точки A и B определяют отрезок AB» и «A, B определяют продолжение отрезка».

По Гильберту, существует *бесконечная прямая*, к ней и относится аксиома I_1, по Евклиду, её нет. Всякая прямая является конечной, но *она может быть продолжена*.

Постулат I говорит об операции, дающей объект целиком. Постулат 2 говорит о процессе, дающем потенциальную бесконечность.

20. В тексте Евклида стоит διάστημα (от корней δι'α-ἵστημι рас-ставляю). Этот термин вполне возможно было бы перевести словом «расстояние», если бы последнее не включало в себя определённый метрический оттенок. Евклидово διάστημα есть отрезок, начинающийся в данном центре, но никоим образом не числовая мера этого отрезка, прочно связанная с нашим термином «расстояние».

Точно так же было бы ошибочным переводить его словом «радиус», поскольку, как видно из дальнейшего (предложение 2), в него вкладывается более узкий смысл.

---

[60]) См. прим. 20.

[61]) См. прим. 38.

21. Постулат 3. Этот постулат для своего правильного понимания требует нескольких разъяснений. Дозволенные у Евклида операции с циркулем несколько отличаются от современных. Постулат 3 разрешает описывать окружность из точки A радиусом, равным заданному *отрезку* AB, начинающемуся в точке A. Это объясняется тем, что циркуль заменил собой верёвку, с помощью которой описывается окружность радиусом, равным всей верёвке или только её части.

Перенос отрезков циркулем является операцией недозволенной, как это видно из анализа первых трёх предложений книги I «Начал».

22. Равенство прямых углов. Это положение в настоящее время во всех учебниках доказывается.

Кажется, Вольф[62]) первый начал доказывать это положение. Следует отметить, что доказательство Лежандра зависит от аксиом непрерывности, так как он мыслит, что углы образуют систему непрерывных величин, между тем Гильберт даёт доказательство, не зависящее от аксиом непрерывности.

23. Эквиваленты аксиомы о параллельных. Ещё в античное время делались попытки доказать эту аксиому, пользуясь (большей частью *скрытыми*) более очевидными положениями — аксиомами.

Можно привести ряд положений, использованных при этих доказательствах: обычно они являются эквивалентными аксиоме Евклида, т. е. вводимое положение может быть выведено при помощи других аксиом из евклидовой, и обратно, евклидова аксиома может быть выведена при помощи других аксиом из вводимого положения.

Эти аксиомы весьма различны.

На первом месте следует поставить аксиомы, выражаемые вполне точными математическими понятиями и обладающие степенью очевидности более высокой, чем евклидова аксиома.

Такова аксиома Лоренца[63]).

1) Всякая прямая, проходящая через точку внутри угла, пересекает по крайней мере одну его сторону.

Лежандр берёт частный случай аксиомы Евклида:

2) Наклонная и перпендикуляр при своём продолжении пересекаются.

Обычно берётся аксиома, эквивалентность которой евклидовой была отмечена ещё Проклом:

3) Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной.

---

[62]) Ch. Wolfius, Compendium elementaris Matheseos, Venetiis, 1713.

[63]) Lorenz, Grundriss der reinen und angewandten Mathematik, Helmstadt, 1791—1792, стр. 102.

Она является единственной в гильбертовой группе аксиом параллелизма. Следует отметить, что положение о возможности проведения через взятую точку прямой, параллельной данной, может быть выведено из других евклидовых аксиом, если только не прибавлять слова «одну». Больше того, можно постулировать, что из какой-нибудь точки M_0, параллельно какой-либо прямой P_0Q_0, можно провести только одну прямую, параллельную данной, и после этого можно доказать, что положение это будет верно для *всякой* точки M и *всякой* прямой PQ.

4) В качестве эквивалента евклидовой аксиомы можно взять, следуя Остроградскому[64], свойство *транзитивности* параллелизма: если l параллельна l' и l' параллельна l'', то и l параллельна l''.

Сюда же, пожалуй (поскольку она обладает меньшей степенью очевидности, чем вышеупомянутые), можно отнести аксиому Вольфганга Больяй[65]:

5) Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

Бесспорно, высокой степенью очевидности обладает аксиома Плейфэра[66], которой пользуется Лежандр: две пересекающиеся прямые AP и AQ не могут быть отделены прямой MN, т. е. не существует прямой MN, не пересекающей ни AP, ни AQ.

На втором месте будут стоять положения, которые кажутся убедительными, если не стараться раскрывать точного смысла содержащихся в них выражений; если же истолковывать последние математически, то высказанные положения изменяют свой смысл, вследствие чего очевидность их понижается.

Такова аксиома:

6) Параллельные прямые равно отстоят друг от друга[67].

Расстояние между прямыми не есть вполне ясное понятие. Если мы хотим подойти математически точно к его определению, то должны доказать, что понятие расстояния между прямыми есть понятие взаимное, т. е. что расстояние первой прямой от второй будет то же самое, что и расстояние второй прямой от первой. Для определения расстояний *точек* первой прямой от второй мы опускаем из этих точек перпендикуляры на вторую прямую. Нам следует доказать, что результаты будут одинаковы, будем ли мы опускать перпендикуляры из точек первой прямой на вторую или, наоборот, из точек второй прямой на первую. В результате математической формулировки этого понятия мы должны притти к наличию общего перпендикуляра для обеих

[64]) Остроградский, Руководство к геометрии для военных учебных заведений, СПБ, 1855.

[65]) См. Бонола, Неэвклидова геометрия, СПБ, 1910.

[66]) Playfair, Elements of Geometry, стр. 364.

[67]) Ch. Clavii, Euclidis elementorum libri XV, Roma, 1574.

прямых, что *возможно только при справедливости* евклидовой или какой-нибудь из эквивалентных ей аксиом о параллельности.

Такова же аксиома, которой скрытно пользуется Прокл:

7) *Расстояние между параллельными не может быть меньше некоторого предела.*

И в этом случае к понятию расстояния между параллельными можно подойти только через понятие о расстоянии их точек, которое отсчитывается по перпендикуляру к одной из прямых (чего, между прочим, у Прокла нет — понятие о расстоянии так и остаётся невыясненным до конца).

Такова же аксиома и Томаса Симпсона[68]:

8) Если две точки какой-либо прямой не одинаково отстоят от другой прямой, лежащей в одной с ней плоскости, то эти две прямые при бесконечном продолжении пересекаются в той стороне, где расстояние меньше.

И, наконец, аксиома Роберта Симсона[69], сводящаяся к описанию поведения одной прямой относительно другой:

9) Невозможно, чтобы какая-либо прямая сперва приближалась бы к другой, а затем удалялась, чтобы затем снова ближе подойти. Прямая всегда должна сохранять своё направление.

На третьем месте следует поставить аксиомы, в которых пользуются понятиями, не поддающимися полной математизации и содержащими в большей или меньшей степени *интуитивные* элементы. Сюда, например, относятся все аксиомы, говорящие о *направлении*[70].

10) Аксиома Валлиса[71] постулирует возможность построения на данной прямой треугольника, подобного данному.

Это положение получает убедительность, если только признать гомогенность пространства, иными словами, ввести общую аксиому, не поддающуюся математизированию: пространство *в малом является тем же, чем и в большом.*

11) Совершенно такого же рода и аксиома Ламберта о невозможности *абсолютной меры* длины.

24. Генезис евклидовых аксиом. Чрезвычайно интересным является вопрос *о происхождении аксиом евклидовых Начал*.

Высказываются три различных мнения:

1) Одни приписывают Евклиду все постулаты и аксиомы, кроме тех, которые Гейберг[72]) исключил в своём издании, признав их включёнными позднейшими авторами.

2) Другие оставляют за Евклидом все признаваемые Гейбергом постулаты, но исключают аксиомы. При этом они включают

---

[68]) Thomas Simpson, *Elements of Geometry*, т. *I*, стр. 14.

[69]) См. прим. 34.

[70]) Thibaut, Grundriss der reinen Mathematik, Göttingen, 1827.

[71]) Wallisii, *Opera*, т. *II*, *Oxoniae. De postulato quinto.*

[72]) Heiberg, Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid.

в число постулатов четвёртый и пятый, исключая их из числа аксиом.

3) Третьи отрицают принадлежность *Евклиду двух последних постулатов* и всех аксиом, т. е. оставляют только постулаты 1, 2 и 3.

Таннери[73]) защищает *последнее мнение*, приводя в пользу его ряд аргументов, причём его рассуждение наводит на ряд очень интересных мыслей, относящихся к геометрии доевклидова периода.

Он обращается к Аристотелю[74]) и не находит у него, как и у других философов, термина κοιναὶ ἔννοιαι (notiones communes).

Аристотелем употребляется термин «аксиома», но только не в современном смысле. Следует отметить, что к основным *недоказуемым* положениям Аристотель предъявляет требование не столько очевидности, сколько *общепризнанности*. При этом за положениями, называемыми аксиомами, повидимому, ещё не признаётся основным признаком их *недоказуемость*, которая выставляется Паскалем и др. в качестве характерного свойства аксиом наряду с их очевидностью. Очевидность как признак истинности аксиомы вполне определённо выставляется Декартом, а за ним другими рационалистами. У Аристотеля же ἀξίωμα — положение, не нуждающееся в доказательстве и лежащее в основе доказательства. Об очевидности он не говорит (см. Метафизика, кн. 4, гл. 13; Физика, кн. 8, гл. 3).

По моему мнению, не так далеко отстоят от Аристотеля и стоики, допускающие в качестве аксиом как верные, так и неверные положения, но с признаками *общности* и *фундаментальности*, из которых выводятся следствия, быть может даже уничтожающие эти положения.

Совершенно прав Таннери, утверждая, что до Евклида не было жёсткого разграничения *определений* от *аксиом*. Так как вся наука в аристотелевском смысле сводилась к *разысканию определений*, то общие основные положения, т. е. аксиомы, должны были сперва явиться тоже как определения. Само слово ἔννοια — понятие, слово, появляющееся лишь ко времени Аристотеля, указывает на то, что смешение аксиом и определений продолжается и после Евклида. Даже у Архимеда в книге «О сфере и цилиндре» аксиомы по существу — определения, а леммы являются постулатами.

Особенно убедительное место Таннери приводит из сочинения Автолика «О движущейся сфере». Последний в качестве первого определения даёт то самое определение равномерности дви-

---

[73]) Tannery, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, Bulletin des sc. math. de Darboux, 1888, т. 8, стр. 152.

[74]) Взгляды Аристотеля на математику: Görland, Aristoteles und Mathematik, Marburg, 1899. — Michaud, Aristoteles et les mathématiques, Archiv der Philosophie, т. 16, 1913.

жения, которым мы пользуемся и в настоящее время. Но в качестве второго он даёт такое положение, которое в настоящее время уже никто не назовёт определением:

«Если точка, двигающаяся по прямой, пробегает равномерно две линии, то отношение между временами, в которые она их пробегает, таково же, как и отношение между этими двумя линиями».

Аристотель различает в геометрии следующие элементы:

1) То, что полагается как определённым образом существующее, — в геометрии, — это точки и линии.

Под этим разумеются определения, говорящие о том, *как* существуют определяемые вещи. Они по существу сливаются с аксиомами, никоим образом не являясь *номинальными* определениями.

2) Общепризнанные истины, с которых начинается доказательство.

3) Свойства (τὰ πάθη) — элементы, поясняемые на первом месте, смысл которых поясняется определениями. Конечно, приведённые слова Аристотеля не могут считаться вполне ясными; повидимому, он подразумевает здесь *доказуемые* положения.

Интересно, что в этой связи Аристотель говорит, что некоторые науки обходят молчанием некоторые из этих элементов вследствие их очевидности; так, в число «общепризнанных положений» не включают того, что «вычитая из равных равные, получаем равные же», поскольку это познаётся *непосредственно*.

Я не решаюсь делать отсюда, как Таннери, вывод, что древние не имели обыкновения ставить аксиомы в *начале* изложения; я только заключаю отсюда, что они позволяли себе выставлять не все употреблявшиеся ими положения, но только те, про которые можно было сказать, что они *должны быть* признаваемыми, но могли и не признаваться при софистическом настроении того времени.

Что ряд аксиом был введён позднейшими авторами, в этом не может быть сомнения. Среди этих аксиом можно различать две категории. Одни дают более полное воспроизведение евклидова положения; в этом случае исправляющий, или, лучше сказать, пополняющий Евклида, мало думал о сущности вводимой им аксиомы. Ко второй категории относятся аксиомы, над которыми думали, но думали плохо. В качестве примера таких Таннери приводит аксиому 8 — «целое больше части», — которая, как он думает, не принадлежит Евклиду. Действительно, последний употребляет вовсе не эту аксиому, а другую, когда говорит (в предложении 6 книги I и др.): «меньшее равно большему, что нелепо». Этой аксиомы не знает Герон, но она находится у Прокла[75]).

---

75) Mansion, Sur les postulats et axiomes d'Euclide, Annales de la Soc. de Bruxelles, 14, 1889.

25. Арифметические аксиомы. Первые шесть аксиом — родоначальницы системы арифметических аксиом.

В течение времени эта группа подвергалась наибольшим изменениям; она то сокращалась, когда замечали логическую зависимость одних от других, то, наоборот, пополнялась.

Систему, которая извлекается непосредственно из первых шести евклидовых аксиом и выражается формулами

1) если $\begin{matrix} a = c \\ b = c, \end{matrix}$ то $a = b$,

2), 3) если $\begin{matrix} a = b \\ c = d, \end{matrix}$ то $a \pm c = b \pm d$,

4), 4') если $\begin{matrix} a > b \\ c = d, \end{matrix}$ то $a \pm c > b \pm d$,

5) если $a = b$, то $2a = 2b$,

6) если $a = b$, то $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} b$,

интересно сравнить с гильбертовой [76].

Аксиомы сочетания постулируются **существованием** определённого

1) c, такого, что $a + b = c$ или $c = a + b$,

2) решения $a + x = b$ и $y + a = b$,

3) нуля, такого, что $a + 0 = a$, $0 + a = a$,

4) c, такого, что $ab = c$ и $c = ab$,

5) решения $ax = b$ и $ya = b$,

6) единицы, такой, что $a \cdot 1 = a$ и $1 \cdot a = a$.

Правила счета:

7) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

8) $a + b = b + a$,

9) $a(bc) = (ab)c$,

10) $a(b + c) = ab + ac$,

11) $(a + b)c = ac + bc$,

12) $ab = ba$.

Предложения порядка:

13) если a, b различны, то или $a > b$ или $a < b$,

14) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$,

15) если $a > b$, то $a + c > b + c$,

16) если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$.

---

[76]) См. прим. 38 (гл. III).

Предложение Архимеда:

Если $a > 0$, $b > 0$, то существует целое число n, такое, что $na > b$.

В системе Гильберта первая евклидова аксиома исчезла как арифметическая, но остаётся как геометрическая аксиома группы конгруэнтности; если

$$AB \equiv A'B',$$
$$AB \equiv A''B'',$$

то

$$A'B' \equiv A''B''.$$

Равенство чисел есть тождество чисел, и поэтому аксиома 1 в *числах ничего не выражает.*

То же следует сказать и о 2-й евклидовой аксиоме: она не выражает больше, чем аксиома 1 сочетания.

5-я отпала как следствие 2-й, а 6-я заменилась более общей, которая в системе Гильберта сводится к 5-й.

Таким образом, только 4-я осталась в современной системе.

Законов счёта Евклид не рассматривал.

В середине XVIII в. [77]) существовала довольно стройная система основ арифметики или, лучше сказать, алгебры, так как она относилась не к числам (иррациональных чисел тогда ещё не было), а к *величинам вообще*, над которыми оперирует Алгебра.

Законы арифметики тогда представлялись очевидными положениями (и в этом смысле аксиомами), но тем не менее *доказуемыми*, причём среди них были далеко не все, которые в настоящее время являются таковыми. Эти доказательства все основывались на лейбницианском определении равенства.

Тождество не определялось, а равенство определялось с помощью тождества.

Два количества a и b признавались Лейбницем и др. равными, если всякое выражение $\Phi(a)$ оставалось *таким же* и по подстановке b вместо a.

Сложение мыслилось как одновременная, совершенно одинаковая в отношении обоих членов операция над этими членами; поэтому закон *коммутативный* являлся лишним. Очевидно, то же следует сказать и о законе *ассоциативном.*

Но закон *транзитивный:*

если $a = c$, $b = c$, то $a = b$, выражаемый первой евклидовой аксиомой, доказывался и Лейбницем и Вольфом.

Вследствие равенства b и c по самому определению везде величиной b можно заменить величину c, в частности и в равенстве $a = c$, вследствие чего $a = b$.

---

77) См. прим. 62, а также Karsten, Mathesis theoretica, Rostock, 1761, стр. 701.

Таким же образом доказывалась и вторая евклидова аксиома.

В истории этой группы евклидовых аксиом интересно сравнить два момента, отделённых между собой столетием — аксиоматику в Cursus Mathematicus Херигона[78] и такую же аксиоматику в учебнике Хр. Вольфа.

У первого мы имеем чрезмерное раздутие всей аксиоматической системы. Это какое-то *коллекционирование очевидных истин* без всякого анализа их взаимной логической зависимости. У второго, как мы только что отметили, имеем явное намерение строить геометрию *без аксиом* в том смысле, что всё выводится из определений и логической аксиомы противоречия.

Если Вольф их перечисляет, то не потому, что они очевидны, и не потому, что они недоказуемы, но потому, что это *основные простейшие* положения, на которые чаще всего приходится ссылаться.

Херигон за первой евклидовой аксиомой ставит другую, ей аналогичную, и из неё выводит (знак $\rightarrow$ обозначает: «следует, получается»)

$$1a\cdot b \quad c=d \quad a=c \quad b=d\rightarrow a=b,$$

которую он пишет в своём идеографическом обозначении:

hyp. $c\,2|2\,d$,
hyp. $a\,2|2\,c$,
hyp. $b\,2|2\,d$,
$1a\cdot b$ $a\,2|2\,b$

обозначая через $2|2$ равенство, через hyp. — гипотезу: «если», $1a\cdot b$ — нумерация аксиом у Херигона.

(Следует обратить внимание, что эта аксиома выводит 1-ю евклидову с присоединением к ней рефлективного свойства равенства $a=b\rightarrow b=a$.)

Другие херигоновы аксиомы:

$1a\cdot d$ $\quad a=b,\ a>c\rightarrow b>c,$
$1a\cdot e$ $\quad b>c,\ \ a>b\rightarrow a>c,$
$1a\cdot f$ $\quad a+b=c+d,\ \ b=d\rightarrow a+d=c+b,$
$2a\cdot 1$ $\quad a=b,\ \ c=d\rightarrow a+c=b+d,$
$3a\cdot 1$ $\quad a=b,\ \ c=d\rightarrow a-b=c-d,$
$3a\cdot b$ $\quad c>\frac{1}{2}a\rightarrow a-c<\frac{1}{2}a,\quad c<\frac{1}{2}a\rightarrow a-c>\frac{1}{2}a,$
$4a\cdot 1$ $\quad a>b,\ \ c=d\rightarrow a+c>b+d,$
$4a\cdot b$ $\quad a=b,\ \ c>d\rightarrow a+c>b+d,$

[78]) Herigonus, Cursus mathematicus, Parisiis, 1632.

$$
\begin{array}{ll}
4a\cdot c & a > b,\quad c > d \rightarrow a + c > b + d,\\
5a\cdot 1 & a > b,\quad c = d \rightarrow a - c > b - d,\\
5a\cdot b & a = b,\quad c > d \rightarrow a - c < b - d,\\
5a\cdot c & a > b,\quad c > d \rightarrow a - d > b - c,\\
6a\cdot 1 & a = 2c,\quad b = 2c \rightarrow a = b,\\
6a\cdot b & a > b \rightarrow 2a > 2b,\\
6a\cdot c & a = 2b,\quad b = c \rightarrow a = 2c,\\
6a\cdot d & a = b,\quad a = 2c \rightarrow b = 2c,\\
7a\cdot 1 & a = \frac{1}{2}c,\quad b = \frac{1}{2}c \rightarrow a = b,\\
7a\cdot b & \frac{1}{2}a > \frac{1}{2}b \rightarrow a > b,\\
7a\cdot c & b = c,\quad a = \frac{1}{2}b \rightarrow a = \frac{1}{2}c,\\
7a\cdot d & a = b,\quad b = \frac{1}{2}c \rightarrow b = \frac{1}{2}c.
\end{array}
$$

Чтобы понять наличие такого большого числа аксиом у Херигона, следует обратить внимание на то, что все эти аксиомы понимались не в *числовом смысле*. Удвоение и деление понимали так же, как у Евклида понималось в геометрическом смысле умножение или разделение пополам площади и отрезка, производимое рядом операций.

Следует отметить, что умножение отрезков здесь уже не понимается в чисто геометрическом евклидовом смысле построения a, b прямоугольника.

Вольфианские аксиомы следующие:
1) $a = a$, 2) $a = c, b = c \rightarrow a = b$, 3, 4) $a = b$, $c = d \rightarrow a \pm c = b \pm d$, 5) $a = b$, $c = d \rightarrow ac = bd$, 6) $a = b$, $c = d \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, 7) $a = b$, $a > c \rightarrow b > c$.

26. Аксиомы конгруэнтности [79]. Первые семь евклидовых аксиом являются также родоначальницами группы аксиом конгруэнтности.

Прежде всего следует отметить правильное понимание аксиомы 7. *Равенство* Евклид всегда понимает в смысле *равновеликости*. Ныне же мы обычно понимаем равенство в том смысле, как это понимали в XVII в., в смысле одинаковости формы и размеров, т. е. равные фигуры отличаются только положением. При такой точке зрения смысл аксиомы 7 тот, что если фигуры при наложении совпадают, то они отличаются *только положением*.

---

[79]) См. прим. 38 (гл. I, § 5).

Евклид хотел сказать совершенно другое: то, что площади двух совпадающих при наложении фигур равны.

Некоторые математики вводили предложение, обратное евклидову, хотя в его постановке оно, вообще говоря, не обратимо: равновеликие фигуры могут и не совпадать друг с другом при наложении. Однако Евклид в своих доказательствах пользуется частными видами такой обращённой аксиомы 7, т. е. признаёт наложимость равных отрезков и углов.

Это было отмечено всеми комментаторами Евклида, которые пополнили его систему аксиом группой аксиом конгруэнтности.

Некоторые авторы обращали аксиому в определение, определяя равенство наложимостью.

В формально логической системе Гильберта нет *определения равенства*. Конгруэнтность берётся как символ $\equiv$ и устанавливается группа знаков операций с этими символами так, чтобы по замене этих форм конкретным содержанием получились конкретные теоремы геометрии.

Аксиомы III_2, III_3 Гильберта тогда превращаются в аксиомы 1 и 2 Евклида.

Основная часть аксиомы III_1 превращается в постулат I о переносе отрезка. (Другие её элементы $AB \equiv AB$, $AB \equiv BA$ теряют смысл с евклидовой точки зрения.)

В системе Веронезе выдвигаются другие аксиомы:

1) $AB = AB$, 2) $AB = A'B' \to A'B' = AB$,

3) $AB = A''B''$, $A'B' = A''B'' \to AB = A'B'$, 5) $AB = BA$.

К этому прибавляется частная форма евклидовой аксиомы 8, что 4) отрезок не конгруэнтен ни с одной из своих частей, и 6) устанавливается возможность откладывания от A равных отрезков в различные стороны, возможность переноса отрезка на любую прямую в любую точку.

Понятие *конгруэнтности*, в которое обращается неопределяемое Евклидом равенство, понимаемое самим Евклидом как равновеликость, а иногда как тождество формы и размеров при различии положения, Гильбертом берётся как *форма*, заполняемая содержанием только после развёртывания всей формально-гипотетической геометрии как системы связей между этими формами.

У Веронезе [80]) понятие о конгруэнтности отрезков — простое понятие, которое если не вполне логизировано, то больше всего может на это рассчитывать. Что касается конгруэнтности фигур, то это сложное понятие сводится к простому, а именно, к конгруэнтности отрезков, причём это сведение производится логически, выражая связь в чисто логических понятиях. «Две фигуры называются конгруэнтными, если каждой точке одной

---

80) Veronese, Elementi di Geometria, Padova, 1904.

фигуры соответствует одна и только одна точка второй фигуры, так что отрезки, соединяющие пары соответственных точек в обеих фигурах, конгруэнтны».

Конечно, равенство (конгруэнтность) треугольников понимается совершенно различно Евклидом, Лейбницем, форономическим учебником Веронезе, резко подчёркивающим наложимость как определение равенства (в его логическом определении), и Гильбертом, который, исключая внутреннее содержание, остаётся только при одном символе ≡.

Понятие о равенстве в нашем смысле этого слова создаётся только в XVI и XVII вв., для него Лейбниц употребляет термин «конгруэнция». Лейбниц говорит, что две величины конгруэнтны, если они различаются только положением, т. е. в чисто внешнем отношении. Он прибавляет, что при наложении они должны совпасть, так что аксиома 7 Евклида выставляется Лейбницем как *непосредственное следствие его определения конгруэнтности*. Далее Лейбниц подчёркивает, что конгруэнтность есть подобие плюс равенство в евклидовом смысле слова. Таким образом, подобие является более широким понятием, чем конгруэнтность, и некоторые методисты (например, Дистервег) раньше выставляют подобие фигур, а затем путём ограничения приходят к равенству в нашем смысле этого слова.

27. Целое и части. Аксиома 8 бесспорно имеет позднейшее происхождение.

Интересно отметить, что современные математики, оперируя с *актуальной бесконечностью*, ставят характерным свойством для бесконечного множества именно *равенство целого части*, что для конечного не имеет места.

Собственно говоря, около этой евклидовой аксиомы и сосредоточивались споры инфинитистов с финитистами.

Достаточно вспомнить парадокс Галилея [81]: число членов ряда

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

с одной стороны, не равно числу членов ряда $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$, так как *целое не может равняться своей части*, с другой стороны, равно, так как между членами этих рядов существует *взаимно однозначное соответствие*: каждому члену первого ряда отвечает только один член второго и обратно.

К аксиоме 8 комментаторы прибавляют другую «целое равно всем своим частям вместе взятым».

Обе указанные аксиомы объемлются следующей:

Из неполной совокупности частей нельзя составить целого.

В современной теории эта аксиома, понимаемая соответству-

---

[81] Галилео Галилей, Беседы и математические доказательства, Москва, 1937. День первый, стр. 95. См. также Couturat, L'infini Mathématique, Paris, 1905.

ющим образом, играет важную роль. Это известная аксиома Цольта [82]), которую он формулирует так:

Если разложить многоугольник прямыми линиями на несколько частей и устранить одну часть, то с помощью остающихся, как бы мы их ни располагали, нельзя покрыть многоугольник.

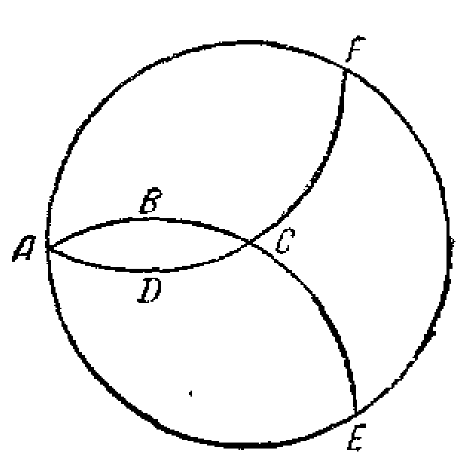
У Паолиса [83]) стоит аксиома в формулировке, совершенно аналогичной формулировке Евклида: *часть многоугольника не может равняться целому*, а Ризенбергер, наоборот, даёт в форме, ещё более отклоняющейся от евклидовой, чем формулировка Цольта:

Если доказана с помощью какого-либо разложения равновеликость двух фигур, то нельзя произвести другого разложения их так, чтобы одна фигура содержала все части данной и ещё другие части.

К цольтовой аксиоме относится ряд работ Штольца [84]), Шура, Киллинга [85]), доказывающих, что аксиома Цольта является следствием архимедовой (Евдокса).

28. Девятая аксиома. Эту аксиому, которую Гейберг не считает принадлежащей Евклиду, Прокл пытается доказать в своих комментариях к книге I «Начал».

Если предположить, что две прямые ABC и ADC (черт. 3) заключают пространство, сходясь в точке C, то, описывая окружность из C радиусом CA, получим две точки E и F пересечения наших прямых $ABCE$ и $ADCF$ с этой окружностью. Дуги AE и AF, как отсечённые диаметрами ACE и ACF, будут полуокружностями и как таковые должны быть равны в сумме всей окружности, в то время как они составляют лишь её часть EAF.



Черт. 3.

Клавий [86]) правильно замечает, что возможен ещё случай, когда прямые сходятся второй раз на окружности, и пополняет доказательство Прокла, описывая из точки K радиусом KA, меньшим чем AC, окружность ALM, пересекающую

[82]) A. de Zolt, Principii della equalita dei poligoni, Milano, 1883.

[83]) R. de Paolis, Elementi di Geometria, Torino, 1883.

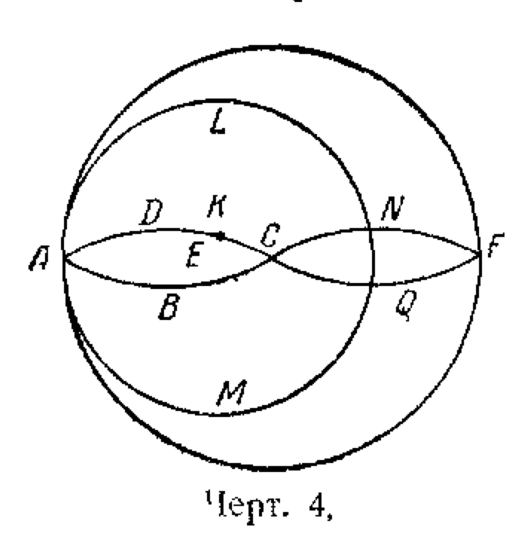
[84]) O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetick, Leipzig, 1885, стр. 75.—Monatshefte der Mathem. und Physik, т. 5 (1894), стр. 234.

[85]) Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn, 1898, стр. 23.

[86]) См. прим. 67.

прямые ABC и ADC уже в двух не совпадающих точках N, Q, и повторяя те же рассуждения для окружности ALM (черт. 4).

Здесь аксиома, на которой основывается доказательство, зарыта довольно глубоко. Мы имеем пересечение с окружностью в двух точках прямой, проходящей через центр, и утверждение необходимости существования не совпадающих точек пересечения N и Q на двух одинаковых расстояниях.



Черт. 4.

Отметим, что в XVII в. эта аксиома пополняется другими. По Схоутену, мало сказать, что две прямые не заключают пространства, необходимо ещё указать, что они не имеют общего отрезка; в самом деле, линии, заключающие и не заключающие пространства, можно мыслить и с общим отрезком и без него. Далее, вместо общего отрезка можно взять и общую точку. Поскольку из аксиомы 9 ещё не следует, заключают ли эти прямые пространство, или нет, то Схоутен выдвигает ещё одну аксиому: две прямые, сходящиеся в одной точке, необходимо должны в этой точке пересекаться.

29. Первое предложение Евклида. Против первого предложения «Начал» высказывались очень многие. Возражали против самой конструкции доказательства, относя его к типу «это так», т. е. признавая его *не объясняющим*, каким образом доказываемое свойство вытекает из *существенных* свойств объекта, к которому оно относится и с которым имеет дело определение. Конечно, разделение доказательств на два типа: «это так» (ὅτι) и «потому что» (διότι) является чисто схоластическим [87]). Эта классификация идёт от арабского схоластика Аль-Фараби. В чисто схоластических рассуждениях находим образцы доказательств τὸ διότι. Такого рода критика доказательств ведётся и в XVII в.,

---

[87]) Исходный пункт у Аристотеля, Aristoteles, Analytica Posteriora, кн. 1, стр. 9, кн. 2, стр. 12, 13, О доказательстве ὅτι — διότι. — Ziehen, Logik, ч. IV, § 36, стр. 805, 1920. — Alfarabi, De divisione philosophiae в Beiträge zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters, т. 4, тетр. 2—3. Münster, 1901. — Dieterich, Alfarabis philosophia, Lugduni, 1892, против ὅτι. — Avicenna, Die Metaphysik... von Horth, Leipzig, 1909. — Deussen, Geschichte der Philosophie, т. 2, стр. 407. — Prantl, Geschichte der Logik in Abendlände, т. II, стр. 366, 1863—1870.

причём διότι тогда обращается в *естественное* доказательство, а ὅτι — в *неестественное*. В XVIII в. это требование обращается в требование, чтобы доказательство развёртывалось по тому пути, по которому шло открытие доказываемой истины.

30. Пересекаемость окружностей. Некоторые обоснованно замечали, что у Евклида остаётся недоказанной пересекаемость двух окружностей. Комментаторы находили выход во введении дополнительной аксиомы о том, что если окружность C имеет точку внутри окружности C', то она должна пересекаться с этой последней. Неполнота доказательства первого предложения у Евклида вполне сознавалась Х. Вольфом, но вряд ли можно согласиться с убедительной силой делаемых им добавлений, не говоря уже о том, что аксиоматическая конструкция остаётся у него совершенно невыясненной.

При доказательстве рассматриваемого предложения Евклид просто обращается к интуиции, что он, между прочим, делает и в других местах, например, в предложении 12, где ему приходится описывать из точки окружность радиусом, большим расстояния до некоторой прямой, и утверждать, что эта прямая пересечётся в двух точках с проведённой окружностью. При строгом доказательстве предложений подобного рода мы должны были бы в той или другой форме использовать *аксиомы непрерывности*.

Наиболее простым является вывод, приводимый Энриквесом и основанный на аксиоме Дедекинда:

Если все точки отрезка AB делятся на два класса X и Y, причём все точки класса X, к которому принадлежит и A, предшествуют всем точкам класса Y, к которому принадлежит B, то существует некоторая точка C, производящая *сечение* отрезка, определяемое обоими классами X и Y, причём все точки класса X по крайней мере не следуют за точкой C, а все точки класса Y по крайней мере не предшествуют ей.

31. Составные части античного доказательства. Полуинтуитивный характер античных геометрических доказательств выявляется в античном разделении доказательства: в этом расчленении только *один* член относится к *логической* операции, все другие относятся к *словесной форме* или к *чертежу*.

1) Πρότασις, Propositio — предложение.

Это в задаче данное и искомое, в теореме — данное или предположенное и то, что следует доказать. На современном языке мы выразимся так: это *формулировка* задачи или теоремы.

2) Ἔκθεσις. Expositio — изложение — то, о чём говорится в общем виде, прилагается к фактически выполненному чертежу.

Мы скажем теперь: это введение в ход доказательств чертежа, для формулировки данных.

3) Διορισμός, Determinatio — определение; в нём ставится перед глазами искомое; мы имеем формулировку по чертежу *искомого*.

4) κατασκευή, Constructio — построение; указание, что следует делать.

Здесь разумеется введение в чертёж вспомогательных линий.

5) Ἀπόδειξις, Demonstratio — доказательство в собственном смысле.

6) Συμπέρασμα, Conclusio — заключение, состоящее в объявлении о том, что доказано, и что задача разрешена.

Мы приводим, по Камереру, расчленение доказательств первого предложения «Начал» Евклида, представляющего задачу о построении на данном отрезке *AB* равностороннего треугольника *ABC*.

Propositio. На данной прямой построить равносторонний треугольник.

Expositio. Пусть дана ограниченная прямая *AB*.

Determinatio. Требуется на *AB* построить равносторонний треугольник.

Constructio. Из центра *A* раствором *AB* опишем круг *BCD* (постулат 3), затем из центра *B* раствором *BA* описываем круг *ACE* (постулат 3) и от точки *C*, в которой эти круги пересекаются, проведём прямые *CA*, *CB*.

Demonstratio. Так как точка *A* есть центр *BCD*, то *AC* равно *AB*; далее, так как точка *B* — центр круга *ACE*, то *BC* равна *BA*.

Но было доказано, что и *CA* равна *AB*; значит, каждая из прямых *CA*, *CB* равна *AB*; но равные одному и тому же равны и между собой, значит, и *CA* равна *CB*; значит, три прямые *CA*, *AB*, *BC* равны между собой. Следовательно, треугольник *ABC* равносторонний и построен он на ограниченной прямой.

Conclusio. Значит, на данной ограниченной прямой *AB* построен равносторонний треугольник *ABC*, что и требовалось сделать.

В дальнейшем схема эта значительно упрощается.

Херигон различает в теореме только:

1) *Изложение* условий и объяснение искомого.

2) *Приготовление* к доказательству, которое не всегда, но большей частью необходимо.

3) *Доказательство* того, что то свойство, которое требуется, присуще тому, что предлагается.

32. Теорема и проблема. У Евклида нет термина *теорема*; под названием *«предложение»* стоят как теоремы, так и то, что мы сейчас назвали бы задачами на построение. Но для Евклида это больше чем задачи на построение; это *доказательство существования*. Оно играет такую же роль, как у нас, например, доказательство существования интеграла от непрерывной функции, и поэтому входит в цепь следующих друг за другом предложений.

Интересно, что в XVII в. Херигон определяет проблему так, как её Евклид не определил бы:

«Проблема, если что-либо предлагается сделать (т. е. построить) или узнать».

Проблемы второго рода таковы: найти площадь треугольника, найти длину окружности, найти объём пирамиды, объём или поверхность шара. У Евклида таких *проблем* нет. Но они существуют у Архимеда, хотя и не стоят под таким названием.

Между Евклидом и Архимедом существует глубокое различие. Евклид принадлежит больше старому; он сообщает старое, его отделывает и продолжает итти в старом направлении. Архимед открывает *новые* пути в совершенно новом направлении.

Интересно отметить положение Херигона: *проблема нуждается в теореме для доказательства* (т. е. своего обоснования) *и теорема нуждается в проблеме для приготовления* (т. е. для вспомогательного построения).

В это время уже сознаётся необходимость оправдания евклидовых определений.

Термины «королларий» (следствие), «лемма», «схолия» больше употребляются комментаторами Евклида, чем самим Евклидом. В первых пяти книгах лемм нет, но они появляются в шестой; особенно их много в книге X. Наше «следствие» появляется у Евклида под термином «поризм» (буквально «то, что добыто»); таково, например, заключение к предложению 1 книги III, бывшее, повидимому, до Евклида самостоятельным предложением, поскольку ссылки на это предложение как раз имеют в виду этот «поризм».

Королларий — это непосредственно вытекающее из теоремы следствие. *Лемма* — положение с кратким доказательством, играющее только служебную роль при доказательстве теоремы — по Аристотелю предпосылка силлогизма.

Схолия — это разъяснение к теореме, имеющее целью устранить недоразумение, могущее возникнуть при неправильном понимании её формулировки или каких-либо пунктов в доказательстве.

Если применить эту терминологию к книге I «Начал», то к *проблемам* следует отнести предложения 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 31, 42, 44, 45, 46.

К *теоремам*: 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 47, 48.

К *леммам*: 7, 21, 43.

Того же, что следует называть схолиями, в книге I у Евклида совершенно *нет*.

33. Второе и третье предложении. Эти два предложения для тех, кто не понял смысл постулата 3, представляют большую загадку. Мы просто предлагаем отрезок BC переносить на прямую *соответствующим раскрытием циркуля*.

Но Евклид этой операции не признаёт; для него *дозволенной* операцией является только та, которая устанавливается правильно понимаемым третьим постулатом (см. комментарий 20). Он его и

употребляет в предложении 3: описывает окружность из конца прямой радиусом, равным этой прямой.

Конечно, принимая за дозволенные операции только те, которые признавал сам Евклид, следует согласиться с Проклом, которому наш способ представляется недозволенным.

Описание из A круга радиусом BC предполагает предложение 2, т. е. перенос этого отрезка на некоторую прямую, проходящую через A.

34. Четвёртое предложение. Это первый случай равенства треугольников.

Доказательство Евклида отличается от современного только тем, что он, утверждая совпадение BC с EF при наложении, основывается на аксиоме 9, т. е. на том, что две прямые не содержат пространства, а мы основываемся на том, что через две точки можно провести только одну прямую, т. е. на *аксиоматизированном* и слитом с аксиомой 9 постулате 1.

35. Метод наложения [88]). Если согласиться с тем, что Евклид мыслил геометрические фигуры существующими лишь с момента, как они оказывались построенными, то является вопрос, правильно ли понимают его метод наложения. Мыслился ли при операции наложения идеальный треугольник, переносимый с одного места на другое для совмещения со вторым? Не мыслился ли Евклидом этот перенос в смысле *построения в другом месте* треугольника, одинакового с данным?

На это как будто указывает то, что книга I начинается с изложения способа *переноса отрезка*. Что касается переноса угла, то, вероятно, операция описания из вершины A' угла $B'A'C'$ окружности радиусом $A'B'$, перенос $A'B'$ в AB и засекание дуги BC окружности радиусом $BC = B'C'$ представляется очевидным решением задачи. То, что строгое обоснование этой операции основывается на 3-м случае равенства треугольников, раньше не замечалось, и предложение 23 должно быть отнесено к позднейшему времени.

Во всяком случае все комментаторы понимали наложение в *нашем смысле* и обнаруживали тенденцию пользоваться им шире, чем делал это Евклид.

Прокл даёт следующее доказательство предложения 5 книги I. Если в треугольнике ABC стороны AB и CB равны, то берём треугольники ABC и CBA: в них равны основания AC и CA и боковые стороны $AB = CB$ и $BC = BA$; следовательно, по третьему случаю равенства треугольников будут равны и углы при основании, т. е. $\angle A = \angle C$, а $\angle C = \angle A$.

Рационалисты XVII в. настроены *несочувственно* и методу наложения. Этот метод, по их мнению, убеждает с помощью обращения к *чувствам*, а не к *чистому разуму*, который только

[88]) Д. Мордухай-Болтовской, Метод наложения, Математическое образование.

один является судьёй. Первый случай равенства треугольников доставляет им много хлопот. Мы видим ряд попыток замены обычного доказательства наложением другим без этой «механической операции», столь противной духу рационалистической мысли.

Томас Симпсон [89]) относит первый случай равенства к аксиомам совершенно так, как в настоящее время Гильберт.

36. Евклид и Лежандр. Форономическая геометрия. Какой метаморфозе подверглись взгляды на математическое доказательство от Евклида до настоящего времени, можно видеть, анализируя Евклида, Лежандра и наши современные учебники, которые восходят к этим авторам.

То, что Лежандр считает доказательством, не могло быть признано за доказательство Евклидом; с другой стороны, Лежандр не мог начать свои элементы с построения равностороннего треугольника, как это делает Евклид.

Не следует думать, что Лежандр в своих *«упрощённых»* доказательствах додумывается до более простых доказательств, которые ускользнули от Евклида. Евклид, может быть, и знал эти доказательства, но отвергал их как *негодные*, как находящиеся в решительном противоречии с его взглядами на доказательство. Почему бы ему не поступать так, как поступает Лежандр при доказательстве основного свойства равнобедренного треугольника, состоящего в том, что углы, противолежащие равным сторонам, равны? Ведь, кажется, нет ничего проще, как соединить *середину* D стороны BC с вершиной A и доказать на основании третьего случая конгруэнтности равенство треугольников ABD и ADC.

Между тем, Евклид даёт другое, более сложное доказательство I.5 (так называемое elefuga).

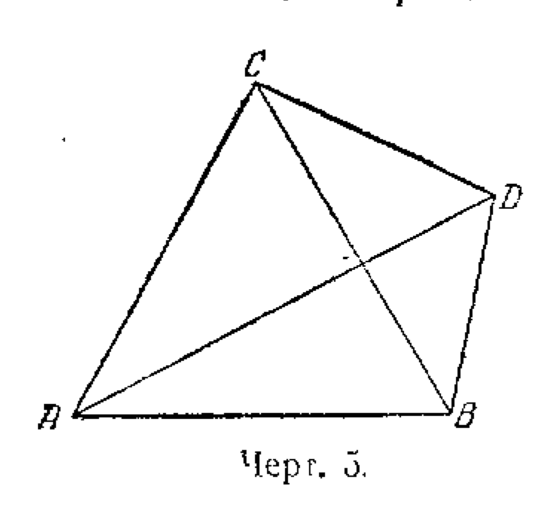
Это потому, что Евклид признавал существование только тех объектов, которые могут быть построены. Он потребовал бы от Лежандра указания способа построения точки D середины BC. Но построение это (предложение 10 книги I) основывается на предложении 9 о делении угла на две равные части, последнее же на третьем случае конгруэнтности треугольников (предложение 8), а третий случай конгруэнтности доказывается от противного на основании предложения 7, утверждающего, что если мы соединим концы основания AB (черт. 5) с двумя точками C и D, лежащими по одну сторону прямой AB, то расстояния CA и CB точки C от концов основания AB не могут быть равны соответственно расстояниям DA и DB от тех же концов.

Употребление *движения* носит у Евклида случайный характер: его геометрия по своему типу является скорее *конструктивной*. Правда, он не определяет вместе с Манзионом понятия «равных» фигур как *«одинаково построенных»*, но первые три его постулата и их применение для переноса отрезка несколько

[89]) См. прим. 68.

сближают геометрию Евклида с штейнеровскими построениями при помощи линейки и неподвижного круга с отмеченным центром, когда равенство отрезков устанавливается не путём переноса их с помощью циркуля (операция, являющаяся у Евклида *недозволенной*), а при помощи целого ряда операций.

В основанной на идее движения форономической геометрии мы постулируем возможность любого переноса в пространстве фигур без изменения их элементов — взаимных расстояний различных их точек и углов, образуемых их прямыми. В отличие от практической (физической) геометрии, где идея переноса отрезка является основным принципом всякого измерения, в идеальной геометрии перенос фигуры A на фигуру B совершается лишь для того, чтобы помочь уму увидеть, что части A тождественны частям B. Если фигура A является чисто идеальной, то таковым же будет и самый перенос. Если идеальная фигура A изменяется при идеальном переносе, то она уже не A, а какое-то третье C, которым уже не следует заниматься.



Черт. 5.

Такого же взгляда на геометрию Евклида как на геометрию конструктивного типа придерживается и Цейтен, считающий, что евклидову конструктивизму предшествовал идеализм Платона. Платоники утверждали, говорит Цейтен, что треугольник существует *до построения* его. Менехм же, очевидно, должен был доказывать, что в реальном существовании этого треугольника мы убеждаемся, лишь п о с т р о и в его и доказав при этом, что это построение действительно приводит к поставленной нами цели. Именно так и поступает Евклид: не довольствуясь определением равностороннего треугольника, он, прежде чем начать им пользоваться, убеждается в его реальном существовании, построив такой треугольник в предложении I своей I книги и доказав правильность произведённого построения.

В случае отказа от метода наложения приходится вводить в систему аксиом такое неочевидное положение, как, например, гильбертова аксиома III_5, представляющая по существу второй случай равенства треугольников.

Другой путь развития геометрии, при котором сохраняется та же убедительность изложения, что и у Евклида, но, кроме того, выявляются аксиоматическая структура и система, есть путь *форономический*. При следовании по этому пути основой является понятие о движении, причём выставляется система аксиом, определяющих движение согласно данным интуиции.

В таком случае конгруэнция, или равенство (в современном смысле этого слова), определяется как *совпадение* при наложении

сравниваемых фигур, которые предполагаются определённым образом передвигающимися. Хотя Евклид и пользуется движением при доказательстве первого случая равенства треугольников, но в дальнейшем он определённо его *избегает*, предпочитая другие случаи равенства треугольников доказывать иными путями. Я думаю, что его доказательство предложения 4 следует рассматривать как наследство какого-нибудь из его предшественников, от которого он не может освободиться. Мы уже имели случай отметить, что генетические определения форономического характера являются более древними, чем определения, производимые по аристотелевскому рецепту per genus et differentiam specificam (через род и видообразующее отличие).

Среди сторонников форономической трактовки геометрии следует назвать Гельмгольца [90]), для которого подход к основам геометрии имел не методическое, а скорее философское значение, Софуса Ли, рассматривавшего движение как группу преобразований, при которых сохраняются инвариантными некоторые выражения, зависящие от координат двух точек (*расстояния*). В числе учебников геометрии, построенных по форономическому принципу, надо упомянуть Мерея, Бореля и Бурле [91]); оба последних проводят в жизнь требования известной Меранской программы.

37. Двумерный Евклид. Евклид, доказывая первый случай равенства треугольников (предложение 4), должен выводить треугольник в *трёхмерное пространство* в том случае, когда имеются *симметричные* треугольники.

Действительно, если даны треугольники ABC и $A'B'C'$ (черт. 6), то, двигая по плоскости треугольник ABC, можно его привести только в положение $A'B''C'$, совмещение же получается лишь в результате вращения около $A'C'$, причём треугольник выводится из плоскости.

Можно ли так переработать «Начала» Евклида, чтобы этой операции не было? Бонензен [92]) показывает, что такая переработка возможна.

Для этого нужно только итти в следующем порядке:

1) доказать равенство треугольников с одинаково расположенными элементами,

---

[90]) Helmholtz, Ueber die Tatsache die der Geometrie zu Grunde liegen. Götting. Nachr., 1868, стр. 193.— В. Каган, Основания геометрии, Одесса, 1905, т. 2.

[91]) Méray, Nouveaux éléments de Géométrie, 1874, 3 éd., 1906.— Borel, Géométrie, Paris, 1905. На русском языке: Борель-Штеккель, Элементарная математика, Геометрия (там же о Меранской программе), Москва, 1923.— Bourlet, Cours abregé de Géométrie, 2 éd., Paris, 1907.

[92]) Bonensen, Nyt Tidskrift for Mathematik.— Barbarin, Sur la géométrie des êtres planes. Procédés-verbaux de séances de la Soc. d. sc. phil. et nat., Bordeaux, 1901.

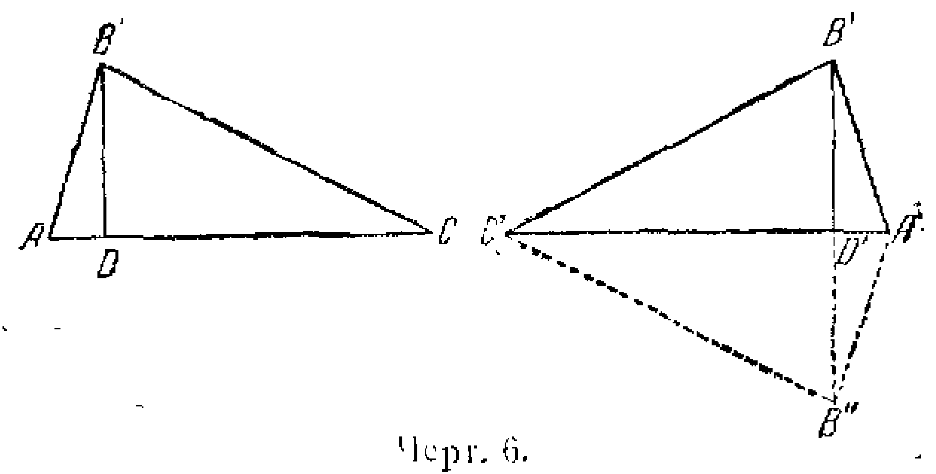
2) доказать лемму Лакруа об отрезках, отсекаемых на двух прямых параллельными,

3) доказать пропорциональность сторон в треугольниках с равными углами и не одинаково расположенными элементами,

4) изложить теорию измерения прямоугольников и треугольников,

5) доказать теорему Пифагора по методу Евклида,

6) на основании теоремы Пифагора доказать, что в равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, будет вместе с тем и медианой, так что основание разделится пополам,



Черт. 6.

7) доказать, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны,

8) свести доказательство равенства $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ к равенству прямоугольных треугольников $\triangle BDC$ и $\triangle B'D'C'$ (где $\angle B = \angle B'$, $BC = B'C'$ и $\triangle ADB = \triangle A'D'B'$, при $DB = D'B'$ и $AD = A'D'$ (черт. 6) на том основании, что $B'D'C'$ можем заменить ему симметричным $C'D'B'$, в котором $B'C' = B''C'$ и $\angle B = \angle B''$ и уже в силу 1) равным BCD.

Точно таким же образом $A'B'D'$ можем заменить его симметричным $B''D'A'$, тоже равным ему, так как равенство гипотенуз сейчас же выводится на основании теоремы Пифагора.

Что касается пункта 7 (т. е. предложения 5 Евклида), то доказательство его ведётся только с помощью теоремы Пифагора.

38. Происхождение апагогического доказательства. Евклид широко пользуется так называемым *приведением к абсурду*, иначе говоря, апагогическим доказательством, состоящим в том, что положение A доказывается опровержением противного (не A) с помощью вывода из последнего невозможного следствия.

Начало апагогического доказательства, вероятно, относится к элейской философской школе; оно приобретает особое значение у софистов.

Античная математика не столько заботится о системе геометрии — изложении каких-либо причин или общих свойств пространства, *из которых вытекают свойства геометрических*

фигур, — сколько старается убедить читателя в истинности подмечаемых свойств. Математик эпохи Платона — Евклида терроризирован софистами: он каждую минуту боится попасть в расставленные последними силки и строит укрепления против нападений по всем правилам ими же самими выработанного искусства. Вот для доказательства первого предложения геометр начал вычерчивать круги и проводить прямые. Софист возражает, что это не всегда можно сделать, что циркуль или линейка могут не оказаться в руках, а тогда теорему уже нельзя будет доказать. В самом ходе доказательства он будет придираться к самым, казалось бы, бесспорным и простым истинам, будет утверждать субъективность понятия очевидного (что очевидно для одного, может не быть очевидным для другого) и т. д. Поэтому геометр должен прежде всего заставить согласиться со своими аксиомами и постулатами, причём для этого, конечно, желательно, по возможности, сократить их число; необходимость же этого сокращения, ведущая к ограничению свободы выбора логических путей для доказательства теорем, заставляет наряду с прямыми применять и косвенные апагогические доказательства.

Прямое доказательство всегда считалось лучше косвенного.

Аристотель[93]) — только довольно робко — выдвигает преимущества прямого доказательства перед апагогическим.

По его мнению, более согласны с *природой* выводы, в которых мы от включения или выключения из класса *B* переходим к включению или выключению из класса *C*, объемлющего *B*. «Положение «ни одно *A* не есть *C*» первее, чем «ни одно *A* не есть *B*» — мы в нём ближе подымаемся к принципам».

В апагогическом доказательстве порядок обратный:

Следует доказать, что *A* не есть *B*.

Предполагаем, что некоторые *A* суть *B*. Все *B* суть *C*. Заключаем: некоторые *A* суть *C*, что неверно, и поэтому ни одно *A* не есть *B*.

Но по Аристотелю всё-таки и в этом случае тем или иным путём достигается цель науки, а именно, построение связи между вещами и общими положениями, выставляемыми в начале науки.

Заметим, что его аргументы, уже совершенно не гармонирующие с настроением умов XVI и XVII вв., в эту эпоху не повторяются.

Крайняя неприязнь рационалистов XVII в. к апагогическим доказательствам вытекает из их общего мировоззрения, старающегося всё многообразие вселенной вывести из одного мирового принципа с помощью постепенного ряда ограничений, созидающих мир как логическое следствие из простых и легко формулируемых, как теоремы геометрии, положений. В глазах рационалиста вся вселенная представляется как ряд взаимоотноше-

---

[93]) Aristoteles, Analytica Posteriora, кн. 1, гл. 26.

ний, вытекающих из небольшого числа аксиом, относящихся к простейшим отношениям.

Комментатор «Начал» Евклида этой эпохи занят *выпрямлением* евклидовых апагогических доказательств, что достигается введением явно или неявно новых *аксиом*.

В выпрямленные Озанамом[94]) доказательства книги III «Начал» входит в скрытом виде теория пределов. Вообще исчисление бесконечно малых в совокупности аксиом, на которых оно основывается, является системой *выпрямленных доказательств*, заменяющих более сложный апагогический метод исчерпывания.

В XVI в. нападки на апагогическое доказательство ведутся, но с ним легче мирятся. В XVI в. Савиль[95]) возражает Иосифу Скалигеру на его нападки против апагогического доказательства, объявляя, что оно равно прямому в отношении истинности и необходимости, но ниже в отношении происхождения[96]).

39. Седьмое и восьмое предложения. Седьмое предложение у Евклида носит характер *леммы*, необходимой только для доказательства положения 8.

Но из него сейчас же выводится, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

X. Вольф[97]) не пользуется евклидовской леммой, а в своих элементах геометрии выводит третий случай равенства треугольников из этого последнего положения.

Вывод третьего случая равенства треугольников из единственности построения треугольника по трём сторонам находится и в некоторых современных немецких учебниках.

Лежандр, как и Евклид, доказывает это положение апагогически, но доказательство у Лежандра другое.

Лежандр начинает с положения: «Если две стороны одного треугольника равны соответственно двум сторонам другого и если в то же время угол между первыми более угла, заключённого между вторыми, то третья сторона первого будет больше третьей стороны второго».

Это 24 теорема I книги «Начал» Евклида, т. е. весьма отдалённая от начала теорема, которая доказывается на основании третьего случая конгруэнтности треугольников.

Для доказательства того, что при

$$AC = FG,\ AB = GH \quad \text{и} \quad \angle BAC > \angle FGH,$$

имеем: $BC > FH$ (черт. 7), Лежандр откладывает $\angle CAD = \angle FGH$,

---

94) Ozanam, Cours des Mathématiques, Paris, 1720.

95) Savilius, Praelectiones, кн. 10, стр. 170, 196.

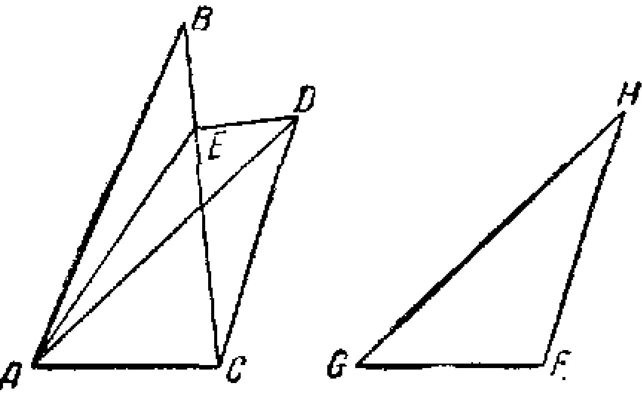
96) Hauber, Chrestomatia Geometrica, Tübingen, 1822.

97) Ch. Wolfius, Anfangsgründe aller mathematischer Wissenschaften, 1750.

затем на нём прямую $AD = HG$ и строит $\triangle CAD$, равный $\triangle FGH$ (на основании первого случая равенства).

Он проводит *биссектрису* AE угла BAD, соединяет E с D и доказывает равенство $\triangle BAE$ и $\triangle EAD$, так как: $CD < ED + EC$, то $CD < BE + EC$, затем $CD < BC$ и, наконец, $FH < BC$.

Эта теорема сейчас же даёт возможность вывести апагогически третий случай конгруэнтности.

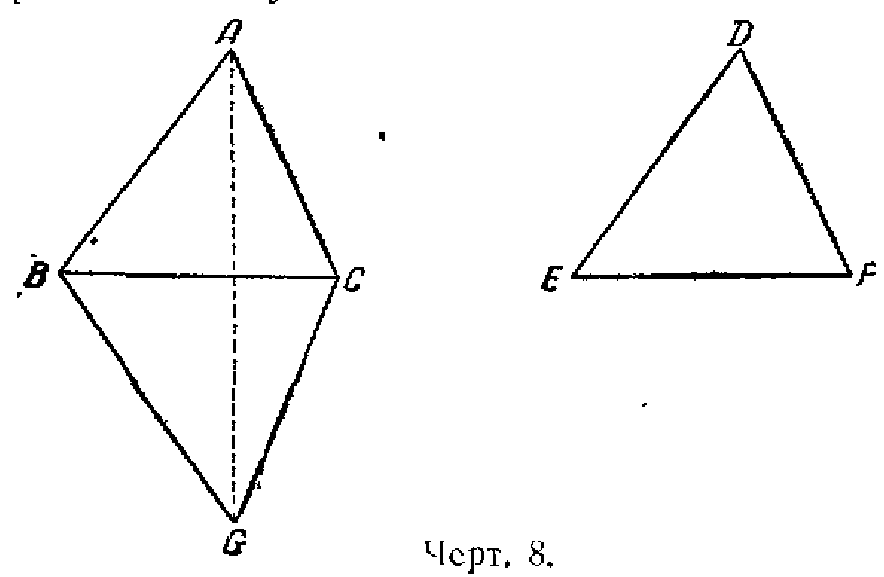


Черт. 7.

Такое доказательство, конечно, не может быть принято Евклидом, ибо *построение биссектрисы не является известным.*

Совершенно в античном духе доказательство *приложением* (приписываемое Филону) и вошедшее во многие учебники.

Оно состоит в том, что треугольник DEF (перевёрнутый) прилагается так к ABC (черт. 8), что сторона EF оказывается на стороне BC и треугольник EDF в положении BCG. Точка A



Черт. 8.

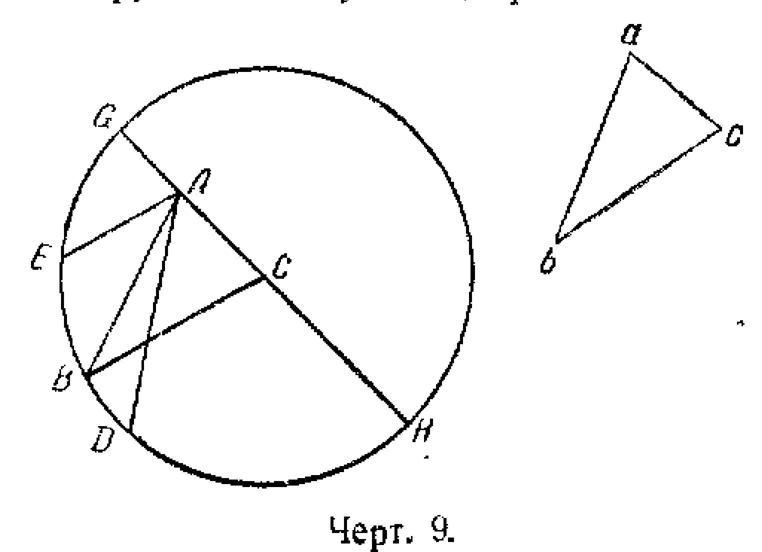
соединяется прямой с G и на основании предложения 5 доказывается, что в $\triangle ABG$ и $\triangle AGC$ углы при A и G соответственно равны, откуда заключается, что

$$\angle BAC = \angle BGC = \angle EDF,$$

и третий случай конгруэнтности треугольников сводится к первому случаю.

Арнольдианский порядок, о котором мы ниже будем говорить, приводит к доказательству третьего случая равенства треугольников на основании свойств хорд окружности.

Если внутри окружности (с центром в C) взять точку A (черт. 9), то кратчайшей линией, проходящей через A и соединяющей её с окружностью, будет та, продолжение которой про



Черт. 9.

ходит через центр C; наибольшей же будет та AH, на которой лежит центр C, и линия AE тем больше, чем она меньше наклонена к AH.

Для доказательства наложимости abc на ABC в случае $AC = ac$, $AB = ab$, $BC = bc$ поступаем так: ca накладываем на CA и доказываем, что ab пойдёт по AB. В самом деле, она не могла бы пойти ни по AE, ни по AD, так как в первом случае ab была бы меньше, а во втором больше чем AB.

Черт. 10.

40. Деление угла пополам. Почему Евклид не употребляет наш способ, состоящий в том, что из A (по постулату 3) описывается окружность DE, затем из точек D и E описываются окружности равных радиусов, пересекающиеся в F, а полученная точка F соединяется прямой с A (черт. 10).

Это построение опирается на тот же третий случай конгруэнтности треугольников.

Я напомню, что постулат 3 понимается в смысле возможности описания круга из данной точки D радиусом, равным отрезку DE, *проходящему* через эту точку.

Если бы Евклид описывал, как мы, из D круг какого угодно радиуса, то ему необходим был бы *перенос* его в E — операция,

достижимая с помощью предложения 2, но значительно осложняющая построение.

Следует отметить, что евклидово построение допускает два решения: треугольник может быть построен по различные стороны DE.

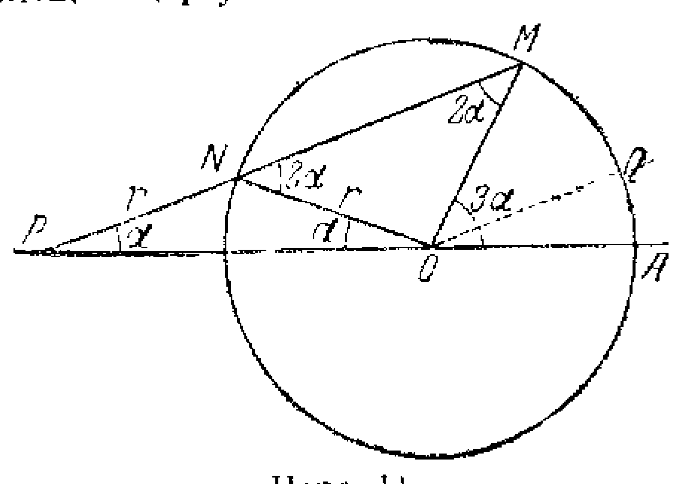
41. Трисекция угла[93]. Тремя знаменитыми классическими проблемами являются следующие:

1) Построение стороны квадрата, равновеликого данному кругу (квадратура круга).

2) Построение куба, равновеликого удвоенному данному кубу (Делийская проблема).

3) Деление угла на три равные части.

Все эти задачи, как было доказано лишь в XIX в., *неразрешимы* с помощью циркуля и линейки.



Черт. 11.

Вслед за предложением 9 естественно ожидать другое, если не о делении угла на n равных частей, то о делении на 3, 4, 5, 7 частей. Правда, такое предложение являлось бы неиспользованным для основной цели «Начал», — для построения платоновых тел; Евклида эта проблема, возможно, и не особенно интересовала. Но в дальнейшем, с приобретением геометрией большего практического значения, задача эта могла явиться не только предметом пустого математического спорта.

Практические методы трисекции, основанные на введении недозволенных у Евклида операций с линейкой или на свойствах шарнирных механизмов, изобретаются главным образом в сравнительно недавнее время, примерно в XVII столетии.

Наиболее простой приём состоит в употреблении линейки с масштабом MNP (черт. 11), на которой откладывается отрезок PN равный радиусу $r = ON$ — окружности, описанной из вершины O того угла MOA, который мы желаем разделить на три части. Будем двигать линейку MNP так, чтобы точка P сколь-

---

[93]) См. прим. 58 и 49.

зила по продолжению стороны OA, а сама линейка всё время проходила бы через точку M. Точка N в некоторый момент окажется на окружности AMN; тогда угол NPO, как нетрудно видеть, и будет искомый, равный одной трети угла MOA. Действительно, по свойству равнобедренного треугольника угол NOP будет равен углу $NPO=\alpha$; далее, угол MNO, как внешний по отношению к треугольнику NPO, будет равен сумме углов P и O, т. е. 2α; затем в треугольнике OMN угол $N=2\alpha$ будет равен углу M и, наконец, угол AOM, внешний по отношению к треугольнику OMP, будет равен сумме углов OMP и MPO, т. е. $2\alpha+\alpha=3\alpha$.

42. Деление отрезка пополам. Относительно этого построения надо сделать то же замечание, что и относительно предыдущего предложения. Тот факт, что Евклид строит на AB равносторонний треугольник, находит себе объяснение в правильном понимании постулата 3.

Почему Евклид ставит это построение в зависимость от деления угла пополам?

Он мог бы построить с другой стороны равносторонний треугольник ABE и, соединив вершины C и E прямой, получить D в точке пересечения этой прямой с AB.

Но по существу построение ABE и соединение E с C прямой и сводится к делению угла ACB пополам на основании предложения 9; если бы он не ссылался на это построение, то ему пришлось бы доказывать равенство треугольников ACE и ABE, как оно уже доказано в предложении 9.

43. Восстановление перпендикуляра. Ссылка Гейберга на предложение 3 (в начале доказательства) является излишней: операция отложения отрезков $CE=CD$ с помощью описания окружности из C, как из центра, входит как составная часть в доказательство предложения 2. Построение равностороннего треугольника объясняется опять истинным смыслом постулата 3.

Из описанного предложения вытекает (интересно, что сам Евклид этого не подчёркивает) единственность перпендикуляра, который можно восставить к прямой из заданной её точки.

Некоторые комментаторы старались извлечь из этого предложения доказательство того, что две прямые не могут иметь общего отрезка, и отсюда доказать, что две точки определяют одну и только одну прямую.

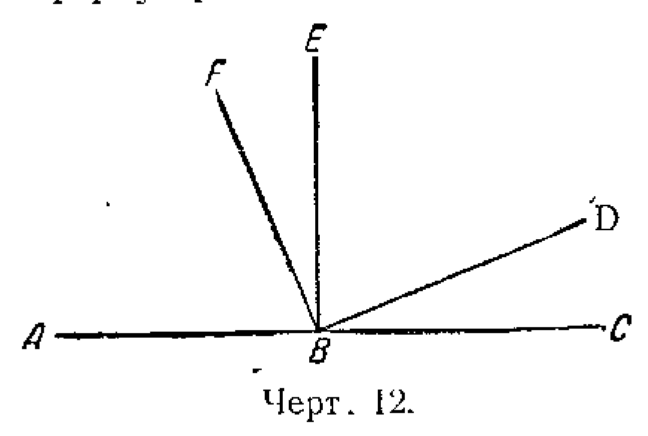
Они рассуждали так: если бы одна прямая шла по BC, другая по BD, то, проведя перпендикуляр BE к AB, по определению прямого угла, мы получили бы, что $\angle EBD=\angle EBC$, т. е. часть равна целому (черт. 12).

На это возражали, что из предложения 11 следует, что существует один перпендикуляр не к отрезку AB, а ко всей прямой ABC и что можно ожидать для ABC и DBA различных перпендикуляров.

Конечно, из того, что все прямые углы равны (постулат 4), следует, что существует только один перпендикуляр, и обратно —

из того, что всего существует только один перпендикуляр, следует, что все прямые углы равны. Но Евклиду нужна *построяемость*, являющаяся для него критерием существования, и он доказывает здесь существование перпендикуляра в своём смысле.

Построение Евклида даёт только один перпендикуляр. Весьма вероятно, что этот результат формулировался так, что существует только один перпендикуляр и что не мыслилась возможность других построений, дающих перпендикуляр. Постулат 4 о равенстве прямых углов должен был явиться позже, когда возникла эта мысль. Но эта мысль должна была повести от евклидовой точки зрения к лежандровой[99] — к возможности существования какого-нибудь построения и, наконец, к существованию независимо от построения, потому что единственность решения выводится из единственности существования.



Черт. 12.

44. Перпендикуляр в середине отрезка. В современной геометрии большую роль играет понятие геометрического места; у Евклида этого понятия нет.

Перпендикуляр в середине C отрезка DE он не рассматривает как геометрическое место точек, равноотстоящих от D и E; это свойство равноудалённости точек перпендикуляра от D, E ему не приходит в голову, так как он употребляет *не наше общее построение, а своё частное.*

В истории геометрического учебника это свойство перпендикуляра в середине отрезка сыграло кардинальную роль.

Борьба с методом наложения и выработка нового неевклидовского порядка теорем привела к употреблению особой аксиомы, выдвинутой впервые Арно.

Если две точки прямой CF равноудалены от D и E, то то же относится и к другим точкам на CF[100].

45. Арнольдианский порядок геометрии[101]. В истории геометрического учебника очень большую роль сыграла книга знаменитого главы янсенистов и одного из авторов Порт-Рояльской логики—Арно (Arnauld). Его книга никогда не служила учебни-

---

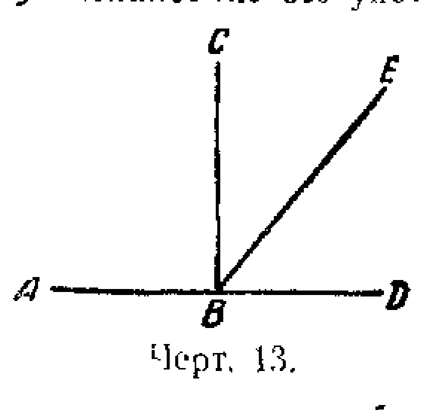
[99]) См. прим. 20.

[100]) См. прим. 56.

[101]) Арнольдианский порядок в учебниках: L a m y, Éléments de Géométrie, Paris, 1735. — S a u v e u r, Géométrie théorétique et pratique, Paris, 1753. — R i v a r d, Éléments des Mathématiques, Paris, 1758.

ком, но влияние её сказывается на всех долежандровских геометрических учебниках, и более того, на известном «Руководстве» Остроградского[102]), находившегося больше под влиянием старых французских учебников, чем Лежандра.

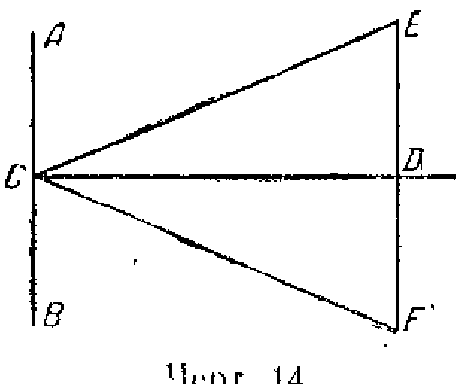
В арнольдианском порядке изложения равенство треугольников как фигур, более сложных, чем углы и параллельные, отодвигается возможно дальше. Следует отметить, что и в некоторых современных учебниках лежандрова типа теория параллельных предшествует равенству треугольников. Порядок этот поддерживается несколько искусственно с помощью изменения формулировки. Остроградский формулирует положение Арно так: «Когда Вы встретите на боках двух равных углов *BAC* и *DEF* части *AB* и *ED*, *AC* и *EF* соответственно равные, то необходимо допустить равенство линий, соединяющих в каждом угле концы этих частей». Это (правда, *не полное*) положение о равенстве *треугольников* (но без употребления термина треугольник).



Черт. 13.

Для проведения всего плана Арно и приходится принимать свою аксиому, которая затем имеет очень интересную историю.

46. Королларий Симсона. Из предложения 13 Симсон[103]) выводит, что прямые не могут иметь общего отрезка. Если бы одна прямая шла по *BD*, а другая по *BE*, то так как сумма *ABC* и *CBD*, а также *ABC* и *CBE* равняются каждая двум прямым, то $\angle ABE$ оказался бы равным $\angle ABD$, т. е. часть равной целому (аксиома 8) (черт. 13).



Черт. 14.

47. Знак угла. Предложение 14 интересно в том отношении, что здесь впервые приходится различать *углы с различных сторон.*

Угол здесь является не просто наклонением, но наклонением *в ту или другую сторону*; такие углы могут быть равны, но не являются оба одним и тем же углом.

При введении в геометрию положительных и отрицательных величин эти углы приобретают различные знаки и перестают быть равными. Порфирий, по свидетельству Прокла, подчёркивая ограничение, что углы берутся с противоположных сторон, указывал, что теорема не верна, если снять это ограничение.

---

102) См. прим. 64.
103) См. прим. 34.

Я ограничиваюсь чертежом, из которого читатель сам легко усмотрит построение Порфирия (черт. 14).

Здесь $\angle ACF + \angle ACE = 2d$, но оба угла лежат по одну сторону прямой ACB, и EC не составляет продолжения CF.

48. Обратные теоремы. Обратной теоремой в отношении данной называется такая, для которой условие данной служит заключением, а заключение является условием.

Для положения: если есть A, то будет B, обратным будет: если есть B, то будет и A.

Но при задании нескольких условий возможно несколько обратных положений. Для положения: если есть A и B, то будет и C, обратными являются: если есть A и C, то будет и B, и если есть B и C, то будет и A.

Так это и имеет место для предложения 15 о вертикальных углах: Прокл[104]) доказывает следующее обратное ему предложение.

Если две прямые, сходящиеся к той же точке на третьей прямой, образуют с третьей равные углы, взятые с противоположных сторон, то они имеют то же направление, т. е. если $\angle AEC = \angle BED$, то DE и EC образуют одну прямую.

Пелетье же даёт другое обращение[105]).

Если четыре прямые, исходящие из одной точки, образуют равные противоположные углы, то противоположные прямые имеют то же направление, т. е. если $\angle AEC = \angle BED$ и $\angle DEA = \angle BEC$, то DE и EC, BE и EA образуют одну прямую.

49. Теорема Гаубера. Основные логические аксиомы, — тождества, противоречия и исключённого третьего, — на которых зиждятся силлогизмы, входят наряду с математическими аксиомами в логическое построение математики. В ряде умозаключений вводятся также и *чисто логические теоремы.*

Примером можно выставить доказательство некоторых обратных теорем геометрии с помощью теоремы Гаубера[106]).

Эта теорема состоит в следующем: если установлено несколько теорем, условия которых

$$n,\ n',\ n'',\ \ldots$$

обнимают *все возможные* случаи, а заключения которых $c, c', c'', \ldots$ *несовместны*, то все обратные теоремы верны: из c вытекает n, из $c' \to n'$, из $c'' \to n''$ и т. д.

Доказательство. Предположим, что при c не может иметь место n: тогда должны иметь место $n', n'', \ldots$, ибо это по усло-

104) См. прим. 25.

105) Peletarius, In Euclidis geometrica demonstrationum libri sex, Lugduni, 1557.

106) Pfleiderer, Scholien zu Euclidis Elementen; тетр. 1, Stuttgart, 1827, стр. 63.

вию нашему единственно возможные гипотезы. Но, если выполнено n', то из этого предположения следует c', так что рядом с c имеет место и c'; это же в силу несовместности c и c' быть не может.

Эта логическая теорема применима к доказательству геометрических теорем и упрощает их.

Примером могут служить как раз предложения 18 и 19 книги I «Начал».

Условиями являются соотношения сторон:

$$AC > AB, \quad AC < AB, \quad AC = AB;$$

заключения:

$$\angle B > \angle C, \quad \angle B < \angle C, \quad \angle B = \angle C.$$

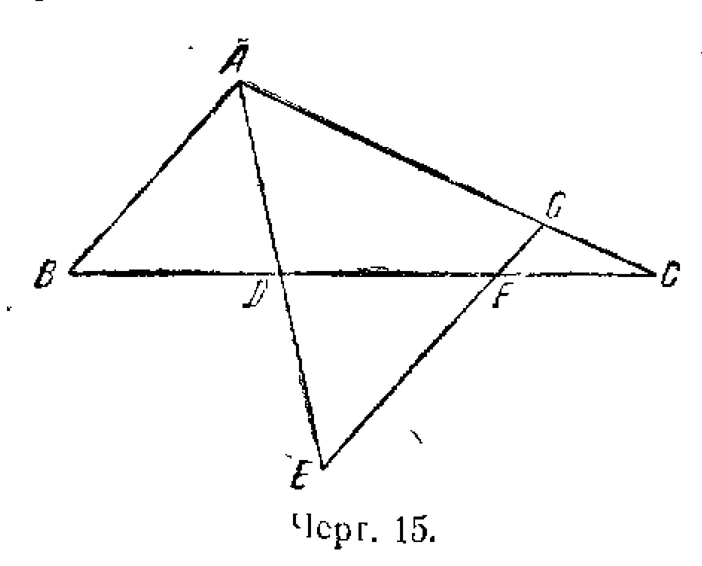
Условия, конечно, единственно возможные.

Заключения, конечно, несовместны. Поэтому на основании теоремы Гаубера сейчас же выводим, что при

$$\left.\begin{array}{l}\angle B > \angle C \rightarrow AC > AB, \\ \angle B < \angle C \rightarrow AC < AB,\end{array}\right\} \quad \text{(предложение 19 книги I)}$$

$$\angle B = \angle C \rightarrow AC = AB. \quad \text{(предложение 6 книги I)}$$

50. Выпрямление доказательства. Предложение 19 очень просто доказывается апагогически. Комментаторы задавались целью дать прямое доказательство.



Черт. 15.

Оно оказалось довольно сложным. Мы приведём его главным образом потому, что в основе его лежит интересная лемма, которая используется и в других случаях.

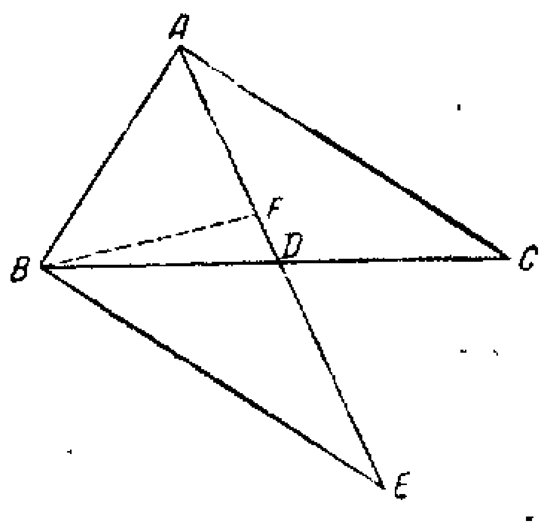
Если угол BAC треугольника ABC делится пополам прямой AD, которая рассекает противоположную сторону BC на отрезки BD и DC, то к меньшему отрезку BD прилегает меньшая сторона AB, а к большему DC большая AC (черт. 15).

Доказывается лемма так: продолжается прямая AD на отрезок $DE = AD$ и откладывается $DF = BD$.

Соединяем E с F прямой EG.

Нетрудно доказать равенство треугольников ABD и DEF и равенство углов BAD и DEF; вспомнив, что AD биссектриса, докажем, что $\triangle AEG$ равнобедренный и $AG = GE$.

Но $AC > AG$, $AG = GE > AB$ и потому $AC > AB$.



Черт. 16.

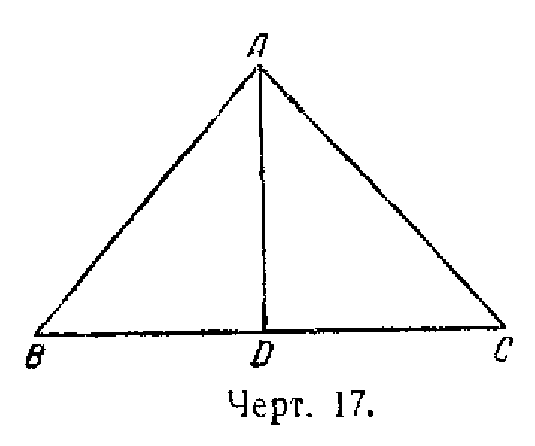
Чтобы доказать с помощью этой леммы, что при $\angle ABC > \angle ACB$ и $AC > AB$ (черт. 16), доказывается сначала, что треугольники BDE и ADC (если $BD = DC$ и $AD = DE$) будут равны, затем, что биссектриса BF угла ABE пойдёт внутри ABD, так как $\angle EBD = \angle ACB < \angle ABC$, и потому отрезок $FE > AF$. Отсюда же на основании отмеченной выше леммы получаем, что

$$BE = AC > AB.$$

Нетрудно *апагогически* обратить вышеупомянутую лемму, т. е. доказать, что если AD биссектриса угла BAC, то при $AB < AC$ и $BD < DC$, т. е. к меньшей стороне прилегает меньший отрезок, к большей стороне — больший.

51. Прямая как кратчайшая линия между точками. Эту же теорему по свидетельству Прокла Герон и Порфирий доказывают иначе (черт. 17).

Угол BAC в треугольнике ABC делится пополам прямой AD. Внешний угол ADB треугольника DAC больше, чем угол DAC. Но при построении $\angle DAC = \angle BAD$, поэтому в треугольнике BAD $\angle ADB > \angle BAD$. Но против большего угла лежит большая сторона, поэтому $BA > BD$. Так же доказывается, что $AC > DC$, поэтому окончательно $BA + AC > BD + DC = BC$.



Черт. 17.

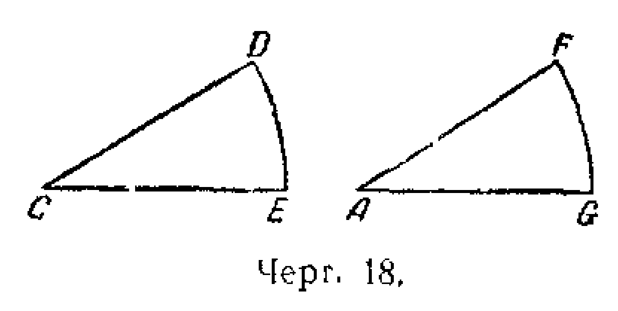
Архимед, а за ним Лежандр обращают это положение в *определение прямой*, которая оказывается кратчайшей линией между двумя точками.

Многим положение это представлялось совершенно очевидной истиной. Прокл говорит, что эпикурейские математики счи-

тали смешным доказывать такое положение, так как его прекрасно знает осёл, идущий по прямой линии к сену.

52. Построение треугольника по трём сторонам. Построение отличается от современного тем, что совершается операция *предложения 2 — перенос заданных отрезков на прямую.* Кроме того, не исследуется условие возможности пересечения проводимых кругов, которое сводится к тому, что сумма двух заданных сторон больше третьей, а разность меньше, хотя в формулировке предложения об этом упоминается.

53. *Перенос угла.* *На основании сказанного выше наш* приём переноса угла для Евклида является неприемлемым.



Черт. 18.

Мы описываем окружность каким-либо радиусом из точки C и тем же радиусом *из точки A. Затем засекаем* на окружности дугу FG, описанную из точки G радиусом ED, и соединяем A прямой с F (черт. 18).

Евклид не считает себя в праве делать такой перенос отрезков. Он должен задать на CE и CD *какие угодно отрезки,* так как его построение не упрощается от того, что берутся равные отрезки CE и CD, но наоборот, осложняется, так как требует переноса CE на AG и ED на FG.

Это построение приписывается Энопиду Хиосскому.

54. Корректив Симсона к двадцать четвёртому предложению. Прокл, Кампанус, Командинус[107]), а также Р. Симсон отмечают неполноту евклидова доказательства: Евклид рассматривает только тот случай, когда BC оказывается внутри угла DEF. Но может случиться, что BC упадёт вне DEF; тогда чертёж будет другой (черт. 19).

Углы при основании в $\triangle DFG$ равны; следовательно, $\angle KFG = \angle IGF$ (по предложению 5). Но $\angle EFG > \angle KFG$ и потому $\angle EFG > \angle IGF$ и тем более $\angle EFG > \angle EGF$, откуда $EG = BC > EF$ (предложение 19).

55. Прямое доказательство предложения 25. И здесь, как в случае предложения 19, можно дать прямое доказательство, что по свидетельству Прокла делает Менелай Александрийский[108]). Пусть в треугольниках ABC и DEF стороны $AB = DE$ и $AC = DF$, но $BC > EF$.

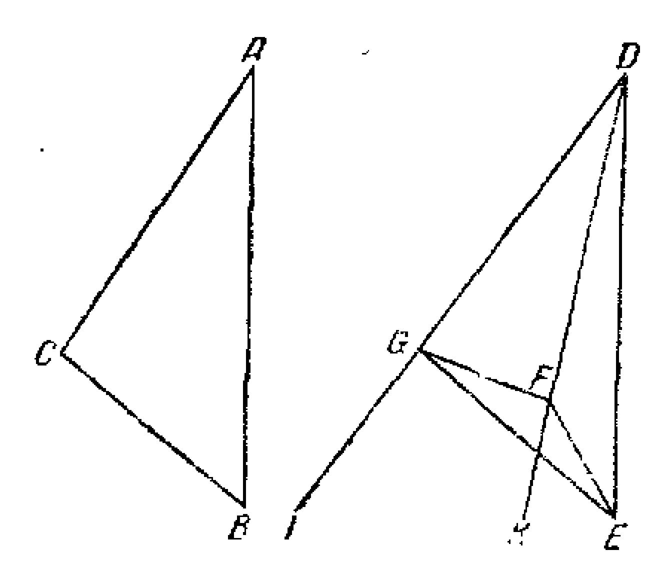
---

[107]) О Кампанусе см. Cantor, Vorles., т. II. — Lamberti, Contenta Euclidis Megarensis geometricorum elementorum libri XV. Campani Galli transalpini in eosdem commentariorum libri XV, Parisii, 1516. О Командинусе см. Cantor, т. II, стр. 553. Commandini, Euclidis elementorum libri XV, Parisii, 1576. О Прокле и Р. Симсоне см. прим. 25 и 34.

[108]) О Менелае см. Cantor, Vorles., т. I, стр. 385.

На основании $\triangle ABC$ откладывается $BG = EF$, затем строится $\angle GBH = \angle DEF$ и $BH = ED$ (черт. 20).

Затем проводится AH и HG до пересечения в I со стороной AC.

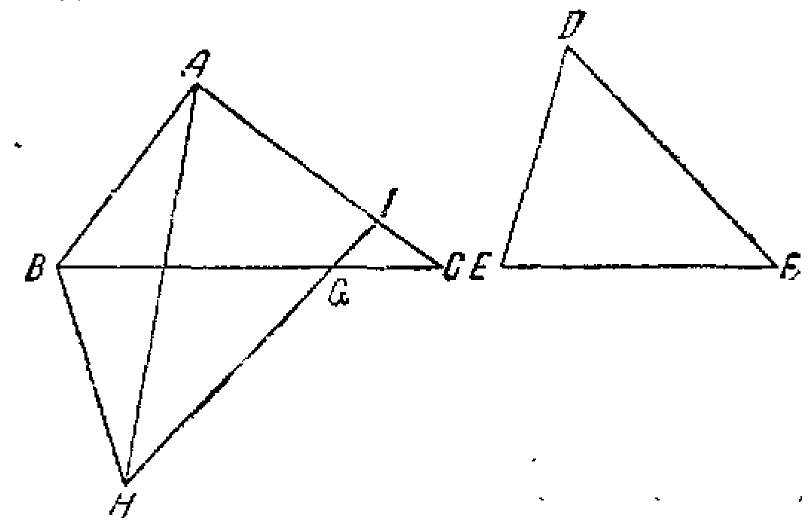


Черт. 19.

Тогда $\triangle DEF$ и $\triangle BGH$ равны; отсюда

$$HG = DF = AC,$$
$$\angle GHB = \angle EDF.$$

Но $HI > HG = AC$ и $AC > AI$ и поэтому $HI > AI$, вследствие чего $\angle IAH > \angle IHA$.

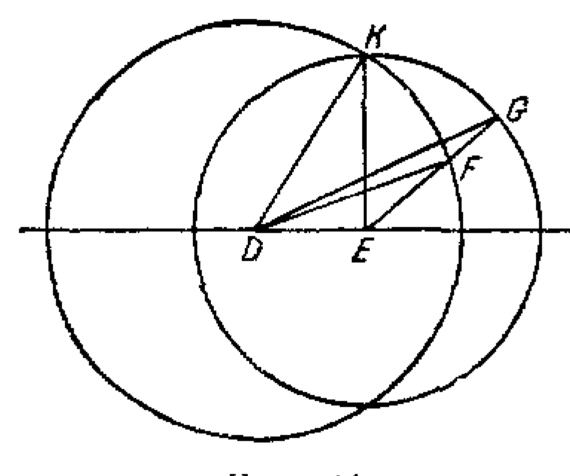


Черт. 20.

Прибавляя к обеим частям неравенства $\angle BAH = \angle BHA$, получаем $\angle BAC > \angle BHG = \angle EDF$.

Прокл даёт ещё другое доказательство этой теоремы.

Предполагая, что $DE = AB$, $DF = AC$, он описывает из точек D, E окружности радиусов $DK = AC$ и $EK = CB$ (черт. 21). Тогда $\triangle DKE$ будет нашим треугольником $\triangle ABC$.



Черт. 21.

В $\triangle DFE$ и $\triangle GDE$ $\angle GDE > \angle FDE$, но с другой стороны, $\angle KDE = \angle BAC > \angle GDE$.

56. Второй случай конгруэнтности треугольников. Знание равенства треугольников при равенстве одной стороны и двух прилежащих углов Прокл со слов Эвдема приписывает Фалесу Милетскому. С помощью этого свойства Фалес определял расстояние корабля от берега.

Евклид при доказательстве второго случая конгруэнтности треугольников не пользуется, как мы, методом наложения, но прибегает к анагогическому доказательству. Между тем наш приём совершенно в духе Евклида и вполне соответствует доказательству предложения 4.

Евклид выбрал свой путь потому, что он взял общее положение, соединил две теоремы о равенстве треугольников при равенстве *их оснований и углов при основании, и* о равенстве треугольников при равенстве оснований, одной пары углов при основании и углов, противоположных основаниям.

Какую роль играла эта вторая часть?

Она могла заменять теорему о равенстве двух прямоугольных треугольников ABC и DEF при равенстве гипотенуз CB и FE и пары острых углов.

У Евклида её нет. Мы её доказываем с помощью теоремы, что из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр (такой теоремы у Евклида тоже нет).

57. Четвёртый случай конгруэнтности треугольников. Четвёртым случаем мы считаем не тот, который выдвигается Евклидом во второй части предложения 26, а другой, неизвестный Евклиду [109]).

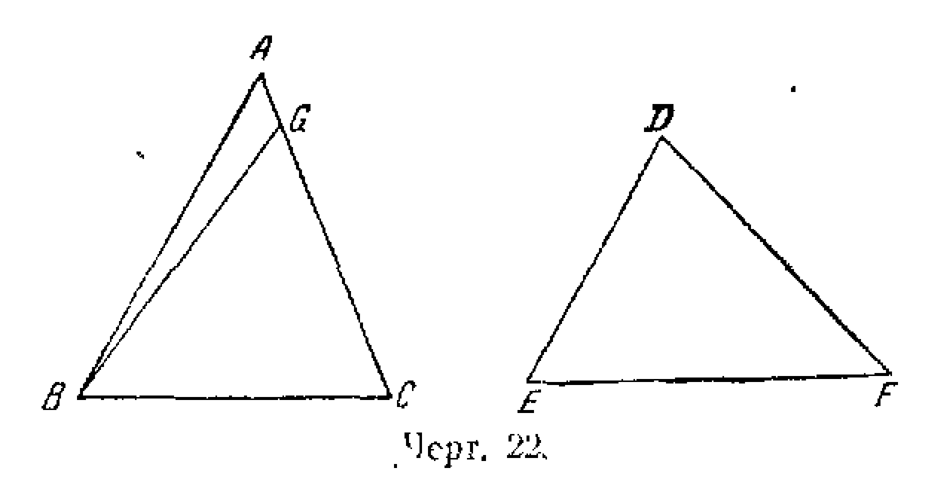
---

[109]) Объяснение тому странному явлению, что у Евклида нет *четвёртого случая* равенства треугольников, а есть ему отвечающий случай подобия (предложение 7 книги VI), Тропфке находит в том, что в книге I Евклид использовал работы Пифагора, которому этот четвёртый случай не был известен, а в VI — *работы Евдокса, жившего гораздо позже* (*408—355 до н. э.*), которому он был уже известен.

Если два треугольника ABC и DEF имеют по две стороны, равные каждая каждой $AB = DE, BC = EF$, и угол ACB, противоположный большей из равных сторон ($AB > BC$), равен углу DFE, противоположному тоже большей стороне ($DE > EF$), то треугольники будут равны.

Доказательство ведётся апагогически (черт. 22).

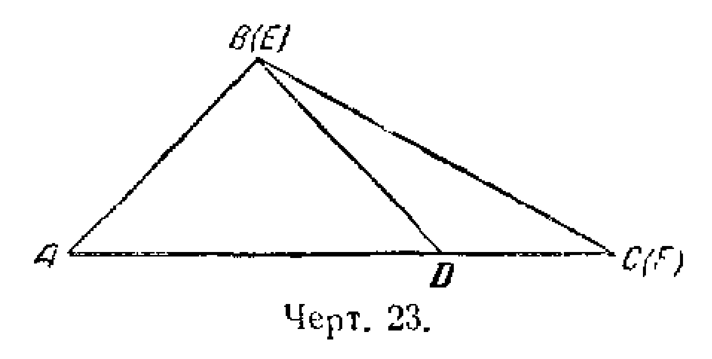
В предположении, что $AC > DF$, откладывается на CA отрезок $CG = DF$ и доказывается, что треугольники EDF и BGC



Черт. 22.

равны. Далее, на основании предложения 16 доказывается, что $\angle BGA > \angle BCG$ и потому $\angle BAC$, равный $\angle BGA$, больше $\angle BCA$, и на основании предложения 19, что $AB < BC$, что противоречит предположению. Так же рассматривается случай, когда $AC < DF$.

Р. Симсон формулирует иначе этот случай равенства треугольников. Если два треугольника ABC и DEF имеют по две стороны, равные каждая каждой $AB = DE$, $BC = EF$, и угол ACB,



Черт. 23.

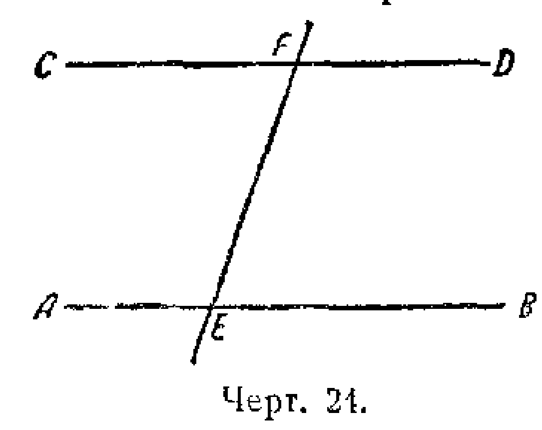
противолежащий стороне AB, равен углу DFE, противолежащему стороне DE, то треугольники будут равны, если углы BAC и EDF, противолежащие равным сторонам BC и EF, будут или оба острые, или прямые, или тупые.

Следует отметить, что треугольники, имеющие по две стороны равные и по равному углу, противолежащему одной из равных сторон, могут быть неравными, если не соблюдено условие, что равные углы противолежат *большей* из равных

сторон или что другие углы, противолежащие равным сторонам, оба острые, или прямые, или тупые.

С данными сторонами $CB = EF$, $ED = AB$ и углом $\angle ACB = \angle DFE$ существует не один, а два треугольника $\triangle CDB$ и $\triangle ACB$ (черт. 23).

58. Приём Ома[110]. Ом употребляет оригинальный приём доказательства этой теоремы. Он накладывает на $BEFD$ часть $AEFC$, *перевернув* так, что FE накладывается на EF, FC идёт по EB, а AE по FD (черт. 24).



Черт. 24.

Тогда при предположении пересекаемости EB и FD в G прямые EA и FC должны тоже *пересечься* в другом направлении в H, и мы получим две прямые, пересекающиеся в двух точках G и H, что противно аксиоме 9 Евклида о двух прямых, заключающих пространство.

В доказательстве Ома имеется фузионистическая идея использования трёхмерного пространства, тогда как Евклид предпочитает не пользоваться ею.

59. Абсолютные теоремы. В истории геометрии постулат 5 Евклида сыграл особенно важную роль. Тщетность попыток его доказательства стимулировала создание неевклидовой геометрии, сперва геометрии Лобачевского[111], в которой из данной точки можно провести не одну прямую, не пересекающую данную, а пучок, заключающийся между двумя прямыми, называемыми параллельными, а затем геометрии Римана[112], в которой изъят не только постулат 5, но и 9-я евклидова аксиома.

Предложения и построения, имеющие место в геометриях Евклида и Лобачевского, называются *абсолютными*.

До теоремы 29 идут положения, не зависящие от аксиомы о параллельных. Их можно также признать *абсолютными*, если ввести в некоторые из них известные ограничения. Можно было бы перенести их на сферу, на которой большие круги обладают теми же свойствами, что и римановы прямые, но при этом поставить условие, что вся фигура заключается в одной полусфере.

Теоремы о равенстве треугольников в этом смысле являются абсолютными теоремами; *абсолютной же является теорема о том,*

---

[110] Ohm, Ebene Raumwissenschaft, 2 Aufl., Berlin, 1835, § 26, стр. 111.

[111] Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I. Сочинения по геометрии, М. — Л., 1946.

[112] Б. Риман, Сочинения, М. — Л., 1948. — Сборник «Об основаниях геометрии», Казань, 1895. — Богомолов С., Введение в неевклидову геометрию, М. — Л., 1934.

что внешний угол больше внутреннего с ним не смежного, и вытекающее отсюда положение о параллельности в случае равенства накрестлежащих углов.

Абсолютными являются построения, относящиеся к проведению перпендикуляров и к делению угла и отрезка пополам.

60. Аксиома о параллельных в античное время. В настоящее время вполне строго доказано, что постулат 5 не выводится из других аксиом.

Из различных попыток доказательства постулата 5, базирующихся на ему эквивалентных утверждениях, для нас наиболее интересными являются те, которые содержат в себе некоторые идеи, получившие развитие в геометрии, и те, которые имеют *методическое значение*, т. е. могут быть положены в основу различных школьных методических приёмов изучения параллельных.

Недостаточно ясные доказательства Прокла и Птолемея, безусловно соответствующие упадку античной геометрии, для нас мало интересны. О параллельных вовсе не так много в античное время размышляли, как это нам теперь кажется. Следует обратить внимание на то, что ни Аполлоний[113]), ни Архимед *ничего не оставили, из чего мы могли бы вывести заключение* об их интересе к этому вопросу.

Видимо, вопросом этим начали интересоваться только в I в. нашей эры.

Я думаю, что и Гемина и Птолемея[114]) он интересовал не в той степени, как это нам теперь кажется.

К Посидонию и Гемину относят только новое *определение параллельных.* Из того, что они описывали параллельные как прямые равноотстоящие (иначе чем Евклид), ещё вовсе не вытекает, что они давали вместо евклидового другое доказательство предложения 29.

До Прокла остаётся только один Птолемей, давший совершенно неудовлетворительное доказательство аксиомы о параллельных.

Верно только одно, что аксиома о параллельных выступила на видное место много позже Евклида, и проблема эта была поставлена математиками не эпохи *расцвета*, а эпохи *упадка*, скорее комментаторами, чем оригинальными мыслителями.

Стремился ли античный комментатор к более строгому обоснованию евклидовых «Начал», я сильно сомневаюсь.

61. Потенциальная бесконечность и параллельные. Следует сказать несколько слов об интересном доказательстве Валлиса.

Валлис постулирует возможность существования треугольника, подобного данному, что равносильно, правда в специальной форме, постулированию гомогенности пространства.

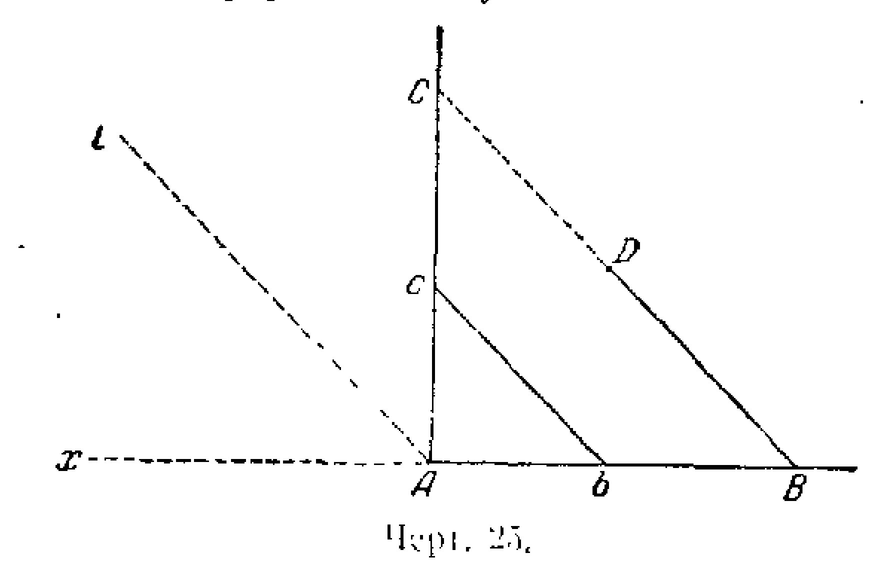
---

[113]) Об Аполлонии см. Cantor, Vorles., т. I, стр. 318. — Kegelschnitte, пер. Balsam, Berlin, 1861, Conica, ed. Heiberg, Leipzig, 1891—1893. — Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitte im Alterthum, Kopenhagen, 1886.

[114]) О Птолемее см. Cantor, Vorles., т. I, стр. 387.

Рассуждение Валлиса[115] заключается в следующем: пусть AC и BD — две прямые, обладающие тем свойством, что углы CAB и DBA, образуемые ими с какой-нибудь секущей AB, дают в сумме величину, меньшую $2d$; предположим для определённости, что угол CAB прямой, а DBA острый (черт. 25). Требуется доказать, что прямая BD обязательно должна пересечь AC.

Передвинем прямую BD параллельно самой себе так, чтобы она заняла положение AL. Поскольку угол LAx равен острому углу DBx, то полупрямая AL будет вся целиком заключаться



Черт. 25.

внутри прямого угла CAx и все точки AL *будут находиться слева* от AC. Передвинем теперь AL чуть-чуть вправо так, чтобы точка A перешла бы в положение b и, таким образом, оказалась *справа* от A. Невозможно предполагать, чтобы при достаточно малом Ab передвинутая полупрямая AL не имела бы ни одной точки слева от AC. Но если так, то она, передвинутая в положение bc, обязательно должна пересечь AC в некоторой точке c. Доказавши, таким образом, существование треугольника Abc, Валлис строит при точке B угол CBA, равный углу cbA, и затем на прямой AB получает треугольник ABC, подобный построенному Abc: сторона BC этого треугольника пересечёт AC в некоторой точке C. Но поскольку через B проходят две прямые BD и BC, образующие с AB один и тот же угол $DBA = LAx$ и $CBA = cbA$, то эти две прямые должны обязательно совпасть; следовательно, прямая BD будет пересекать AC в той же точке C.

Только ли гомогенность пространства постулируется здесь Валлисом?

Нет, в данном рассуждении постулируется, кроме того, нечто в высшей степени важное, а именно, общий принцип теории

[115]) Wallis, Opera Omnia, 1659 — 1699, т. II, стр. 665.

пределов[116]), правда без определённой формулировки, который впервые дан Лейбницем в метафизической форме и Ньютоном — в математической.

Отрезок *Ab*, при котором *bc* пересекает *AC*, должен существовать, ибо если бы он не существовал, то он не будет существовать *и тогда, когда Ab обращается в нуль* (*по-нашему — в пределе*); но в таком случае при совпадении *b* с *A* не будет общей точки у *bc* и *AC*, что, конечно, нелепо.

Валлис мыслит, как Понселе[117]) при установлении своего принципа непрерывности: «Если некоторое положение имеет место, когда некоторые величины не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность и не принимают мнимых значений, то положение остаётся верным и в том случае, когда эти ограничения сняты».

Теперь этот принцип, развенчанный из ранга аксиом, служит уже не для доказательства, а лишь как эвристический метод отыскания новых геометрических истин. Валлису при его смутном понимании предела представлялось совершенно очевидным то, что теперь таковым не является вовсе.

62. Актуальная бесконечность и параллельные. Приведём доказательство постулата 5, данное Бертраном, который оперирует с актуальной бесконечностью. Подобного рода операции были в большой моде среди математиков XVIII в., которые, оперируя с бесконечными величинами, как с конечными, жестоко запутывались в противоречиях (особенно грешен в этом отношении был Фонтенель), что вызвало изгнание актуальной бесконечности и замену её потенциальной — *понятием о пределе* в смысле Д'Аламбера и в нашем.

Теперь мы ясно сознаём, что бесконечность может получить права гражданства лишь при условии отказа от целого ряда свойств, присущих конечным величинам. Поскольку она может стать *«равной»* своей *части*, то нельзя определять «меньше» как существование в какой-либо части большего: одну и ту же гиперболу можно расположить и так, что её ветвь будет заключаться в угле, образованном её асимптотами, и так, что она сама будет заключать эти асимптоты.

Вполне понятно, почему Л. Бертран подошёл к доказательству аксиомы о параллельных с помощью актуальной бесконечности; действительно, именно он определил прямую изогенностью частей, на которые она делит плоскость, именно он определил угол

---

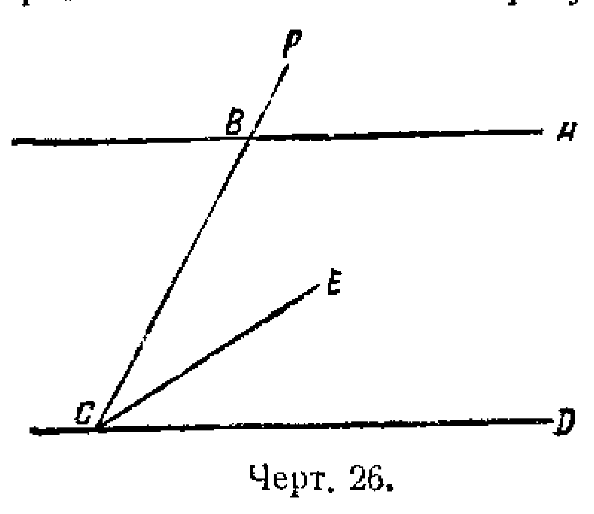
[116]) D'Alembert, *Encyclopédie des arts et des métiers etc.* (Diderot), Limite. — Д. Мордухай-Болтовской, Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики, V, Генезис и история теории пределов, Известия С.К.Г.У., 1928, т. III (XV), стр. 103.

[117]) Poncelet, *Applications d'Analyse à la Géométrie.*, т. II, 1864. стр. 173.

как неопределённую (бесконечную) часть плоскости, ограниченную двумя пересекающимися прямыми.

Прежде всего утверждается, что всякий угол больше полосы между двумя параллельными, так как плоскость можно покрыть конечным числом выходящих из одной точки углов, равных данному, тогда как та же самая плоскость покрывается лишь бесконечно большим числом параллельных полос.

Затем, если мы построим два равных угла DCB и ABP (черт. 26), то по предложению 27 будем иметь две параллельные прямые AB и CD. Возьмём прямую CE так, чтобы угол ECD был меньше угла $ABP = DCB$ так, что CE попадает в полосу $ABCD$. Тогда, если пересечения CE и AB не существует совершенно и прямая CE находится целиком в полосе $ABCD$, то угол DCE должен быть меньше этой полосы (ибо он целиком в ней заключается), что противоречит основной предпосылке.



Черт. 26.

В отношении идейного содержания большее значение имеют исследования Ламберта[118]) и первое доказательство Лежандра[119]).

Они выявляют *гомогенность* евклидовского пространства в форме отсутствия в нём *абсолютной* меры. Лежандр обнаруживает, что предположение, что сумма углов в треугольнике меньше двух прямых (предварительно доказав, что она не может быть больше), приводит к выражению стороны в виде функции от углов, которая, конечно, должна содержать линейный параметр.

63. Роберт Симсон. Укажем *схематически* ход доказательства Р. Симсона.

Оно представляет синтез идей Прокла, Нассир-Эддина[120]) и Клавия[121]), из него путём упрощений вырабатывались школьные доказательства.

П е р в о е п о л о ж е н и е Р. Симсона[122]). Если две равные прямые AC и BD стоят к прямой AB под прямым углом и из точки F прямой CD опущен на AB перпендикуляр FE, то EF, AC, BD будут равны (черт. 27).

---

[118]) S t ä c k e l und E n g e l, Die Theorie der Parallellinien ..., Leipzig, Teubner, 1895.

[119]) См. прим. 20.

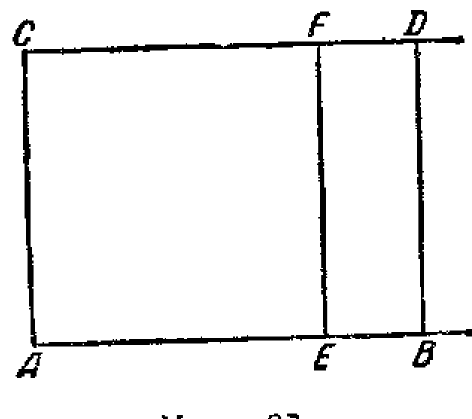
[120]) Euclidis elementorum libri XIII; studio Nasseredini. Roma, 1657, 1801. См. также W a l l i s i i, Opera, т. II, стр. 669.

[121]) См. прим. 67.

[122]) См. прим. 34.

Если бы, говорит Р. Симсон, это было бы не так, то CD сперва подходила бы, а затем отходила бы, чего быть не может. Это положение входит в теорему Клавия.

Второе положение. Если к прямой с одной её стороны под прямыми углами проводятся две равные прямые и соединяются их концы, то соединяющая прямая образует тоже прямые углы с прямыми, вершины которых они соединяют.



Черт. 27.

Это лемма Нассир-Эддина, положение Клавия и установка гипотезы прямого угла Саккери.

Отсюда выводится, что в параллелограмме, в котором три угла прямые, и четвёртый угол должен быть прямым.

Третье положение. Если две прямые образуют острый угол, то на каждой можно найти такую точку, что перпендикуляр, опущенный на другую, будет больше всякой данной величины. Этим положением, как аксиомой, пользуется Прокл.

Четвёртое положение. Если две прямые пересекаются третьей под равными углами — одним внутренним, другим внешним, то существует прямая, пересекающая обе под *прямым* углом.

Пятое положение представляет постулат 5 Евклида.

64. Транзитивность параллельности. Отношение параллельности обладает свойствами, аналогичными тем, которыми обладает равенство

$$a = b \longrightarrow b = a,$$
$$a = b, \quad b = c \longrightarrow a = c,$$

т. е. свойствами *коммутативности и транзитивности*.

Исключая постулат 5 и определяя параллельные прямые, как предельные прямые, между которыми заключаются прямые не пересекающиеся (сверхпараллельные), мы вынуждены эти положения доказывать.

Предложение 30 является эквивалентным постулату 5. Остроградский принимает его за основную аксиому теории параллельных.

65. Сумма углов в треугольнике. Прокл, а за ним Клавий приводят несколько иное доказательство, которое вводят сейчас в некоторые учебники[123]) (черт. 28).

Вспомогательная прямая DF проводится через вершину параллельно *основанию* BC. При A оказываются сосредоточены

---

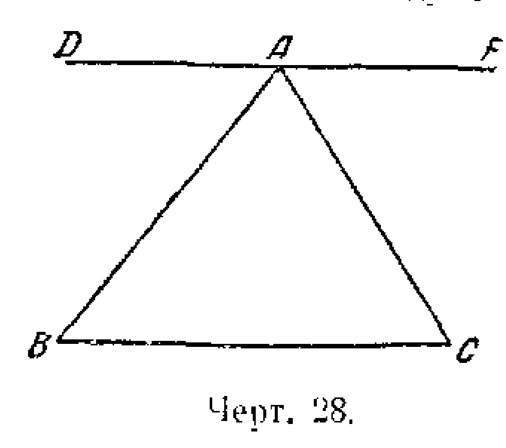
[123]) Enriques, Gli Elementi, стр. 108.

все углы треугольника, так как $\angle ABC = \angle DAB$ и $\angle ACB = \angle FAC$ как пары накрестлежащих углов.

Вот два интересных исторических вопроса, которые занимали Ганкеля.

Каким образом заключили, что сумма углов треугольника равна двум прямым, и какой формы было первое логическое доказательство этой теоремы?

Первые сведения по геометрии устанавливались с помощью дробления площади вспомогательными прямыми на треугольники. Вначале имелось в виду лишь *определение площадей плоских фигур*, но при дальнейшей эволюции геометрии средство это было применено для изучения форм.



Черт. 28.

Вот простейшие геометрические факты этого рода, отмечаемые Платоном в его диалоге «Тимей»: дробление треугольника на два, образование квадрата из двух или четырёх треугольников и т. д.

Одним из фактов, представлявшихся важным в глазах пифагорейцев, было то, что плоскость возможно заполнить только *тремя* родами правильных многоугольников: треугольниками, четыреугольниками и шестиугольниками.

По мнению Ганкеля, первое доказательство теоремы о сумме углов треугольника относилось только к равностороннему треугольнику и вытекало именно отсюда.

Сумма шести углов равносторонних треугольников, как сходящихся в одной точке, равна $4d$, каждый угол одна шестая $4d$, а сумма углов $2d$.

Фалесу приписывается положение о том, что угол, опирающийся на диаметр, прямой. Ганкель думает, что положение это принималось Фалесом без доказательств, как непосредственно очевидная истина, но что уже из неё он выводил то, что сумма углов в прямоугольном треугольнике равна двум прямым. Переход же к общему случаю не представляет затруднения.

Аристотель в «Метафизике» упоминает об этой теореме как ему известной.

По Проклу, доказательство предложения 32, получающееся после проведения через вершину треугольника прямой параллельно основанию, принадлежит Пифагору (вернее пифагорейцам).

В учебниках иногда употребляется форономическое доказательство предложения 32 с помощью прямой, которая, вращаясь около вершин A, B, C от стороны b до c, от c до a, от a до b, совершает полный оборот в $4d$, так что сумма внешних углов равна $4d$, а на долю внутренних остаётся $2d$.

66. Сумма углов многоугольника. В наших учебниках за теоремой о сумме углов в треугольнике следует *формула* для суммы углов в выпуклом многоугольнике:

$$S = (n-2)\,2d.$$

У Евклида совсем нет формул не только символической, но и риторической (словесной) алгебры. Конечно, нельзя сказать, чтобы содержание этой формулы не могло быть выражено на евклидовом языке, но выражение должно быть очень сложно и будет вообще не соответствовать общему характеру «Начал», которые занимаются свойствами геометрических объектов, их сравнением, но совершенно не занимаются измерением; число для них только предмет изучения, но не средство измерения.

Черт. 29.

О сумме углов в многоугольнике впервые говорит Прокл. Формулу даёт Региомонтан (1436—1476).

Интересно отметить, что и многие старые комментаторы идут по пути Евклида.

Кампано занимается не суммой углов n-угольника вообще, но *доказывает*, что сумма углов в звёздчатом пятиугольнике равна двум прямым.

В основу своего вывода он кладёт первую часть предложения 32.

Он замечает, рассматривая $\triangle AIG$ (черт. 29), что внешний угол GAF равен сумме $I+G$. Таким же образом, рассматривая KBH, он получал, что $KBF = K+H$.

Но из $\triangle ABF$ получаем, что сумма углов: $\angle F + \angle GAF + \angle KBF = 2d$, так что действительно

$$\angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle K = 2d.$$

67. Свойства параллелограммов. В настоящее время, изучая параллелограммы, мы не ограничиваемся только равенством противоположных сторон и углов.

У Евклида даже нет упоминания о взаимопересечении диагоналей пополам. Нет изучения прямоугольника и ромба.

Комментаторы, начиная с Клавия, особенное внимание обращали на теоремы, получаемые обращением евклидовых теорем.

Если через A обозначить свойство иметь равные противоположные углы; B — иметь равные противоположные стороны; C — иметь пересекающиеся пополам диагонали; D — быть параллелограммами, то положение 34 сформулируется так для четырехугольника: если D, то A и B. Клавий доказывает, что если A, то D, если B, то D, если C, то D.

К *предложению Евклида, выявляющему диагонали как оси* симметрии ромба, прибавляется положение Клавия, по которому прямая, проходящая через пересечение диагоналей, разделяется в этой точке пополам. Отсюда, конечно, родится понятие о центре симметрии.

В современных учебниках разбираются ещё специальные свойства ромбов и прямоугольников (перпендикулярность диагоналей в ромбе и равенство их в прямоугольнике).

В Меранской программе изучение параллелограммов связывается с общей теорией *симметрии*; параллелограмм оказывается фигурой, имеющей *центр* симметрии (в точке пересечения диагоналей), ромб — центр и две оси симметрии (диагонали), прямоугольник — центр и две оси симметрии (прямые, соединяющие середины противолежащих сторон), квадрат объединяет свойства прямоугольника и ромба (центр и четыре оси симметрии).

Следует обратить внимание на аксиоматическую конструкцию доказательств теории о свойствах параллелограмма, ромба и прямоугольника. Если не пользоваться евклидовой аксиомой о параллельных, то о фигуре $ABCD$, в которой углы A и B при нижнем основании равны каждый прямому углу, а боковые стороны AC и BD имеют равные длины, можно сказать только, что она *прямоугольная трапеция*, и доказать, что углы C и D при верхнем основании тоже равны. Относительно их можно сделать три гипотезы: они могут быть острыми (тогда мы будем иметь геометрию Лобачевского), тупыми (геометрию Римана, если ещё соответственным образом изменить аксиомы сочетания и порядка) или прямыми (геометрия Евклида). Во всех трёх геометриях будут иметь место следующие теоремы: диагонали AD и BC равны (но не обязательно пересекаются пополам), прямая, соединяющая середины верхнего и нижнего оснований, является осью симметрии и поэтому перпендикулярна как к верхнему, так и к нижнему основаниям.

68. Равносоставленные и эквивалентные фигуры. В гильбертовской теории площадей [124]) различаются фигуры равносоставленные и фигуры эквивалентные или равновеликие.

В первом случае фигуры разлагаются на равные (конгруэнтные) многоугольники.

Во втором случае это разложение имеет место после присоединения к каждой равносоставленных частей.

Равносоставленные фигуры являются и равновеликими, но не наоборот.

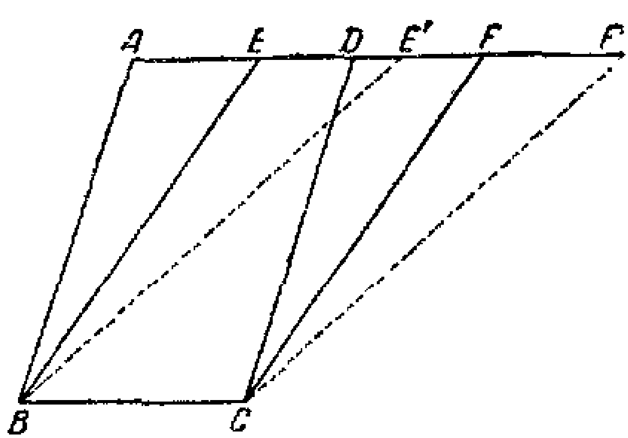
Конечно, это понимание равновеликости построено для того, чтобы развить теорию площадей, не используя аксиомы непрерывности, иное, чем у Евклида.

Для последнего равновелики те фигуры, которые имеют ту же площадь, а площадь — это величина, сущность которой

---

124) См. прим. 38 (гл. IV).

как первичного понятия им не определяется. Следует отметить, что он не даёт измерения площади *числом*. Вообще же площадь можно охарактеризовать числом только после установления понятия об иррациональном числе и взаимно однозначном соответствии между геометрическими величинами и числами.

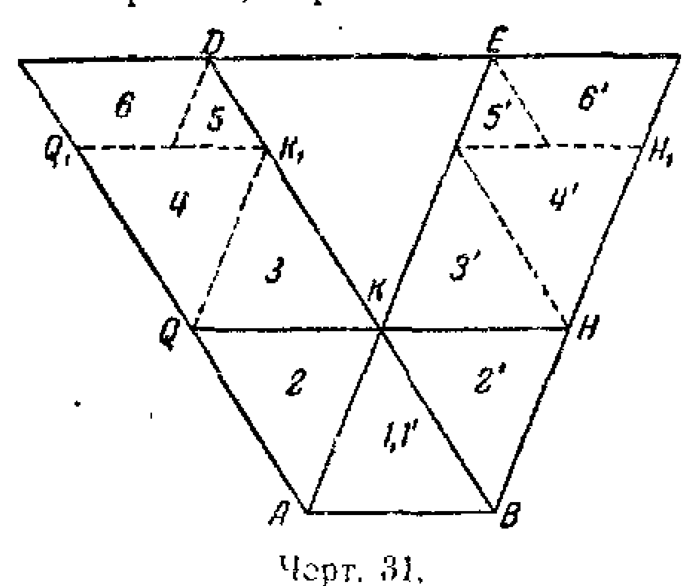


Черт. 30.

В предложении 35 рассматривается только наиболее сложный случай, когда E выходит за AD (черт. 30) и когда приходится устанавливать равносоставленность присоединением части DCF.

В том случае, когда E попадает между A и D, оба параллелограмма имеют общую часть — трапецию $BEDC$ и, кроме того, по равному треугольнику AEB и CDF.

Если доказать, что фигуры, равносоставленные с третьей, равносоставлены между собой (как это делает Гильберт), то в несколько приёмов, переходя от $ABCD$ к $BEFC$, потом



Черт. 31.

к $BE'F'C$ и т. д., можно доказать равносоставленность параллелограммов при условии предложения 35.

Но это можно сделать непосредственно, как показывает следующий чертёж (черт. 31).

Через точку K пересечения сторон BD и AE параллелограммов проводим $QH \parallel AB$.

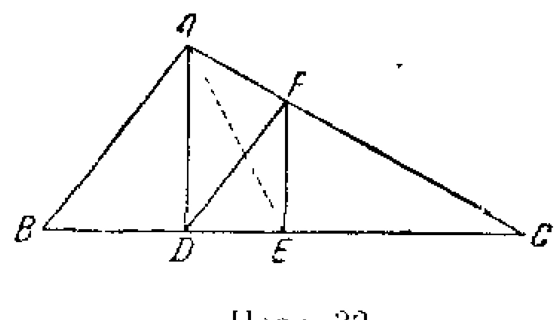
Затем, взяв $QQ_1 = QA$ и $HH_1 = BH$, проводим $Q_1H_1 \parallel AB$ и т. д.

Тогда два параллелограмма, как нетрудно видеть, разобьются на соответственно равные части (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4'), (5, 5'), (6, 6').

69. Деление площадей. К предложениям 38, 39, 40, 41 примыкают сильно интересовавшие математиков эпохи Возрождения проблемы о *делении площадей* [125]).

Простейшей задачей является задача о делении площади треугольника пополам прямой, проходящей через вершину.

Если провести медиану AE (т. е. соединить A с серединой E стороны BC), то получаем решение задачи. Треугольники ABE и AEC будут равновелики (черт. 32).



Черт. 32.

Пелетье делит треугольник пополам прямой, проходящей через данную точку F на стороне AC.

Он из F проводит прямую FE к E — середине BC и из A проводит $AD \parallel FE$; тогда FD даёт решение задачи.

В самом деле, треугольники ADF и ADE, имеющие одно и то же основание AD и вершины F и E на $FE \parallel AD$, равновелики, поэтому $DFC = DEF + EFC = AEF + EFC = AEC = \frac{1}{2} ABC$.

70. Преобразование площадей. Другая задача, также очень интересовавшая математиков эпохи Возрождения, это задача о *преобразовании площадей* [126]) (задача о построении фигуры определённого типа, равновеликой заданной).

Евклидом ставится проблема о построении квадрата, равновеликого данной прямолинейной фигуре. Евклид не имел алгебры, но он получал геометрическим путём то, что мы получаем с помощью алгебры; кроме того, он оперировал самыми площадями, а не числами, которые измеряют эти площади.

Роль извлечения квадратного корня из числа у него играло построение стороны квадрата, равновеликого данной прямолинейной фигуре.

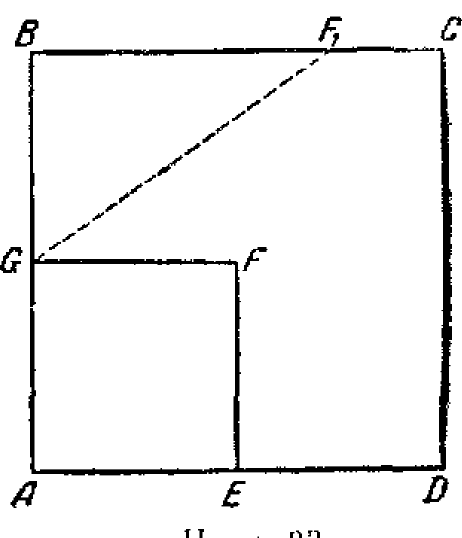
---

[125]) Willke, Neue erleichtende Methode den Inhalt gerade Figuren zu finden, Halle, 1757. — F. Mayer, Prakt. Geometrie, Halle, 1758. — Gervien, Crell's Journal, 1833. — Halt, Geometrical dissections and transpositions. Messenger of Mathematics, 1877. — Rethy, Rausenberger, Dobriner, Mathematische Annalen 38, 42, 43, 45. — Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. II, кн. 1, Одесса, 1913. — Фуррэ, Геометрические головоломки. — Klügel, Mathem. Worterbuch, т. 2, стр. 214.

[126]) См. прим. 125.

Предложения 42, 43, 44, 45 следует рассматривать как ряд предложений, направленных к предложению 14 книги II, дающему окончательное решение поставленной проблемы: *построить квадрат равновеликий* (Евклид говорит — «равный») *данной прямолинейной фигуре*.

71. Квадрат и его сторона. Евклид указывает, как по стороне построить квадрат. Его комментаторы ставят задачу, как по площади квадрата (они коротко говорят по квадрату) найти его сторону.



Черт. 33.

Выражая всё через числа, мы знаем, что уравнение $x^2 = a$ имеет только одно положительное решение.

Комментаторы доказывали *геометрически*, что проблема допускает одно решение, что равные (в евклидовом смысле) квадраты имеют равные стороны.

Конечно, проще всего было бы доказывать это апагогически. Если предположить, что $AEFG$ и $ADCB$ равны, но $AE < AD$, мы можем, согласно Евклиду, построить квадрат $AEFG$, который весь окажется внутри $ABCD$; в противном случае мы получили бы, например, пересечение сторон GF и BC в точке F_1, а из этой точки имели бы два перпендикуляра F_1B и F_1G на BA (черт. 33).

Прокл вместо этого простого *апагогического* доказательства даёт очень сложное *прямое*. Я в кратких чертах его намечу.

Оба квадрата переносятся в положение $A'B'C'D'$, $E'F'G'H'$ так, чтобы точка A' совпала с G', а $G'F'$ служила продолжением $B'A'$ (черт. 34).

Затем, имея в виду, что диагональю квадрат рассекается пополам (предложение 34) и что квадраты по условию равны, мы получим, что (в силу аксиомы 2) $F'B'D' = B'H'D'$, а так как эти треугольники имеют одно и то же основание, то (по предложению 39) $F'D' \parallel H'B'$.

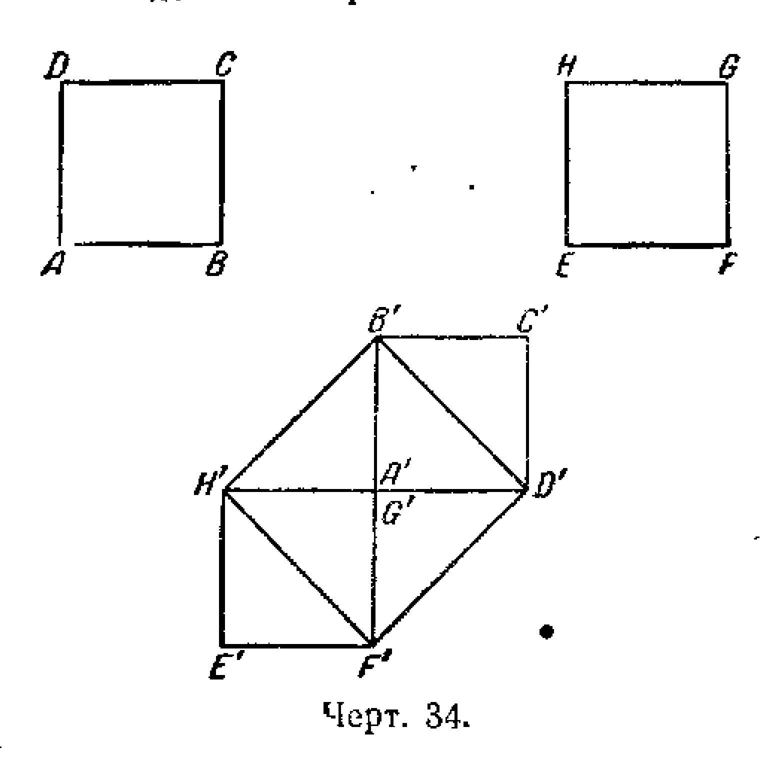
Отсюда доказывается равенство $\triangle H'B'A'$ и $\triangle G'F'D'$ и равенство $\triangle H'F'B'$ и $\triangle H'F'D'$ и параллельность $B'D'$ и $H'F'$.

В результате оказывается, что $B'D' = H'F'$ и от равенства диагоналей нетрудно перейти и к равенству сторон.

Следует отметить, что теорема 39 доказывается Евклидом апагогически; поэтому, если иметь в виду весь путь от аксиом, то теорема эта всё-таки доказывается апагогически.

Правда, при обосновании первого доказательства используется теорема о том, что из данной точки можно опустить только один перпендикуляр на данную прямую, которой у Евклида нет. Но предложение это, как отмечает большинство ком-

ментаторов, сейчас всё же выводится как непосредственное следствие из евклидовского предложения 16.



Черт. 34.

72. Доказательства теоремы Пифагора [127]. Многочисленные доказательства теоремы Пифагора делятся на следующие виды:

1) Доказательство, которое даётся в «Началах» и, по свидетельству Прокла, принадлежит самому Евклиду.

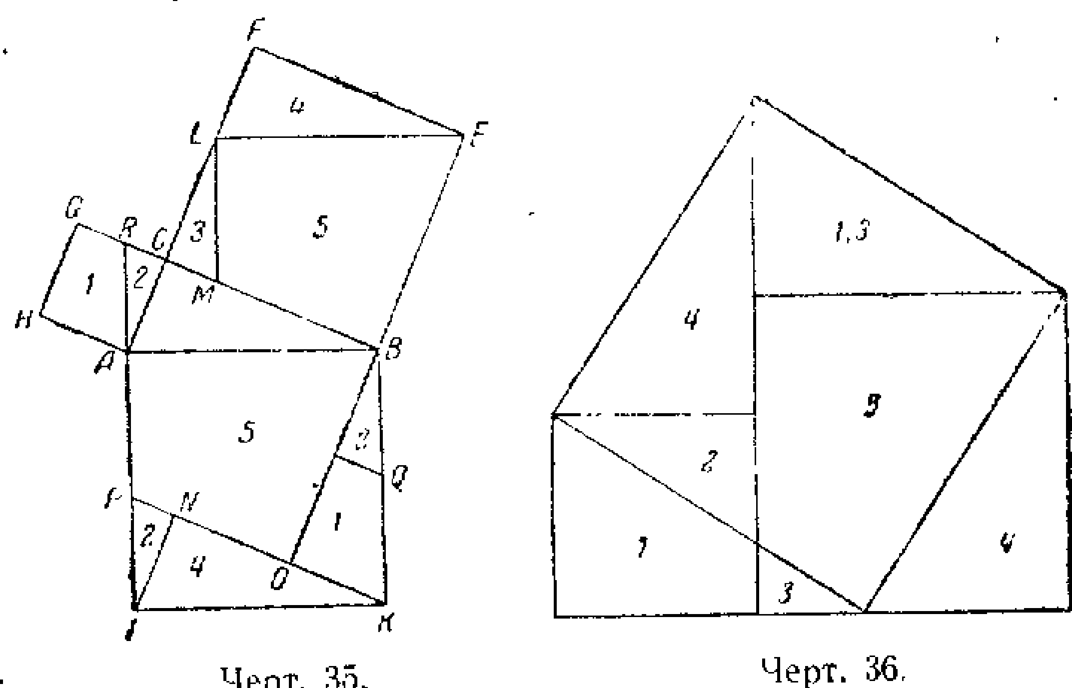
Оно основывается на равновеликости треугольников с равными высотами и равными основаниями и выводится из равновеликости параллелограммов с равными основаниями и высотами как фигур *эквивалентных* в смысле Гильберта на основании аксиомы 6 книги I «Начал»: половины равных величин равны между собой.

Доказательство это не может быть непосредственно представлено на модели.

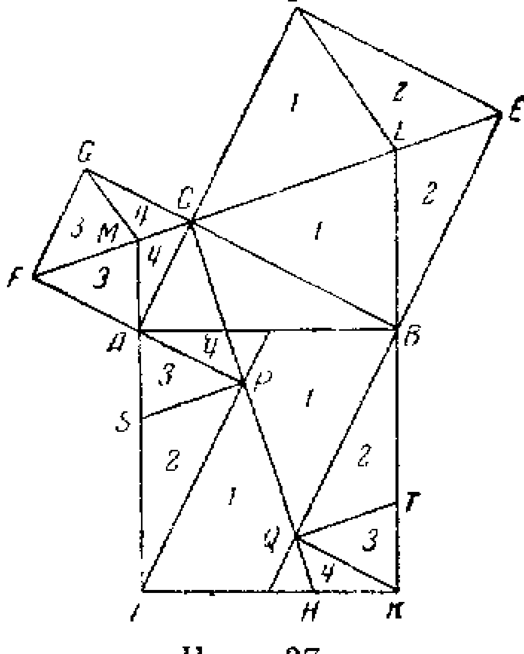
2) Доказательство равносоставленности. Особенного внимания заслуживает доказательство Anaritius (900 г. нашей эры).

[127]) История теоремы: Cantor, Vorles., т. I, стр. 142, у индусов стр. 613, у китайцев стр. 637, о Пифагоре стр. 137. — Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid, Dublin, 1889. — Enriques, Gli elementi, стр. 135.—Цейтен, История математики в древности и в средние века, М.—Л., 1932 О теореме Пифагора говорят Плутарх, Витрувий, Диоген Лаэртский: Plutarchus, Opera, Ed. Didot, т. 4, стр. 272, 1332. — Vitruvius, De architectura, кн. 9, стр. 2. — Diogenes Laertius, De vita philosophorum, кн. 8, стр. 207.

Мы прилагаем чертёж, по которому может быть построена модель (черт. 35).


Черт. 35. Черт. 36.

На чертеже $LE \parallel AB$, $AR \perp AB$ и $LM \perp AB$, BO продолжение BE, $KP \perp OB$ и $IN \perp PK$, $BQ = LM$. Мы не будем излагать доказательство. Отметим, что очень ходкое в настоящее время доказательство, изображённое на черт. 36, представляет по существу доказательство Анариция, но только при другом расположении квадратов, построенных на гипотенузе и катетах.


Черт. 37.

Такого же типа доказательство представлено на черт. 37.

3) Доказательство, основанное на равносоставленности фигур, полученных из данных прибавлением (черт. 38).

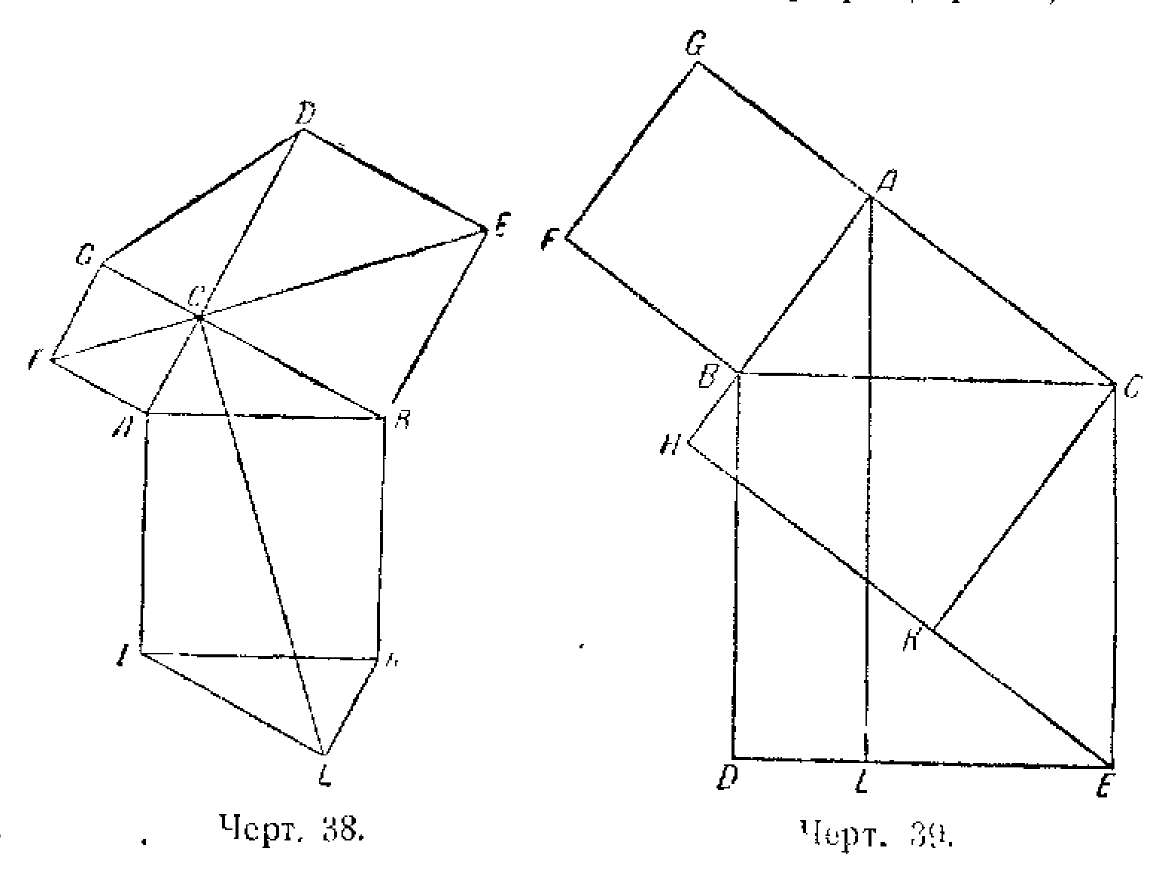
Доказывается, что два равных шестиугольника $AFGDFB$ и $CAILKB$ состоят — первый из квадратов, построенных на катетах, и двух треугольников $ABC = ODC$, второй — из квадрата, построенного на гипотенузе, и из двух таких же треугольников $ABC = ILK$.

4) Доказательства, построенные на некоторых алгебраических тождествах, которые можно заменить соответствующими теоре-

мами книги II «Начал»; о них будем говорить в комментариях к книге II.

5) Доказательства, основанные на теории подобия; о них будем говорить в комментариях к книге VI.

Интересно отметить *упрощение*, предлагаемое Лицманом к доказательству Евклида и состоящее в том, что квадрат, построенный на одном из катетов, направляется в н у т р ь (черт. 39).



Черт. 38. Черт. 39.

73. Теорема Паппа[128]. Обобщением теоремы Пифагора является теорема Паппа Александрийского (III в. нашей эры).

Во всяком треугольнике ABC (черт. 40) параллелограмм $ABA'B'$, который построен на одной стороне треугольника внутрь последнего и имеет две вершины A' и B' вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограммов $ACED$ и $BCGF$, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма[129].

---

[128]) P a p p i A l e x a n d r i n i, Collectiones, ed. Hultsch, Berolini, 1876 — 1878. — O z a n a m, Récréations Math., Paris, 1778.

[129]) Нетрудно видеть, что намеченные в условии свойства присущи такому доказательству теоремы Пифагора по Евклиду, в котором квадрат на гипотенузе строится *внутрь*, а квадраты на катетах — *наружу*.

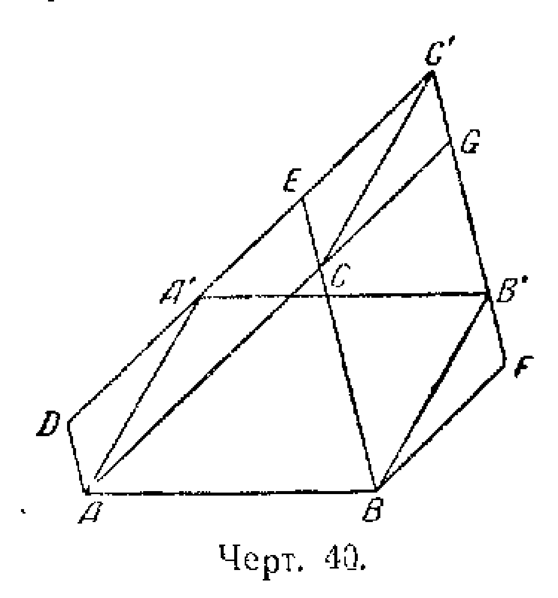
Доказываем, что $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Параллелограммы $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равновелики данным параллелограммам $ADEC$ и $BFGC$ вследствие равенств высот и оснований.

Если от фигуры $AA'C'B'B$ отнять $\triangle A'C'B'$, то остаётся параллелограмм $AA'B'B$.

Если же отнять треугольник $ABC = A'B'C'$, то остаётся сумма параллелограммов $AA'C'C + BB'C'C$ или равная ей сумма параллелограммов $ADEC + BFGC$.

74. Теорема, обратная теореме Пифагора. Эта теорема в настоящее время доказывается (это делают и некоторые комментаторы) на основании предложений 12 и 13 книги II, дающих так называемую *обобщённую теорему Пифагора*, которая выражается в современной символике формулами:



Черт. 40.

$$CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2AC \cdot AD \text{ (для тупого угла)}$$
$$CB^2 = CA^2 + AB^2 - 2AC \cdot AD \text{ (для острого угла).}$$

Следовательно, для тупоугольного треугольника

$$CB^2 > CA^2 + AB^2,$$

для остроугольного

$$CB^2 < CA^2 + AB^2,$$

для прямоугольного

$$CB^2 = CA^2 + AB^2.$$

Мы имеем три случая, удовлетворяющих условиям теоремы Гаубера[130]), и получаем три обратные теоремы, среди которых есть и обратная пифагоровской.

[130]) См. комментарий 49.

Эта трихотомия может служить иллюстрацией другой теоремы, с которой связано не всегда уясняемое учеником понятие о противоположных и обратных теоремах.

Из четырёх предложений:

1) A есть B; 2) B есть A; 3) «не A» не есть B; 4) «не B» не есть A, где 1) есть прямое предложение, 2) — ему обратное, 3) — ему противоположное и 4) — обратное противоположному; каждые два влекут за собой остальные два.

Например, из 1) и 3) необходимо вытекает 2); действительно, если бы B оказалось «не A», то мы имели бы одновременно: некоторое «не A» есть B и всякое «не A» не есть B — согласно предложению 3), что привело бы к противоречию.

Ученик часто неясно представляет сущность обратной теоремы и не всегда понимает различие между необходимыми и достаточными условиями. В сущности он повторяет те же ошибки, через которые проходило и всё человечество. Интересно отметить, что Гиппократ Хиосский при своих квадратурах луночек пользуется всеми тремя теоремами, обратными Пифагоровой и её обобщениям для косоугольных треугольников, тогда как «Начала» Евклида (и, по всей вероятности, также и «Начала» Гиппократа) не содержат теорем, обратных обобщениям теоремы Пифагора.

Мы имеем четвёрку теорем:

1) Если угол A треугольника прямой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2) Если $BC^2 = AB^2 + AC^2$, то угол A прямой.

3) Если угол A не прямой, то BC^2 не равно $AB^2 + AC^2$.

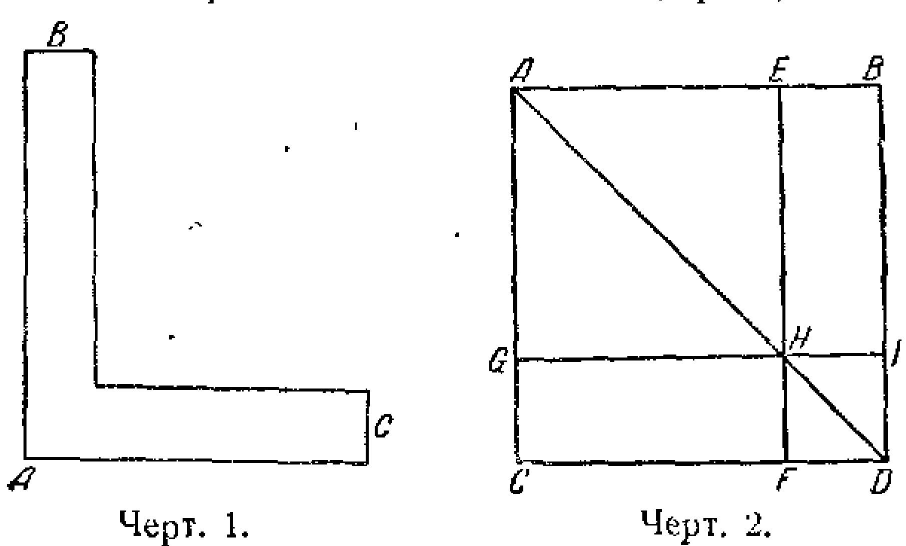
4) Если BC^2 не равно $AB^2 + AC^2$, то угол A не прямой.

Не всегда обращают должное внимание на предложение 2), между тем как именно оно, а не сама теорема Пифагора, имело важное значение при построении прямого угла при помощи «египетского» треугольника со сторонами 3, 4, 5 и ему аналогичных.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ II

1. Гномон. Гномон в переводе *распознаватель*.

Сперва это распознаватель *времени*, примитивные солнечные часы, состоящие из двух перпендикулярных шестов или досок, из которых одна AB расположена вертикально, другая AC горизонтально по направлению тени в полдень (черт. 1).



Черт. 1. Черт. 2.

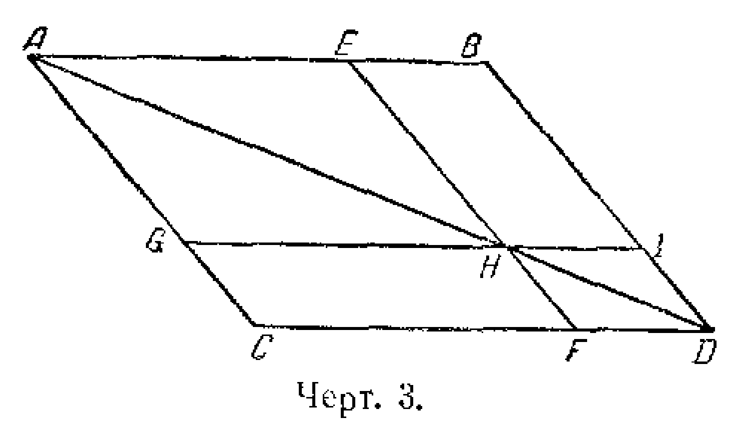
Затем гномон является плотничьим инструментом для проверки перпендикулярности; вместе с тем гномоном начинает называться фигура, образованная двумя прямоугольниками $EBIH$, $GHFC$ и двумя дополняющими друг друга до прямоугольника, треугольниками HID и HDF, получаемая опусканием из точки H диагонали AD перпендикуляров на стороны прямоугольника [1] (черт. 2).

---

[1] Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. I, гл. 6, стр. 151. — Allmann, Greek Geometry from Thales to Euclid, Dublin, 1889. — Aristoteles, Opera, ed. Didot. Categoriae, XI, 2. XIV, 5.

Евклид обобщает понятие гномона: вместо прямоугольника он берёт вообще параллелограмм (черт. 3).

Наконец, Героном Александрийским[2]) гномон определяется в ещё более общем смысле: «всё, что прибавленное к числу или к фигуре делает целое подобным тому, к чему прибавляется, называется гномоном».



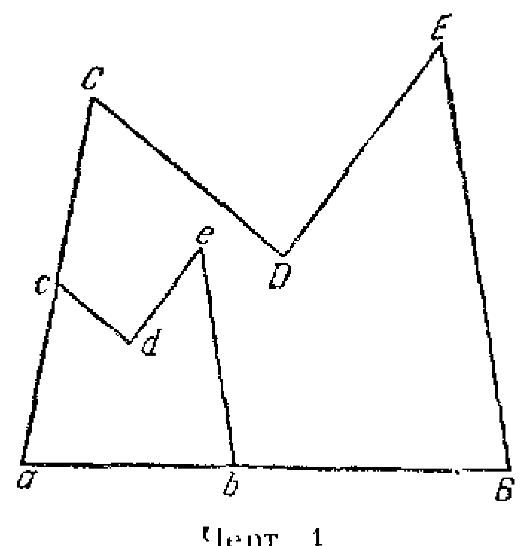
Черт. 3.

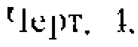
С его точки зрения для пятиугольника $abcde$ гномоном будет $aBCDE$ (черт. 4).

Под это общее понятие подходит число-гномон. Таковым является всякое нечётное число $2n+1$, так как, присоединяя его к квадрату n^2, получаем тоже квадрат

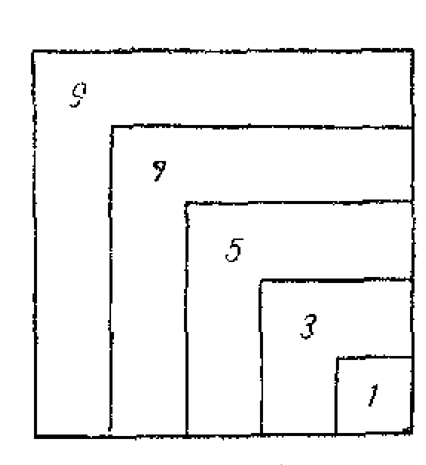
$$n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Получение квадрата n^2 суммированием последовательных нечётных чисел $+1+3+5+\ldots+2n-1$ ещё Пифагорей-





Черт. 4.



Черт. 5.

цами мыслилось, как получение полного квадрата последовательным присоединением к единичному квадрату гномонов, отвечающих нечётным числам 3, 5, 7, ..., $2n-1$ (черт. 5).

[2]) Heron, Opera, ed. Hultsch, Def. 59, стр. 24.

2. Произведение отрезков. Одним из основных понятий «Начал» является прямоугольник, *заключённый между прямыми АВ и АС*.

Прямоугольник, *построенный* на AB и AC, уже нечто иное; это прямоугольник, построенный на двух пересекающихся прямых AB и AC *без их переноса*, аналогично тому, как в третьем постулате Евклида окружность строится из точки A раствором AB, т. е. определённым исходящим из A отрезком.

Если перевести, как это делает Гейберг, формулировку Евклида на современную символику, то в евклидовых формулах мы будем *всегда* иметь $AB \times AC$, $AB \times BC$, но никогда не $AB \times CD$, т. е. перемножаемые прямые должны исходить из одной точки.

Евклидово $AB \times AC$ ни в коем случае не произведение AB на AC [3]), но во всяком случае то, из чего это произведение рождается. Прямоугольник на AB и CD обращается в произведение, но не в том смысле, как его понимают в арифметике — произведение чисел, а как результат некоторого действия над отрезками, который даёт нам уже не отрезок, но *площадь*.

При этом говорили не *multiplicare* AB in CD, а *ducere* AB in CD.

Только арифметизация геометрии, завершившаяся установлением Лежандрова взаимно однозначного соответствия между числом и геометрической величиной, обратила ducere в multiplicare и превратила $AB \times CD$ в произведение чисел, измеряющих отрезки AB и CD. Интересно отметить и промежуточную ступень. Это точка зрения Декарта [4]), при которой $AB \times CD$ сводится тоже к отрезку, определяемому пропорцией

$$\frac{x}{AB} = \frac{CD}{1}$$

и получаемому простым построением, требующим проведения параллельных.

3. Закон дистрибутивный. Предложение 2 можно рассматривать как геометрическую интерпретацию *прямого* дистрибутивного закона

$$(a + b)\,c = ac + bc.$$

Обратный

$$c\,(a + b) = ca + cb$$

получается *перевёртыванием* фигуры, беря за основание высоту.

Общее правило умножения

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

---

[3]) Д. Мордухай-Болтовской, Первые шаги буквенной алгебры, Известия С. К. Г. У., 1928.

[4]) Декарт, Геометрия, М.—Л., 1939.

или вообще

$$\sum_j a_j \sum_k b_k = \sum_j \sum_k a_j b_k$$

получается проведением *сетки* прямых параллельных и перпендикулярных к основанию, что и делается многими комментаторами [5]).

4. Связь между предложениями 2 и 8 книги II. Если, как это делает Гейберг, выразить алгебраически все три первых предложения книги II, то мы получим следующие равенства:

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad. \qquad \text{I}$$

Если

$$a=b+c, \quad \text{то} \quad a^2 = ab+ac, \qquad \text{II}$$

$$(a+b)\,a = ab+a^2. \qquad \text{III}$$

При взгляде на эти формулировки сразу появляется ряд недоуменных вопросов.

Почему Евклиду наряду с общей формулой I понадобилось давать отдельно ещё доказательство двух частных её случаев II и III? Какой смысл выделения этих частных случаев в особые теоремы?

Если первое предложение выражает общий дистрибутивный закон при умножении, то совершенно ясно, что сам Евклид, или его непосредственный источник, не рассматривали II и III предложения как выражающие частные случаи этой дистрибутивности.

Действительно, II предложение является первым этапом на пути установления формулы квадрата суммы.

Если $a=b+c$,

то

$$a^2 = (b+c)^2 = ab+ac = (b+c)\,b + (b+c)\,c. \qquad \text{IV}$$

Третье предложение представляет дальнейший этап расшифровки этой формулы:

$$(b+c)\,b = bc+b^2. \qquad \text{V}$$

Следующий этап был бы таков:

$$(b+c)\,c = bc+c^2, \qquad \text{VI}$$

что, конечно, вполне равносильно третьему предложению и не требует специальной формулировки.

---

[5]) Commandinus, Euclidis elementorum libri XV una cum scholiis antiquis, Pisauri, 1572, стр. 29.— Clavius, Euclidis Elem., libri XV, т. I, Francofurti, 1607, стр. 168.— Henrion, Les quinze livres des Éléments d'Euclide, Paris, 1615, стр. 58.— Guarinus. Euclides adauctus et methodicus. Aug. Taurini, 1671, стр. 54.— Bärman, Elem. Euclidis, libri XV, Lipsiae, 1743, стр. 42.— Pfleiderer, Academische Schriften, Stuttgart, 1826, тетр. I, Scholien zum Buch II, стр. 6.

После этого мы ожидали бы заключительного этапа. Подставляя V и VI в IV, мы получили бы формулу квадрата суммы:

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc.$$

Действительно, IV предложение как раз и говорит о квадрате суммы, и трудно отделаться от мысли, что II и III предложения представляют лишь начальные этапы пути доказательства этой формулы, которое сам Евклид, или один из его предшественников, выбросили, заменив новым — тем самым, которое мы читаем в существующем IV предложении.

Другое объяснение выделения в особое предложение частного случая:

$$(a+b)\,c = ac + bc \quad \text{при} \quad c = b$$

заключается в том, что у Евклида существование геометрического объекта устанавливается только *построением*.

Если для нас право на существование получается отсутствием противоречий в признаках, определяющих математический объект, то у Евклида это право давалось только *построением*.

По Евклиду доказательство, основанное на существовании прямых, делящих угол на три равные части, было бы несостоятельным. С точки зрения *формы*, квадрат только частный случай прямоугольника, иное дело с точки зрения построения.

Квадрат на AB получается геометрическими операциями *над одним объектом* AB, а вовсе не над двумя равными (предложение 42 книги I). Прямоугольник получается операцией над *двумя* различными объектами.

Это отчётливо видно из терминологии: квадрат на AB обозначается «τὸ ὑπὸ τῆς AB», а прямоугольник между AB, AC «τὸ ὑπὸ τῶν AB, AC».

Положение $ab = a^2$ при $b = a$ не так очевидно, как то, что

$$ab = ac \quad \text{при} \quad b = c,$$

и не выводится как простое следствие из первого: равенство $a^2 = b^2$ не должно рассматриваться как следствие из $ac = bd$ при $c = a$, $d = b$.

5. Другое доказательство предложения 4. Гейберг в приложении даёт второй способ доказательства предложения 4 иным способом.

„Я утверждаю, что квадрат на AB равен квадратам на AC и CB вместе с удвоенным прямоугольником, заключённым между AC и CB.

Действительно, на том же самом чертеже, поскольку BA равна AD, то и угол ABD равен углу ADB; и поскольку во всяком треугольнике три угла вместе равны двум прямым, то, следовательно, в треугольнике ADB три угла ADB, BAD, DBA вместе равны двум прямым. Но угол BAD прямой; следова-

тельно, остальные углы ABD, ADB вместе равны одному прямому, но они равны; следовательно, каждый из углов ABD, ADB есть половина прямого. И угол BCH прямой, ибо он равен противолежащему углу, а именно, при A; следовательно, остающийся угол CHB есть половина прямого; следовательно, угол CBH равен CHB, так что и сторона BC равна CH. Но CB равна HK, а CH равна BK; следовательно, площадь CK равноугольна. Далее, она имеет прямой угол, а именно, CBK; следовательно, CK — квадрат и ‹построен› на CB. На том же самом основании и IG есть квадрат и равен ‹построенному› на AC: следовательно, CK, IG суть квадраты и равны построенным на AC, CB. И поскольку площадь AH равна HE и AH есть прямоугольник между AC, CB, ибо CH равна CB, то, следовательно, EH равна прямоугольнику между AC и CB. Следовательно, AH, HE вместе равны удвоенному прямоугольнику между AC и CB. Но CK и IG равны квадратам на AC и CB. Следовательно, CK, IG, AH, HE равны квадратам на AC и CB и удвоенному прямоугольнику между AC и CB. Но CK, IG вместе с AH и HE суть вся площадь AE, которая есть квадрат на AB; следовательно, квадрат на AB равен квадратам на AC, CB и удвоенному прямоугольнику между AC, CB; это и требовалось доказать".

6. Квадрат суммы. Это предложение записывается так:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \times CB,$$
$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\mathrm{Rct}\ AC\ \text{и}\ CB,$$
$$\square AB = \square AC + \square CB + 2\ \text{прям.}\ AC \cdot CB,$$

и отвечает тождеству

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Так как предложения 1 и 3 дают правила *умножения*, то, как указывают комментаторы, предложение 4 выводится из них путём формальных операций.

Ещё Шейбель[6]) считал, что предложение 4 представляет двукратное применение первого:

$$\text{прям.}\ CA \cdot AB = \text{прям.}\ CB \cdot AB + \square AB,$$
$$\text{прям.}\ CA \cdot CB = \square CB + \text{прям.}\ CB \cdot AB;$$

складывая, имеем:

$$\square CA = \square AB + 2\ \text{прям.}\ CB \cdot AB + \square CB.$$

В современной алгебраической символике имеем

$$(a + b)\,a = a^2 + ab,$$
$$(a + b)\,b = ab + b^2,$$
$$\overline{(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

---

[6]) Scheubelius, Euclidis sex libri priores, Basileae, 1550, стр. 142.

Нужно отметить, что предложения, отвечающего формуле

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

нет даже у Клавия[7] и в учебниках XVII в. Впервые оно появляется у Мархетиса[8], а затем только у Лежандра (1752—1833) в его «Элементах» (1794).

7. Предложение 4 в символике Херигона. Мы везде в своём переводе с греческого языка даем риторическую форму изложения самого Евклида. Обычно Евклида переводят, перекладывая *слова в символы*, причём точный смысл текста *искажается.*

Евклида, изложенного *идеографически*, старался дать в первой половине XVII в. Херигон[9]. Он им излагался так, что, по мнению Херигона, оказывался доступным всем лицам, не знающим другого языка, кроме родного. Чтобы расшифровать херигоновского Евклида, следует иметь перед глазами словарик символов:

+ да	2|2 равно
— без	3|2 больше
ꝯ е между собой	2|3 меньше
ꝯ и в	a, b ‖ a, b прямоугольник, построенный на a и b
‖ на	⌣ ⌢ часть круга
π к	⌓ ⌓ сегмент круга
. есть точка	△ треугольник
∠ угол	☐ квадрат
⊥ прямой угол	▭ прямоугольник
○ круг	▭ *aeb* прямоугольник, построенный из *ae* и *eb*.
; множ. число	
η не	
∪ и ⊔ или	
= параллельны	
⊥ перпендикулярны	

Словарь сокращений

hypoth — гипотеза... предположим, что
req — требуется
demonstr. — доказать
concl. — отсюда следует
цифра за чертой — ссылка на раньше доказанные теоремы
15. d. 1 — определение 15 «Начал»
3. *a*. 1 — третья аксиома книги 1
c. 17. 1 — королларий 17 книги 1

---

[7] См. Clavius, стр. 173 (прим. 5).

[8] Angelus de Marchetis, Euclides reformatus, II, 1709.

[9] Herigonus, Cursus mathematicus, т. I, cum Euclidis Elementis, l. XV, Parisiis, 1644.

c. 26. 3 — королларий 26 книги III
1. *p*. I. — первый постулат книги I
3. I — третья теорема книги I «Начал»
praep. — приготовление, т. е. вспомогательное построение
par. — части

Тогда доказательство предложения 4 книги II **напишется** так:

hyp *ab* est —
ac ⌣ *cb* snt par *ab*
Req π demonstr.
□ *ab* 2|2 □ *ac* + □ *cb* + 2 ▭ *acb*

Praep.

46. I	*ad* est □ *ab*
1. *p*. 1	*eb* est —
31. I	*cf* = *ae* u *bd*
31. 1	hgl = *ab* u *ed*

Demonstr.

22. *d*. 1	∠ *a*, ∠ *aed*, *d*, ∠ *abd* snt ⌋
2. *c*. 29	∠ *ehg*, ∠ *efg*, ∠ *hgf* snt ⌋ α
22. *d*. 1	*ae* 2|2 *ab*,
2. *c*. 32. 1	∠ *aeb* est 1/2 ⌋

2. *c*. 32.1	∠ *deb* est $\frac{1}{2}$ ⌋
α, β. 32. 1	∠ *hge* est $\frac{1}{2}$ ⌋
α. 32. 1	∠ *fge* est $\frac{1}{2}$ ⌋

6. 1	*he* 2|2 *hg*
6. I	*ef* 2|2 *fg*
34. 1	*ef* 2|2 *hg*
22. *d*. I	*hf* est □ *hg* u *ac*
α. γ.	*cgib* est □ *cb*
3. f. 1. *d*. 2	□ *ab* 2|2 ▭ *acb*

43. 1	▭ *ag* 2|2 ▭ *gd*
I. *a*. 1	▭ *gd* 2|2 ▭ *acb*
19. *a*. 1	□ *ad* 2|2 □ *hf* + □ *ci*
Concl.	+ ▭ *ag* + ▭ *gd*
I. *a*. 9	□ *ab* 2|2 □ *ac* + □ *cb* + 2 ▭ *acb*.

8. Книга II и обоснование теории отрицательных чисел. Валлис и другие математики конца XVII и начала XVIII в. обосновывали правила действий над отрицательными числами на основе

дистрибутивного закона, относя его и к отрицательным числам

$$(a-b)c = ac - bc$$

или более общего закона

$$(a-c)(b-d) = ab - ad - bc + cd,$$

полагая последовательно

$$a=0, \quad d=0;$$
$$c=0, \quad b=0;$$
$$a=0, \quad b=0.$$

Что же касается самого закона, то он сначала просто постулировался, но затем его стали доказывать *геометрически*.

По образцу второй книги «Начал» положим (черт. 6)

$$AC=a, \quad CD=b, \quad AE=c, \quad GD=d;$$

тогда

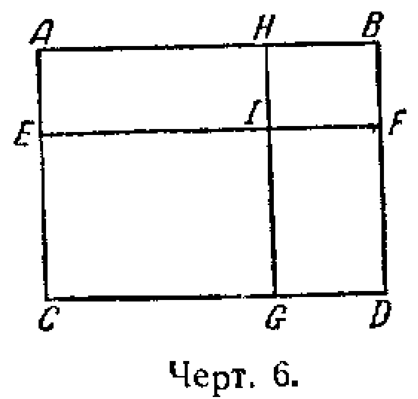
$$CE=a-c, \quad CG=b-d$$
$$ACDB=ab, \quad AEIH=bc-dc \quad \Big| \quad ECGI=(a-c)(b-d),$$
$$HGDB=ad$$

так что

$$(a-c)(b-d) = ab - ad - bc + cd.$$

Конечно, таким образом, тождество доказывается только для $a > c$ и $b > d$ и во всяком случае при a, b, отличных от нуля. Для того чтобы перейти к общему случаю, необходимо сделать скачок, сделать заключение *по аналогии*, представляющееся тогда убедительным.

Но такое доказательство должно было наталкивать на *отрицательные геометрические* величины; при введении последних полученное тождество устанавливается и в общем случае.



Черт. 6.

9. Максима и Минима. Положение 5 или, что то же, тождество

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

сыграло большую роль в истории максимума и минимума. У Евклида есть три предложения, относящихся к наибольшим и наименьшим величинам. Приёмы его решения этого рода задач носят случайный характер. Он не замечает даже, что вторая книга даёт основание для методов, носящих менее случайный характер. Только

математики эпохи Возрождения заметили[10]), что предложение 5 книги II «Начал» Евклида даёт решение задачи, являющейся основной в элементарной теории наибольших и наименьших величин: разделить отрезок AB на две части AC и CB так, чтобы прямоугольник, построенный на AC и CB, был наибольшим, или найти x такое, при котором функция $x(a-x)$ принимает наибольшее значение.

Ответ $x=\frac{a}{2}$, т. е. отрезок следует разделить *пополам*. В этом состоит 13 лемма Паппа[11]) к «сечениям отношения и пространств» Аполлония[12]).

Результат этот может быть сформулирован в геометрической форме так: *из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.*

Отсюда нетрудно вывести (имея в виду, что при одинаковом периметре косой параллелограмм имеет меньшую высоту, чем прямоугольный), что *между параллелограммами одного и того же периметра квадрат имеет наибольшую площадь.*

10. Геометрические тождества. Вторая книга «Начал» Евклида — это алгебра *древних.* В дальнейших стадиях эволюции математической мысли она превращается в современную *буквенную* алгебру. Теоремы книги II «Начал» становятся просто алгебраическими тождествами в эпоху арифметизации и алгебраизации геометрии.

Но по мере эмансипации синтетической геометрии, теоремы книги II и аналогичные им более сложные теоремы снова становятся *чисто геометрическими* теоремами, хотя и в арифметизированной форме. Они устанавливают некоторые соотношения между отрезками, но при этом умножение отрезков понимается в *арифметическом* смысле — уже не как получение прямоугольника, а как получение отрезка, измеряемого произведением чисел, измеряющих сомножители. Такие *геометрические* тождества получают значение по введении в Геометрию *относительных* величин (отрезков $\overline{AB}$ со знаком + и —).

---

[10]) V i n c e n z o V i v i a n t, De maximis et minimis Geometriae, divinatio in quintum Conicorum Apollonii Florentiae, 1659, кн. I, стр. 163. — T h o m a s S i m p s o n, Essai sur les maxima et minima, теор. I, Les éléments de Géométrie, Paris, 1755, стр. 173. — G i l b e r t, Die Geometrie nach Legendre-Simpson-van Swinden, 1 Theil, Halle, 1798, стр. 281. — P f l e i d e r e r, тетр. 1 (см. прим. 5), стр. 15. — H u i l l i e r, De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, Varsaviae, 1782, стр. 23. — V. V i v i a n i, De locis solidis, Florentiae, 1701, кн. IV, стр. 57.

[11]) P a p p i A l e x a n d r i n i, Collectiones, ed. Hultsch, Berolini, 1876—1878.

[12]) A p o l l o n i i P e r g a e i, De sectione rationis, libri duo, Opera, ed. Halley, Oxoniae, 1706, стр. 49, лемма 13.

Основными являются *тождество Шаля*[13])

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

и тождество Эйлера

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0,$$

которое нетрудно установить, проверив алгебраическое тождество

$$(b-a)(d-c)+(c-a)(b-d)+(d-a)(c-b)[14]).$$

Таким же образом проверяем тождество:

$$(c-a)(b-c)+(d-c)(b-d)=(d-b)(a-d)+(a-c)(c-d)$$

и получаем 4-членное тождество

$$\overline{AC}\cdot\overline{CB}+\overline{CD}\cdot\overline{DB}=\overline{BD}\cdot\overline{DA}+\overline{CA}\cdot\overline{DC}.$$

Если *снять чёрточки* и облечь в *евклидову форму*, т. е. произведения рассматривать как площади прямоугольников, то получим теорему Григория Сан-Винценто

прям. $AC\cdot CB$ + прям. $CD\cdot DB$ = прям. $BD\cdot DA$ + прям. $DC\cdot CA$

для четырёх точек на прямой $ABCD$, причём C, D взяты между A и B.

Для вывода своей формулы Сан-Винценто[15]) прежде всего евклидовыми приёмами убеждает в том, что

кв. AB = кв. AC + кв. CD + кв. DB + 2 прям. $AC\cdot CB$ +
+ 2 прям. $CD\cdot DB$,

что эквивалентно алгебраическому тождеству

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc.$$

Точно таким же образом имеем:

кв. AB = кв. BD + кв. DC + кв. CA +
+ 2 прям. $BD\cdot DA$ + 2 прям. $DC\cdot CA$.

Вычитая общие квадраты и деля пополам, получаем теорему Сан-Винценто.

Если C — середина AB, то $AC=CB$,

прям. $AC\cdot CB$ = кв. CB.

Но (по 3_{II}) прям. $DC\cdot CA$ = прям. $DC\cdot DB$ + кв. CD.

---

[13]) Шаль, Высшая геометрия, пер. Безрукова. — Papelier, Exercices de Géométrie moderne, т. 1, Paris, 1912.

[14]) Eulerus, Varia demonstr. geometricae.

[15]) Gregorius de Sancto Vincento.

А на основании теоремы Сан-Винценто

$$\text{кв. } CB + \text{прям. } CD \cdot DB =$$
$$= \text{прям. } BD \cdot DA + \text{прям. } CD \cdot DB + \text{кв. } CD,$$

откуда

$$\text{кв. } CB = \text{прям. } AD \cdot DB + \text{кв. } CD.$$

11. Тождество и евклидово существование. Положение 6 следует переводить алгебраическим тождеством:

$$(a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2, \qquad \text{I}$$

а не тождеством

$$(2a+b)\,b + a^2 = (a+b)^2, \qquad \text{II}$$

как это делает Гейберг.

Правда, в выводе остаётся *логически не действующим* то, что AC получается делением пополам AB; получилось бы то же, если было бы дано не AB, а AC, и AC затем удваивалось бы. В формулировку теоремы достаточно ввести лишь условие, что *AB вдвое больше AC.*

Но сам Евклид *в этом направлении* не мог мыслить; следует всегда помнить, что для него всё определялось *построением*. Для него отрезок не существует независимо от построения; для него мало сказать, что два отрезка *существуют* и один вдвое больше другого. Для него вполне определённо AB было данным, а AC производным, уже получаемым из AB определённой геометрической операцией. Переводя на алгебраический язык, мы должны AB принимать за a (а не AC), а AC только за $\frac{a}{2}$.

Но в эпоху Возрождения мысль легко уже превращает тождество I в тождество II, так как она уже сошла с точки зрения Евклида и не понимала его так, как должно понимать. Превращая I во II, она уже легко улавливает, что предложение 6 получается из 4-го простой дистрибутивной операцией.

Ангелюс Мархетис[16]) выводит предложение 6 из 4-го следующим образом (см. черт. к предложению 6):

$$\text{кв. } CD = \text{кв. } CB + 2\ \text{прям. } CB \cdot BD + \text{кв. } BD =$$
$$= \text{кв. } CB + \text{прям. } [CD + CB] \cdot BD.$$

Но

$$CD + CB = CD + AC = AD,$$

и потому

$$\text{кв. } CD = \text{кв. } CB + \text{прям. } AD \cdot DB.$$

По существу всё сводится к соединению двух членов на основании дистрибутивного закона в один.

---

16) См. прим. 8.

Выводы Брессия и Тако сводятся к замене в тождестве предложения 5

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

величины a на $a+b$:

$$(a+b)\,b + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2.$$

К AB (черт. 5 текста) прикладывается с другой стороны отрезок $SA = BD$ и к SD применяется предложение 5.

12. Предложения 5 и 6 и квадратные уравнения. Оба рассматриваемых предложения интересны в том отношении, что из них можно получить решения квадратного уравнения по крайней мере с одним положительным корнем. Некоторые исследователи (в числе их следует назвать Нейгебауэра) даже видят в этих предложениях геометризованный вывод формулы корней соответствующих квадратных уравнений в том виде, как это делали вавилояне.

Основная задача, из которой в вавилонской математике возникла теория квадратных уравнений, заключалась в следующем:

Известны сумма или разность двух сторон прямоугольника и его площадь. Требуется найти эти стороны.

Обозначая искомые стороны через x и y, мы получаем уравнения

$$x \pm y = a, \quad xy = b.$$

Вавилонский метод решения системы уравнений:

$$x + y = a, \quad xy = b \qquad \text{I}$$

был таков: возьмём для x и y среднее значение $\frac{a}{2}$ и посмотрим, какую величину z надо придать к одному и вычесть из другого, чтобы произведение полученных величин равнялось данной площади b.

Мы имеем

$$\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right) = b,$$

откуда

$$z^2 = \frac{a^2}{4} - b \qquad \text{II}$$

и

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Так как $b = xy$, $a = x + y$, а $z = \frac{x-y}{2}$, то равенство II переходит в формулу, выражающую 5 предложение Евклида

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Точно так же система уравнений

$$x - y = a, \quad xy = b \qquad \text{III}$$

приводит к 6 предложению Евклида.

Обозначим через z средние значения для x и y; тогда

$$x = z + \frac{a}{2}, \quad y = z - \frac{a}{2}.$$

Это неизвестное z мы найдём из уравнения

$$\left(z + \frac{a}{2}\right)\left(z - \frac{a}{2}\right) = b,$$

откуда

$$z^2 = \frac{a^2}{4} + b \qquad \text{IV}$$

и

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} + \frac{a}{2}, \quad y = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}.$$

Равенство IV аналогично предыдущему мы можем представить в виде

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy.$$

Если мы положим $x = x' + y$, то легко придём к тождеству

$$(x' + y)\,y + \left(\frac{x'}{2}\right)^2 = \left(\frac{x'}{2} + y\right)^2,$$

которое, как мы видели выше [формула 1 комментария 11], выражает 6 предложение Евклида.

Интересно отметить, что 6 предложение обратимо.

Если для четырёх точек $ACDB$ имеет место соотношение

$$\text{прям. } AD \cdot DB + \text{кв. } CB = \text{кв. } CD,$$

то $CA = CB$, иными словами, AB делится в точке C пополам.

Это положение доказывается Паппом.

13. *Модели к книге II «Начал» Евклида* [17]. Рядом с проблемой о наиболее обоснованном логически доказательстве *мето-*

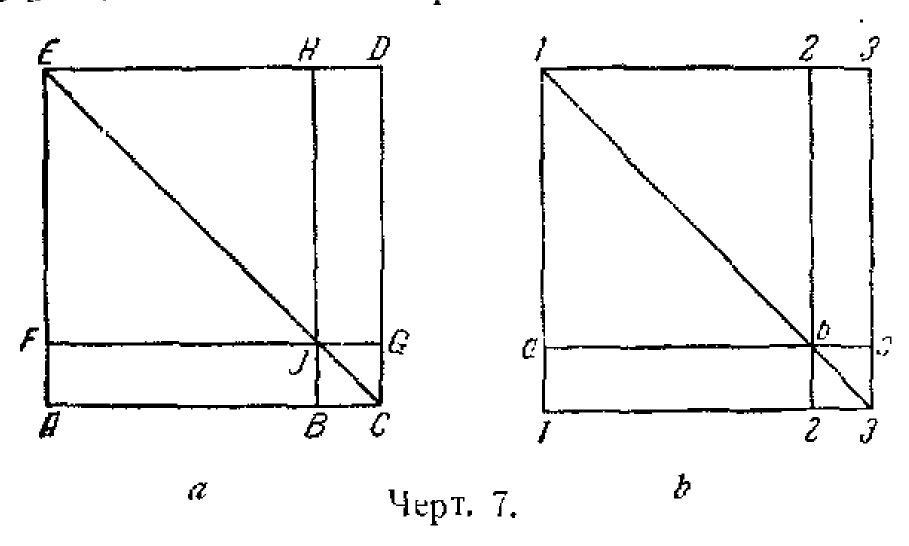
---

[17]) Д. Мордухай-Болтовской, Модели ко второй книге «Начал» Евклида. Вестник опытной физики и элементарной математики, №№ 655—656.

дикой выдвигается проблема и о *наиболее убедительном* для учащегося доказательстве.

При решении этой проблемы следует рассматривать всякое школьное доказательство как наложение двух доказательств (с несовершенством каждого из которых приходится порой мириться) — интуитивного и логического, взаимно усиливающих убедительность друг друга.

Первое, состоящее из операций резания, наложения и т. д., осуществляется *подвижной* моделью и ей соответствующим процессом воображения, второе развёртывает *силлогизмы*, приводящие к обоснованию этих операций.



Черт. 7.

То доказательство лучше, где ясно выявляются оба эти два слоя — *интуитивный* и *логический*.

Если снять последний, то остаётся ещё многое; можно увидеть организм интуитивной геометрии, которая развёртывается наряду с формально логическим.

Вторая книга даёт в этом отношении богатый материал. Снимая логический слой, мы получаем *модель* (при этом лучше всего *подвижную*), в которой прямоугольники, которыми покрывается одна фигура, переносятся на другую.

Моделируем 4 предложение Евклида, перешедшее к Лежандру, которому отвечает тождество

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \qquad \text{I}$$

Ставим на чертеже 7, *a* вместо

A	*B*	*C*	*F*	*J*	*G*	*E*	*H*	*D*
1	2	3	*a*	*b*	*c*	1	2	3

и читаем обозначение прямоугольников снизу и слева (черт. 7, *b*). Тогда

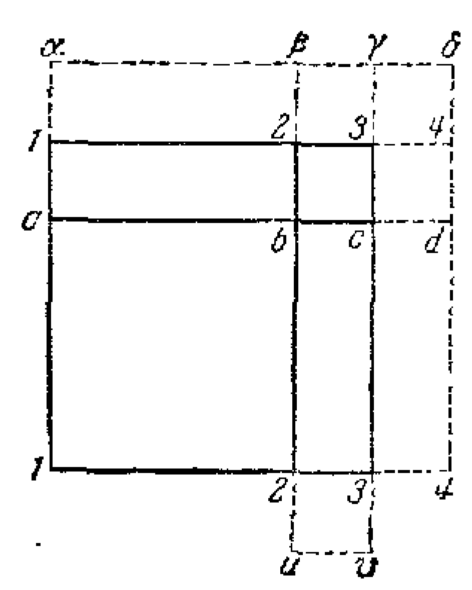
$$\begin{array}{ll|l} (1313)\ldots & (a+b)^2 & (12ab) \\ (ab12)\ldots & a^2 & (bc23) \\ (23bc)\ldots & b^2 & \end{array} \Big\} \ldots ab.$$

Модель состоит из:

1) квадрата $(\overline{1313})$ синего цвета,
2) квадратов $(\overline{23\,bc})$ и $(\overline{ab\,12})$ синего цвета,
3) двух равных прямоугольников $(\overline{12\,ab})$ и $(\overline{bc23})$ красного цвета.

Операции.

Наложить сперва $(\overline{ab12})$ на $(EFHJ)$ так, чтобы углы все совпали, затем $(\overline{23bc})$ на $(BCJG)$, и в свободные части $(\overline{12ab})$ и $(\overline{bc23})$.



Черт. 8.

Следует отметить, что модель остаётся в силе и в том случае, если мы разрежем переносимые прямоугольники на куски. Тогда придётся переносить не прямоугольники, а их куски.

По тому же образцу строится и модель предложения 7, отвечающего алгебраическому тождеству (черт. 8)

$$(a+b)^2+b^2=a^2+2(a+b)\,b. \qquad 11$$

Подвижная часть:

Два квадрата
синий (1313)... $(a+b)^2$,
красный $(uv\,23)$... b^2 на картоне.

Подвижной квадрат $(\overline{12ab})$... a^2 красный.
Прямоугольники:

синий $(ac13)$
зелёный $(uvbc)$ } $(a+b)\,b$.

Подвижные части модели к предложению 4 можно получить следующим образом: вырезать одновременно из синей бумаги и бристоля два квадрата, употребив первый как неподвижную часть модели. Красный же квадрат для получения подвижных частей должно разрезать от одного края до другого перпендикулярно к сторонам.

Но элементы указанной выше модели к предложению 7 таким образом не получаются.

Операции эти (т. е. разрезание картона от одного борта к другому, — в настоящем случае квадрата (1313) по $2b2$ и abc) дают не целые $(ac13)$ и $(uvbc)$, а их *куски*. Но, как было выше отмечено, этим не расстраивается наша модель, и с этими кусками можем провести всё наше интуитивное доказательство.

При этом мы получаем следующие преимущества: с этими кусками (отбрасывая один) мы можем провести и доказательство предложения 4.

Затем вместо цветной бумаги трёх сортов мы можем ограничиться двумя сортами бумаги, оклеивая прямоугольные куски $(\overline{ab}13)$, $(\overline{uvbc})$ синей, а квадратные красной бумагой.

14. Квадрат разности и разность квадратов. Предложение 7, переведённое на язык алгебры, даёт тождество

$$(a+b)^2+b^2=a^2+2(a+b)b. \qquad \text{I}$$

От этого тождества мы можем перейти к следующему:

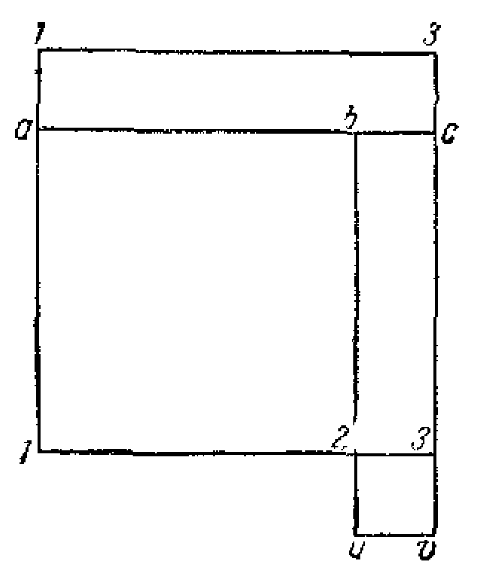
$$(a+b)^2+b^2=\{(a+b)-b\}^2+2(a+b)b$$

или, если заменим $a+b$ через a:

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \qquad \text{II}$$

— равенство, которое заменяет у Евклида нашу теорему о квадрате разности.

Таким образом, модель к предложению 7 даст также и наглядное доказательство тождества II.



Черт. 9.

У Евклида нет в ясно выраженной форме тождества

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab. \qquad \text{III}$$

Может быть потому, что Евклид не допускал операции переноса членов с обратным знаком из одной части равенства в другую.

Доказательство тождества II может быть проведено на следующей модели (черт. 9).

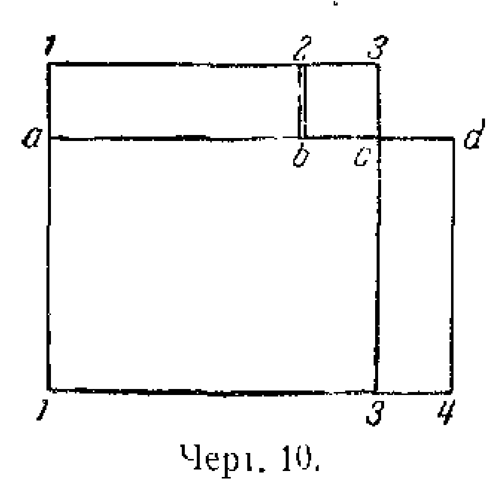
На неподвижный синий квадрат (1313), соответствующий a^2, вместе с красным $(uv23)$, представляющим b^2, накладываются перевёрнутые вверх неоклеенной стороной прямоугольники $(ac13)$ и $(bcuv)$, изображающие каждый ab; тогда оставшаяся незакрытой часть квадрата будет представлять $(a-b)^2$.

Таким же образом мы можем изобразить на модели и тождество

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \qquad \text{IV}$$

Берём синий неподвижный квадрат (1313), дающий a^2, и кроме того, подвижные: цветной квадрат $(bc23)$, соответствующий b^2,

и красный прямоугольник ($14ad$), представляющий $(a+b)(a-b)$ и состоящий из двух отдельных кусков ($13ac$) и ($34cd$) (черт. 10).



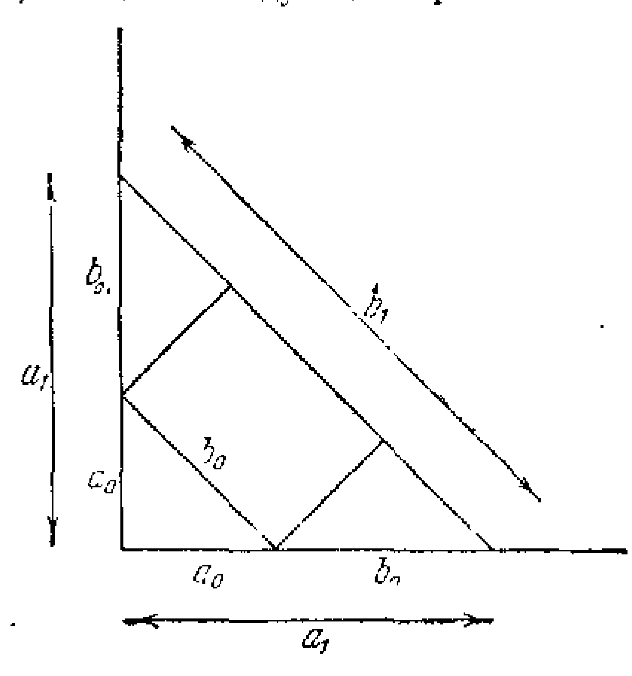
Черт. 10.

Перенеся часть ($34cd$) в положение ($ab12$) и добавив перевёрнутый вверх белой стороной квадрат ($bc23$) (чтобы показать вычитание), мы наглядно обнаружим, что a^2-b^2 (т. е. (1313) без ($bc23$)) дают $(a+b)(a-b)$, т. е. ($14ad$).

15. Диагональные числа. Интересно отметить, что предложение 9, которое выражается тождеством

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2},$$

Евклид доказывает совершенно иначе, чем предыдущие предложения (4—8); действительно, в этом и следующем предложениях он пользуется теоремой Пифагора, которая, между прочим, совершенно не является для этого необходимой.



Черт. 11.

Наиболее простое объяснение этого факта таково: составляющие одно целое *предложения* 4, 7, 8 являются вспомогательными для вывода предложений 12 и 13, которые были известны ещё Гиппократу Хиосскому и, таким образом, принадлежат к древнейшим частям «Начал».

Что же касается предложений 9 и 10, то, как это было выяснено сравнительно недавно, они принадлежат самому Евклиду и даны им в качестве необходимых лемм *для* построения теории так называемых диагональных чисел.

Диагональными называются числа, получающиеся по следующему закону. Отложим на сторонах прямого угла по отрезку a (черт. 11) и соединим его концы диагональю b. Возьмём для этих чисел приближённо

$$a=a_0=1,$$
$$b=b_0=1.$$

Если мы повернём наш треугольник так, чтобы гипотенуза его легла соответственно и на горизонтальную и на вертикальную стороны прямого угла, и соединим концы полученных отрезков $a + b$, то найдём новую пару диагональных чисел

$$a_1 = a_0 + b_0 = 2, \qquad b_1 = 2a_0 + b_0 = 3.$$

Продолжая поступать таким образом дальше, найдём третью пару

$$a_2 = a_1 + b_1 = 5, \qquad b_2 = 2a_1 + b_1 = 7,$$

затем четвёртую пару

$$a_3 = a_2 + b_2 = 12, \qquad b_3 = 2a_2 + b_2 = 17$$

и т. д.

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \qquad b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}.$$

Числа a_n суть так называемые боковые, b_n — диагональные числа.

Числа a_n и b_n связаны соотношением

$$b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

Действительно,

$$b_n^2 - 2a_n^2 = (2a_{n-1} + b_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + b_{n-1})^2 = 2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 =$$
$$= -(b_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) = (-1)(b_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2).$$

Продолжая, найдём аналогично:

$$b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^2 (b_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2) =$$
$$= (-1)^3 (b_{n-3}^2 - 2a_{n-3}^2) =$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= (-1)^n (b_0^2 - 2a_0^2).$$

Поскольку же

$$b_0^2 - 2a_0^2 = 1 - 2 = -1,$$

наша теорема доказана.

Если b_n и a_n достаточно велики, то можно положить

$$b_n^2 = 2a_n^2,$$

откуда получаются приближённые значения для $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = \frac{b_n}{a_n}.$$

В своём «Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum» (1886) Цейтен высказал предположение (стр. 27, 28), что 9 и 10 предложения Евклида имеют связь с теорией диагональных чисел.

Если в выражающей предложение 9 формуле

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2$$

положить

$$CD = x, \quad DB = y, \quad \text{то} \quad AC = CD + DB = x + y.$$

Переписав нашу формулу в виде

$$AD^2 - 2AC^2 = -(DB^2 - 2CD^2),$$

получим

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = -(y^2 - 2x^2).$$

Если x и y — числа, удовлетворяющие условию

$$2x^2 - y^2 = \pm 1,$$

которому подчиняются определённые нами диагональные числа, то $2x + y$ и $x + y$ будут как раз следующие за x и y числа в общем ряду диагональных и боковых чисел. Таким образом, 9 предложение Евклида есть не что иное, как геометрическое доказательство основного свойства диагональных чисел.

Догадка Цейтена блистательно оправдалась после опубликования комментария Прокла на «Государство» Платона (P r o c l i, Diadochi in Platonis Rempublicam commentarii, Teubner, 1901, vol. II). В этом комментарии Прокл говорит (ст. 27), что «свойства боковых и диагональных чисел доказаны геометрически (γραμμικῶς — на линиях) во 2-й книге Элементов им (ἀπ᾽ ἐκείνου — очевидно ὑπ᾽ Εὐκλείδου)», после чего приводится текст 10 предложения Евклида. Таким образом, принадлежность Евклиду доказательств предложений 9 и 10 можно считать вполне установленной.

Это обстоятельство вполне объясняет отличный от предыдущих метод доказательства предложений 9 и 10. Если бы мы пожелали моделировать евклидово доказательство предложения 9, то вместо подвижных элементов прямоугольника нам пришлось бы взять элементы треугольника, причём модель получилась бы довольно сложной. Если формулу

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

представить в виде:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right\},$$

то можно и для этого тождества построить модель рассмотренного выше типа.

16. Доказательства предложения 9. Эта теорема не только доказывается теми приёмами, которыми доказаны предложения 1—8, но можно даже собрать целую коллекцию этих доказательств.

Мы приведём прежде всего доказательство Клавия [18]), вполне геометрическое и вполне отвечающее предложению 8. Для него и чертёж берётся тот же, что и для предложения 8.

[18]) См. Clavius, стр. 187 (прим. 5).

Для краткости квадраты и прямоугольники обозначаем цифрами и детали доказательства оставляем читателю (черт. 12).

$$(1245) = (1) + (5) + (4) + (2) =$$
$$= (1) + 2(5) + (6) + (2),$$

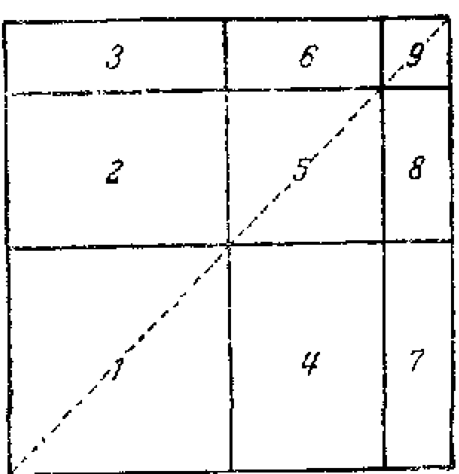
так как

$$(4) = (5) + (6).$$

Далее,

$$(1245) + (9) =$$
$$= (1) + 2(5) + [(6) + (9)] + (2) =$$
$$= (1) + 2(5) + (3) + (2) =$$
$$= 2(1) + 2(5) = 2[(1) + (5)],$$

что и доказывает предложение 9.



Черт. 12.

Существует ещё много доказательств предложения 9, но они в геометрической форме только развёртывают формальные операции, приводящие раньше доказанные тождества к тождеству, выражаемому предложением 9.

Мы даём только *алгебраические эквиваленты*, предлагая читателю облечь их в геометрическую форму.

4-е доказательство Клавия[19]; положим (черт. 9 к предложению 9)

$$d = AD = a + b,\ AC = b,\ CD = a,\ DB = e,\ AD = d,\ CB = c = b$$
$$d^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ca,$$
$$d^2 + e^2 = a^2 + b^2 + 2ca + e^2.$$

Но по предложению 7 книги II

$$2ac + e^2 = c^2 + a^2 = b^2 + a^2$$

$$d^2 + e^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Доказательство Жильберта:

$$d^2 + e^2 + 2ed = (d + e)^2 = 4b^2,$$

$$2b^2 = 2ed + 2d^2 \text{ (предложение 5 книги II)}.$$

Отсюда

$$d^2 + e^2 + 2b^2 + 2ed = 4b^2 + 2ed + 2a^2,$$

и, наконец,

$$d^2 + e^2 = 2b^2 + 2a^2 = 2(a^2 + b^2).$$

---

[19]) Там же.

Сложность этих выводов объясняется тем, что они не пользуются тождеством

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad \text{I}$$

которого нет у Евклида по причинам, нами указанным в (14).

Его у Евклида заменяет предложение 7, которому отвечает тождество

$$(a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2,$$

которое приводится к виду

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2.$$

Отсюда до I один шаг — операция переноса $2ab$ с изменённым знаком в другую часть. Но *шаг этот и не делается.*

Если же шаг этот сделать, то дело окажется очень просто:

$$d^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$
$$e^2 = (c-b)^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

откуда

$$d^2 + e^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Командинус, а за ним Клавий этого не делают, а поступают так:

$$b^2 + a^2 = 2ab + e^2,$$

так как

$$e = c - b = a - b.$$

Далее,

$$2(b^2 + a^2) = a^2 + b^2 + 2ab + e^2 = (a+b)^2 + e^2 = d^2 + e^2.$$

17. Принцип непрерывности и тождества. Эта же теорема в настоящее время может служить иллюстрацией *принципа непрерывности Понселе*[20], гласящего, что если некоторое положение имеет место, когда некоторые величины α, β, γ... не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность, то положение остаётся в силе и когда эти ограничения сняты.

По существу в первой части этот принцип устанавливает возможность перехода к пределу с сохранением всех тех свойств, которые остаются при изменении.

С помощью теоремы Пифагора доказывается известная формула:

$$AD^2 + BD^2 = 2(DC^2 + AC^2),$$

где DC — медиана $\triangle ABD$, соединяющая вершину D с серединой C стороны AB; затем деформируем треугольник так, чтобы

[20]) Poncelet, Applications d'Analyse et de Géométrie, Paris, 1864.

точка D оказалась на прямой AB. Тогда мы получим евклидово 9 предложение.

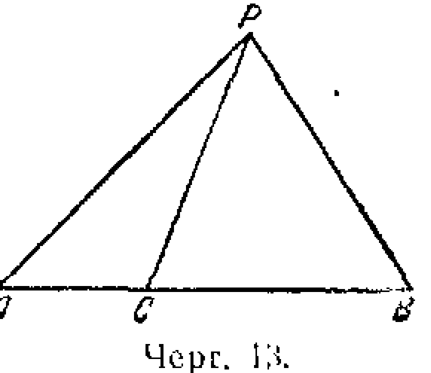
Такой приём возможен при выводе более сложных геометрических тождеств, например, тождества Стеварта [21])

$$\overline{PA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{PB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ (черт. 13);}$$

в нём можно убедиться, выверяя алгебраическое тождество:

$$(a-p)^2(c-b) + (b-p)^2(a-c) + (c-p)^2(b-a) + \\ + (c-b)(a-c)(b-a) = 0.$$

Но к нему можно прийти, доказывая с помощью теоремы Пифагора теорему, выражаемую тем же равенством для треугольника ABP и прямой PC, проведённой к основанию, и используя принцип непрерывности.



Черг. 13.

18. Теорема Пифагора и тождества. Постулируя взаимно однозначное соответствие между геометрическими величинами и числами, мы можем видеть в предложениях II книги доказательства *алгебраических тождеств*, имеющих значение для всякого рода геометрических величин (а не только для отрезков). Эти тождества вовсе не предполагают *аксиому параллельности*, а только *аксиомы непрерывности*.

Но Евклид оперирует с прямоугольниками, которые строятся только на евклидовой плоскости и, таким образом, положения, не зависящие от аксиомы о параллельных, доказываются с помощью последней.

В 9 же предложении мы имеем *вывод алгебраического тождества с помощью теоремы Пифагора*, и не абсолютный характер доказательств здесь выступает ещё резче.

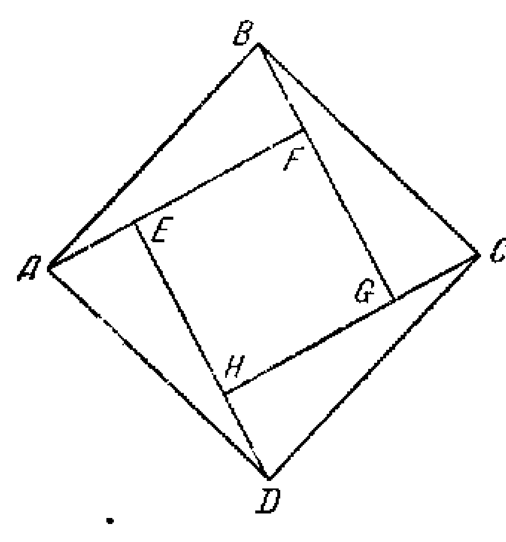
Здесь интересен обратный путь, по которому пошли некоторые математики.

Конечно, теорему Пифагора нельзя вывести из *тождеств*, так как она зависит от аксиомы о параллельных. Но тождества, эквивалентные теоремам II книги, упрощают доказательство теоремы Пифагора. Такое упрощение доказательств теоремы Пифагора получим, если пожелаем логически обосновать интуитивное доказательство индусского математика Бхаскары (1114 г. н. э.).

---

[21]) О Стеварте см. M a r i e, Histoire des sciences mathématiques, т. VIII, стр. 240. Теорема, видимо, принадлежит Р. Симсону. Intermédiaire des math., 1908, стр. 160. — См. также P a p e l i e r (прим. 13).

В квадрате, построенном на гипотенузе c прямоугольного треугольника[22], внутри оказывается квадрат, построенный на разности катетов $a-b$ (черт. 14).



Черт. 14.

Мы имеем:

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2,$$

и достаточно использовать тождество

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

чтобы получить

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ [23]}.$$

19. Коллекция доказательств предложения 10. Об этом предложении следует сказать то же, что о девятом. Прежде всего оно доказывается общим приёмом и нет необходимости прибегать к теореме Пифагора, как это делает Евклид.

Мы приводим доказательство Пелетария, причём опять, как в предыдущем комментарии, пользуемся теми же обозначениями и детали оставляем читателю.

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) = (7) + (2356) + (14) + (89).$$

Но $(14) = (25) = (5) + (2) = (7) + (2)$ (черт. 15), $(89) = (56)$, поэтому

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) = 2(7) + (2356) + (2) + (56) = 2(7) + (2536) + (256),$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) + (3) = 2(7) + 2(2536) = 2[(7) + (2356)],$$

а это и выражает предложение 10.

Существует ещё другое аналогичное доказательство евклидова типа (5-е доказательство Клавия).

На чертеже квадрат, в котором равные квадраты (3) и (6), (8) и (11) (черт. 16). Мы имеем:

$$\text{кв. } AD + \text{кв. } BD = (4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 11\ 12\ 13) + (3)$$

и

$$\text{кв. } AC + \text{кв. } CD = (11) + (5689);$$

как в предыдущем доказательстве,

$$(45689\ 11\ 12\ 13) = 2(11) + (5689) + (589).$$

---

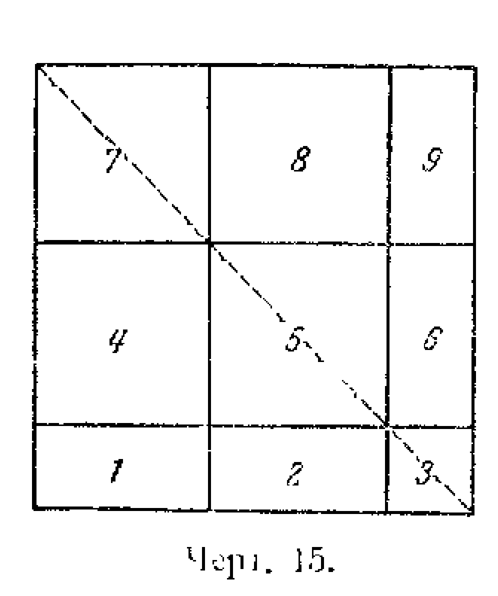
[22]) См. прим. 17.

[23]) Литцман, Теорема Пифагора, Одесса, 1912, второе изд., 1935.

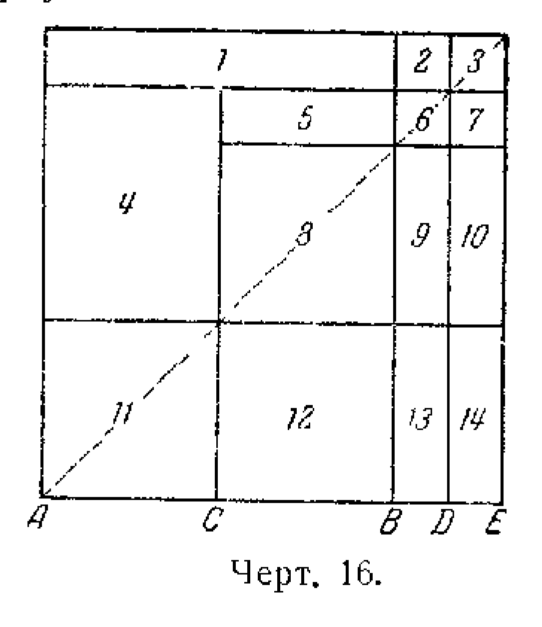
Но (3) = (6), вследствие чего

кв. AD + кв. $BD = 2\,(11) + 2\,(5689) = 2\,$[кв. AC + кв. CD].

Большинство многочисленных доказательств сводится опять, как для предложения 9, к алгебраическим формальным операциям, облечённым в геометрическую форму.



Черт. 15.



Черт. 16.

Точный перевод предложения 10 на алгебраический язык:

$$(a+b)^2+b^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)^2\right]. \qquad \text{I}$$

Перевод Гейберга:

$$(2a+b)^2+b^2=2\,[a^2+(a+b)^2]. \qquad \text{II}$$

Математики эпохи Возрождения 1 приводят к II (4-е доказательство Клавия). Положим (черт. 16)

$$a=AC=BC,$$
$$b=BD=DE,$$
$$c=a+b=CD,$$
$$d=a+c=AD.$$

Тогда

$$d^2=(a+c)^2=c^2+a^2+2ac,$$
$$d^2+b^2=a^2+c^2+2ac+b^2.$$

По 7 предложению книги II, помня, что $c=a+b$,

$$2ca+b^2=c^2+a^2,$$

и окончательно

$$d^2+b^2=2\,(c^2+a^2).$$

Аналогичны этому и доказательства Барроу, Коммандино и второе доказательство Клавия.

20. Книга II Евклида и Гетальди [24]. Геометрическая алгебра евклидового типа была в употреблении даже при наличии числовой алгебры. Формулы последней выводились геометрически при помощи построений, аналогичных теоремам книги II Евклида, и потом облекались в форму буквенной алгебры. В таком виде мы находим *их в начале XVII в. у итальянского математика* Гетальди.

Он пополняет книгу II Евклида выводом предложения о квадрате, построенном на разности. Он пишет результат в символике Виеты

$$A - B \text{ in se } AQ + BQ - B \text{ in } A\cdot 2 \qquad \text{I}$$

(AQ это A^2, B in A это $A\cdot B$, $A - B$ in se это $(A - B)^2$, коэффициент пишется на последнем месте, знака равенства ещё нет), под I он подписывает

$$A + B \text{ in se } AQ + BQ + B \text{ in } A\cdot 2 \qquad \text{II}$$

и заключает, что по вычитании остаётся

$$B \text{ in } A\cdot 4.$$

Мы всё это выражаем так:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Затем он выводит тождество

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Получаемые им тождества позволяют ему решать задачи, подобные заключающимся в предложении 11 книги II.

Так он решает задачу: разделить данный отрезок так, чтобы прямоугольник, построенный на частях, равнялся квадрату, построенному на разности частей. Задача эта приводится к уравнению

$$(a - x)\,x = (a - 2x)^2.$$

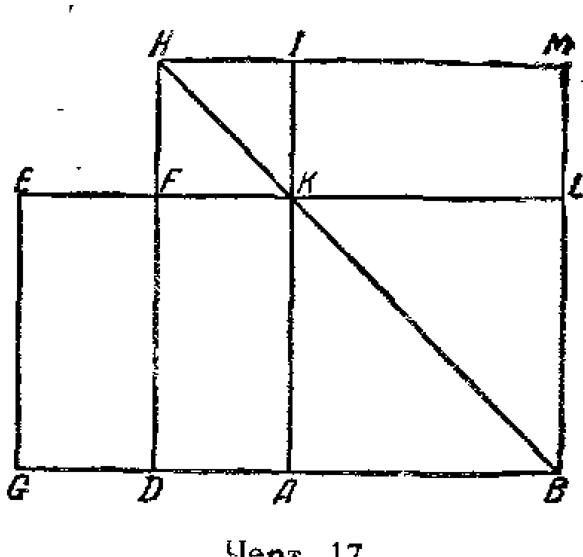
21. Общая формула для решения квадратного уравнения. Задача на проведение золотого сечения приводит алгебраически к квадратному уравнению.

В начале существования буквенной алгебры общая формула квадратного уравнения $x^2 + px = q$, $p > 0$ выводилась геометрически. Таким доказательством пользуются Виета и Ренальдини.

---

[24]) Ghetaldi, De resolutione et compositione mathematica libri quinque, Romae, 1640. Gerlich, Eine Studie über die Entwickelung der Analyt. Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marinus Ghetaldi. Pappi, Collectiones, леммы 22—26.

Пусть имеем (черт. 17) какие-либо отрезки $AB = x$ и $AG = p$; на перпендикуляре GE откладываем $GE = AB$, проводим $EL \parallel GB$ и $AK \parallel GE$; получаем квадрат BK, равный x^2 и прямоугольник EA, равный px, образующие вместе прямоугольник BE. Разделим AG пополам в точке D и проведём $DH \parallel GE$. В пересечении DH и диагонали BK получаем точку H. Достраиваем квадрат BH. Прямоугольник BE, равный $x^2 + px$, равен гномону $FDBMIK$; по условию $x^2 + px = q$, так что гномон равен q. Но квадрат KH построен на $FK = DA = \frac{p}{2}$



Черт. 17.

и равен $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Гномон же вместе с квадратом KH даёт квадрат BH, построенный на $BD = x + \frac{p}{2}$. Таким образом,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

или

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

При построении такого доказательства образцом взята книга II «Начал».

22. Остроугольные треугольники. Евклид определяет остроугольный треугольник как такой, у которого *все* углы *острые*, между тем как это предложение предполагает только то, что *первая сторона должна быть против острого угла*.

Многие комментаторы подчёркивают, что здесь термин остроугольный следует или понимать в новом смысле или же его совершенно выбросить.

Следует отметить, что эта теорема, так же как предыдущая, но только в другой форме, приводится в «Данных Евклида».

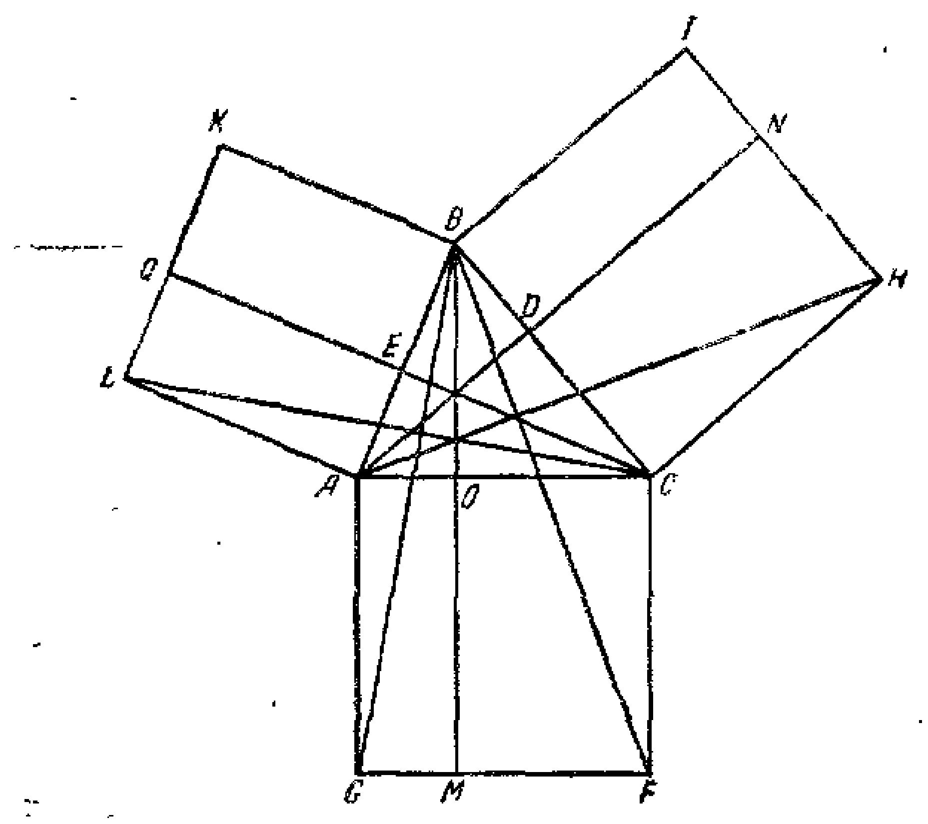
Утверждается, что если в треугольнике дан острый угол, то также дано и отношение к квадрату стягивающей этот острый угол прямой AC, того, на что квадраты на AB и BC больше удвоенного прямоугольника на CB и BD.

23. Чисто геометрическое доказательство обобщённой теоремы Пифагора. По существу, евклидово доказательство представляет *формальные* операции над алгебраическими тождества-

ми, представленными в геометрической форме; оно легко *алгебраизируется* и тогда превращается в обычный вывод обобщённой теоремы Пифагора с помощью алгебраических преобразований.

Григорий Сан-Винценто даёт довольно сложное, но уже чисто геометрическое доказательство.

Я приведу его только для случая *острого* угла *B* треугольника *ABC*. По тому же образцу можно построить доказательство и для *тупого* угла.



Черт. 18.

На сторонах *AC*, *BC*, *AB*, как и в евклидовом доказательстве теоремы Пифагора, строятся квадраты *ACFG*, *BCHI*, *ABKL* (черт. 18).

Опускаются из вершин *A*, *B*, *C* перпендикуляры на стороны и продолжаются до пересечения с противоположными сторонами квадратов в *N*, *M*, *Q*.

Проводятся прямые *BF*, *BG*, *AH*, *CL*. Тогда совершенно так же как при евклидовом доказательстве теоремы Пифагора, выводим

$$\text{прям. } AGMO = 2\triangle AGB = 2\triangle ALC = \text{прям. } ALQE;$$

$$\text{прям. } CFMO = 2\triangle CFB = 2\triangle CHA = \text{прям. } CHND.$$

Тогда квадрат $ACFG$ = прям. $ALQE$ + прям. $CHND$ = квадр. $ABLK$ + квадр. $BCHI$ — прям. $EBQK$ — прям. $BDNI$.

Но прямоугольники *EBQK* и *BDNI* равны друг другу. Действительно, проведя прямые *CK* и *AI* (они не показаны на чертеже), мы получим два треугольника *CKB* и *AIB*, которые равны друг

другу, это докажем так же, как в евклидовом доказательстве теоремы Пифагора. Прямоугольники же $EBLK$ и $BDNI$ вдвое больше треугольников CKB и AIB соответственно. Итак,

квадр. $ACFG$ = квадр. $ABLK$ + квадр. $BCHI$ — 2 прям. $AB \cdot BE$,

т. е.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BE$$

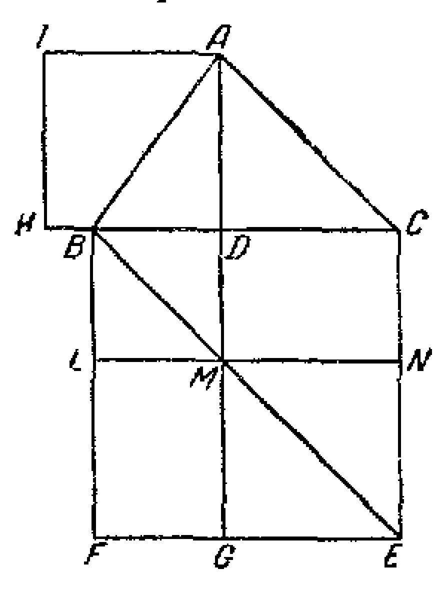
или

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD.$$

24. Псевдогеометризованное доказательство. Геометризация евклидовых доказательств предложений 12, 13 производится комментаторами так, что в чертёж вводятся все квадраты и прямоугольники, с которыми производятся формальные операции в таких конфигурациях, что из них видны все формулы, через которые идут эти операции. По существу, эти конфигурации ничего не прибавляют к евклидову доказательству, и если евклидово доказательство не считать чисто геометрическим, то эти доказательства следует признать *псевдогеометрическими*.

Я привожу такое доказательство только для острого угла (черт. 19).

В $\triangle ABC$ опускаем на основание BC перпендикуляр AD и строим на высоте квадрат $ADHI$, а на основании квадрат $BCEF$, и последний разделяем так, как это делает Евклид при доказательстве предложения 4. На BD строится квадрат $BDLM$, а на CD квадрат $MNGE$.



Черт. 19.

$$\square AB = DI + LD \text{ по теореме Пифагора,}$$
$$\square BC = NG + CL + LG.$$

Поэтому

$$\square AB + \square BC = NG + DI + CL + LG + LD = NG + DI + 2CL,$$

так как $LG = CM$ (по предложению 43 книги I) и $LD + CM = CL$.

Но $\square AC = NG + DI$ по теореме Пифагора, так как $NG = \square CD$.

В результате

$$\square AB + \square BC = \square AC + 2CL = \square AC + 2 \text{ прям. } BC \cdot BD,$$

так как $BL = BD$.

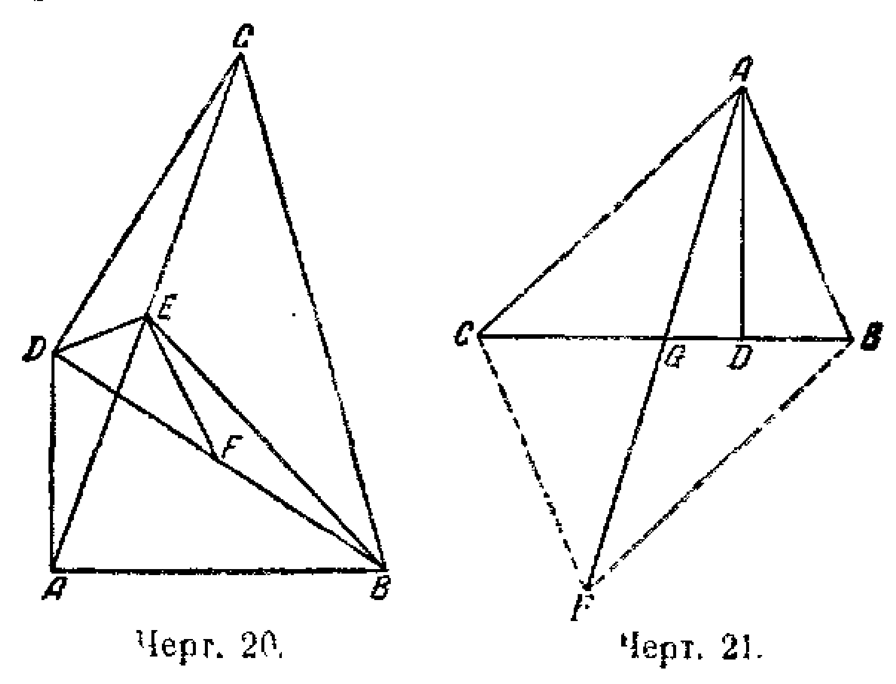
25. Сумма квадратов диагоналей. Из обобщённой теоремы Пифагора выводится очень просто, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов его сторон. Эта теорема была следующим образом обобщена Эйлером.

Для всякого четырёхугольника $ABCD$ имеем:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2,$$

где E — середина AC и F — середина DB (черт. 20).

Теорема Эйлера проще всего выводится из теоремы, принад-



Черт. 20. Черт. 21.

лежащей Аполлонию. В треугольнике ABC проведём медиану AG к середине G стороны BC; тогда:

$$AC^2+AB^2=2(AG^2+BG^2) \qquad \text{(черт. 21).}$$

В настоящее время эта формула служит для определения *медианы* треугольника по *сторонам*; она выводится, пополняя треугольник BAC до параллелограмма $BACF$.

Если $AD \perp BC$, то имеем:

$$AC^2=AD^2+CD^2,$$
$$AB^2=AD^2+BD^2,$$

и поэтому

$$AC^2+AB^2=2AD^2+CD^2+BD^2.$$

По предложениям 9, 10 книги II $CD^2+BD^2=2GD^2+2GB^2$, и поэтому

$$AC^2+AB^2=2AD^2+2GD^2+2GB^2=2AG^2+2GB^2.$$

Теорема Эйлера выводится следующим образом:

По доказанной только что теореме

$$AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2,$$
$$CD^2+DA^2=2AE^2+2DE^2,$$
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=4AE^2+2(BE^2+DE^2).$$

Далее, из треугольника DEB, где EF — медиана,

$$BE^2 + DE^2 = 2DF^2 + 2EF^2$$

и окончательно

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AE^2 + 4DF^2 + 4EF^2 = \\ = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

26. Сводка алгебраических формул, выражающих теоремы книги II.

I. $a(b+c+d) = ab + ac + ad,$

II. $b + c = a \longrightarrow ab + ac = a^2,$

III. $(a+b)a = ab + a^2,$

IV. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$

V. $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$

VI. $(2a+b)b + a^2 = (a+b)^2,$

VII. $(a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2,$

VIII. $4(a+b)a + b^2 = [(a+b)+a]^2,$

IX. $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right],$

X. $(2a+b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a+b)^2].$

27. Стереометрические аналогии книги II «Начал». Стереометрические аналогии теорем книги II пытается дать Кавальери[25]. В «Геометрии неделимых» он даёт геометрические теоремы, выражаемые равенствами:

$$(a-b)a^2 = a(a-b)a, \quad (1)$$

$$(a+b)a^2 = a^2b + a^3, \quad (2)$$

$$(a+b)^3 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2, \quad (3)$$

$$(a+b)^3 = (a+b)a^2 + (a+b)b^2 + (a+b)2ab, \quad (4)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2, \quad (5)$$

$$ab(2a-b) + a(a-b)^2 = a^3, \quad (6)$$

$$(a+b)(2a+b)b + (a+b)a^2 = (a+b)^3. \quad (7)$$

В «Опытах» он даёт ещё более сложное тождество

$$a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\frac{a+b}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \quad (8)$$

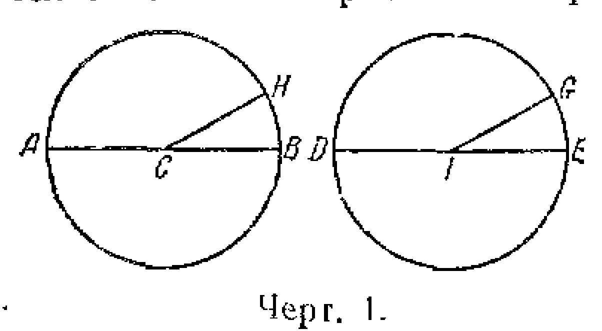
Но только простейшие (1), (2), (3), (4), (5) моделизуются. Вывод же других сводится к алгебраическому выводу, но только в замаскированной геометрической форме.

---

[25]) Кавальери, Геометрия неделимых, пер. и коммент. Лурье, М. — Л., 1939.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ III

1. Радиусы равных кругов. Первое определение книги III на первый взгляд представляет нечто несущественное. А между тем около этого определения сосредоточиваются многочисленные комментарии. Некоторые комментаторы, как, например, Тарталья[1]) и Борелли[2]), относят это определение к *аксиомам*.



Черт. 1.

Другие же видят в нём *теорему*, требующую доказательства[3]). При этом доказательство ведут методом *наложения* (черт. 1).

Налагается один круг на другой, так что центр C попадает в центр I и диаметр AB идёт по диаметру DE.

Тогда, взяв HC и IG под равными углами к диаметрам AB и DE, получим при наложении совпадение CH с IG, а затем (вследствие равенства радиуса) и точки H с G.

Этот вывод, правда, ведётся с помощью евклидова метода наложения, но совершенно *не в духе самого Евклида*. У Евклида при наложении треугольника на треугольник устанавливается совпадаемость *конечного* числа элементов, а именно, троек вершин и троек сторон, которые совпадают вовсе *не по точкам*, а *целиком*, в силу аксиомы 9, по которой две прямые не заключают пространства.

---

1) Tartaglia, Euclide tradotto, стр. 37. О нём Cantor, Vorles., т. 2, стр. 484.

2) Borelius, Euclides restitutus, стр. 63, 1679.

3) Angelus de Marchetis, Euclides reformatus, 1709. — König, Elementa Euclidis, стр. 91. — Playfair, Elements of Geometry, стр. 374. — Billingsley, The Elements of Euclid, стр. 10.

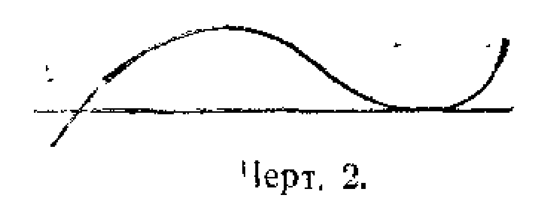
А здесь мы устанавливаем совпадение *бесконечного* множества точек, т. е. вводим никогда не завершающийся процесс.

Нужно отметить, что в своём определении Евклид мыслит не только то, что если радиусы равны, то равны и круги, но и обратно — если круги равны, то равны и радиусы. Некоторые комментаторы (Клавий, Оронс Финей, Борелли, Битонто[4]), Кандалла[5]) добавляют в связи с этим, что круг больше, если радиус больше, и меньше, если радиус меньше.

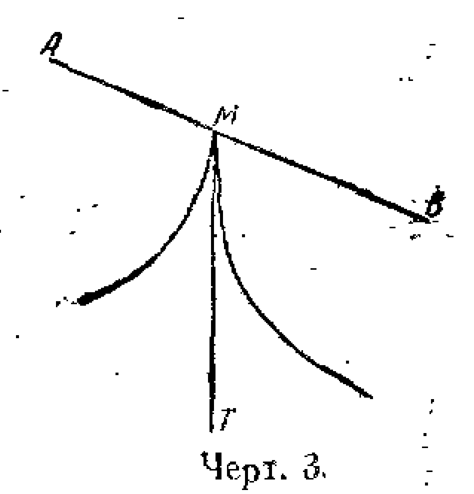
Таким образом, рассматриваемое определение Евклида имеет и явный аксиоматический оттенок.

2. Касательная. Мы определяем касательную как предел секущей, проходящей через две точки M и M_1 при сближении M_1 с M.

До установления понятия предела в д'аламберовском смысле касательная определялась как прямая,



Черт. 2.



Черт. 3.

проходящая через две бесконечно близкие точки M, M_1, причём расстояние MM_1 мыслилось как *актуально-бесконечно малое.*

В учебнике элементарной геометрии эти определения не могут быть проведены, так как о касательных приходится говорить много раньше введения в геометрию понятия предела, трудно усваиваемого на этой ступени обучения.

Лежандр[6]) *даёт определение не касательной вообще, а касательной круга:* прямая, имеющая только одну общую точку с окружностью.

Такое определение, конечно, не согласуется с тем понятием касательной, которым *пользуются в анализе. Касательная как* предел секущей может касаться и вместе с тем и пересекать кривую (черт. 2).

Здесь следует отметить, что евклидово определение касательной отнюдь не совпадает с современным. В конце острия M, по Евклиду, *всякая* прямая будет касательной к кривой, между тем как, по-нашему, только одна прямая MT (черт. 3). В четвёртой книге Евклид определяет *вписанный* в круг многоугольник как такой, углы которого касаются окружности (вместе с тем

---

[4]) Giordano di Bitonto, Euclide restituto, 1670, стр. 101.
[5]) Candalla, Euclidis Elementa, 1611.
[6]) Лежандр. Элементы геометрии, 1887.

они касаются и касательных к кругу, причём остаются касательными при различном наклонении к этой касательной).

Взяв вместо круга дугу кривой, которую прямая пересекает только в одной точке, мы должны были бы, по Лежандру, назвать её касательной, причём таких касательных было бы бесконечное множество.

По Евклиду же, это не были бы касательные, так как они *пересекали* бы дугу.

То же следует сказать и об определении касающихся кругов.

3. Расстояние точки от прямой. С современной точки зрения Евклиду следовало бы определить *расстояние точки от прямой* как длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Евклид не даёт не только определения *расстояния точки от прямой*, но даже расстояния центра круга от прямой; он определяет только прямые *равноотстоящие* и *неравноотстоящие* от центра.

Евклидово определение имеет описательный и вместе с тем и аксиоматический характер. В данном случае «ближе» и «дальше» мыслятся как понятия простые, сами по себе ясные, принимаемые без определения. Затем *не вообще, а только для круга* ищется признак, по которому можно судить о равной или неравной удалённости хорд. Это даётся сравнением перпендикуляров, опущенных из центра на хорды.

4. Угол сегмента. Это определение при историческом анализе имеет очень важное значение.

Здесь совершенно определённо выставляется, как предмет геометрического исследования, *смешанный* угол, образуемый прямой и кривой. Сегмент имеет две стороны: одну прямую, другую кривую, и два угла.

Бесспорно, что до Евклида эти смешанные углы играли значительно бо́льшую роль, чем у Евклида, и постепенно выходили из употребления. У Аристотеля есть доказательство предложения 5 книги I «Начал», в котором он оперирует смешанными углами.

Подобными сегментами у Евклида называются те, в которых заключаются равные углы (по-нашему, в которые вписываются равные углы). Это второе определение должно быть *оправдано*: следует доказать, что все вписанные углы равны (что, между прочим, не имеет места в плоскости Лобачевского); это Евклид даёт только в предложении 21.

5. Аксиоматическая проблема апагогического доказательства. То, что центр круга лежит на перпендикуляре, восставленном из середины хорды, Евклид доказывает *апагогически*.

Роберт Симсон[7]) старается убедить в том, что это положение и не может быть доказано прямым путём, а только апагогически.

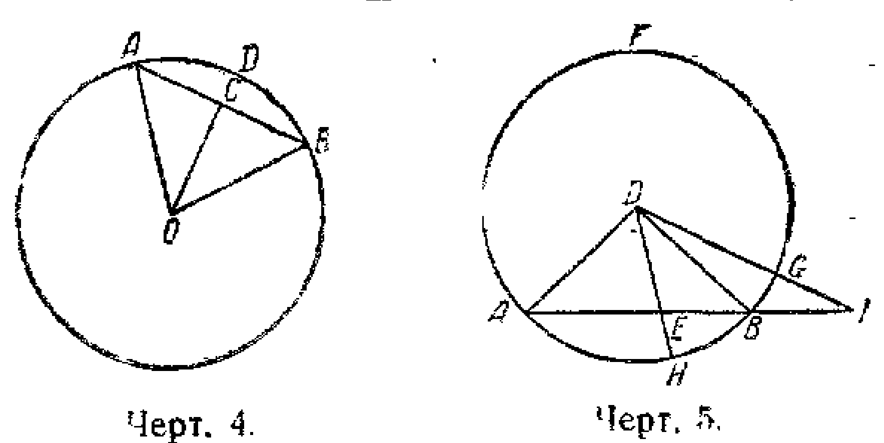
---

[7]) R. Simson, Euclidis elem. libri sex.

Таким образом, он наталкивает на аксиоматическую проблему, которую мы ещё не умеем решать. «*Даны аксиомы A, B, C, D и дано вытекающее из этих аксиом положение P; можно ли P вывести из A, B, C, D прямым доказательством?*» Иначе говоря, необходимо ли использовать вместе с A, B, C, D ещё логическую аксиому «исключённого третьего» [8]).

Р. Симсон говорит, что кроме определения *круга*, мы не имеем никаких других признаков, из которых могли бы извлечь доказательство; исходя же из определения круга, мы не можем рассуждать иначе, как приведением к абсурду.

Другие комментаторы не убеждаются доводами Симсона. Однако Компано, Кетий, Берман, а за ним Камерер [9]) исходят из предложения 26 книги I ($\angle A = \angle B$, $AC = CB$ и углы при C



Черт. 4. Черт. 5.

прямые) и доказывают (черт. 4), что все точки на перпендикуляре CO равноотстоят от A и B; из этого, однако, не следует, что все равноотстоящие точки, и в числе их центр O, находятся на этом перпендикуляре.

Чтобы доказать, что CO — *геометрическое место* всех таких точек, необходимо рассмотреть точку вне CO и доказать приведением к абсурду, что ей это свойство не присуще.

Томас Симпсон [10]) доказывает эту теорему прямым путём, соединяя O с серединой AB и прибегая к третьему случаю равенства треугольников.

O действительно оказывается на перпендикуляре CO к AB, но использование закона исключённого третьего здесь отодвинуто к началу, так как то, что в C можно восстановить только один перпендикуляр, доказывается *апагогически*.

Так же дело обстоит и с предложением 2.

---

8) Д. Мордухай-Болтовской, Ненатуральное доказательство в прошлом и будущем, Математическое Образование, 1, 1929.

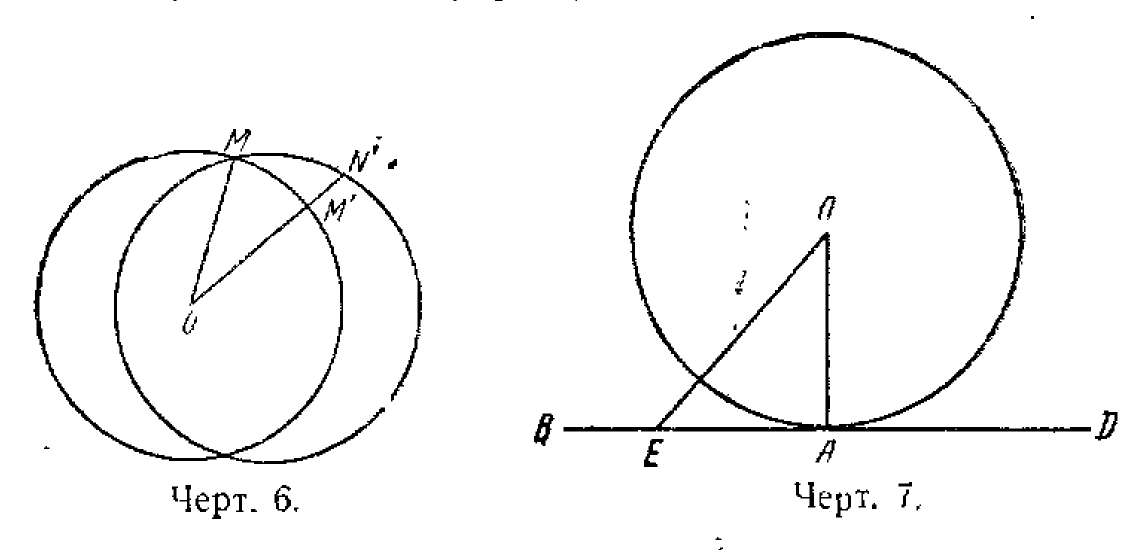
9) Camerer, Euclidis elem. libri priores, 1756.

10) T. Simpson, Elem. of Geometry.

То, что отрезок AB прямой, пересекающей круг, оказывается внутри этого круга, доказывается тем, что DE будет меньше DB, так как $\angle DEA > \angle DBA = \angle DAB$ на основании предложения 16 книги I (доказываемого прямым путём) и затем $DE < AD$ (на основании предложения 19, доказываемого апагогически) (черт. 5).

6. Теоремы о пересечении и касании. Комментаторы, например, Камерер[11]), предлагают слить предложения 5 и 6 в одно: «Если два круга описаны из одного центра, то они или не имеют общей точки, или, если имеют, то имеют *все* точки общими».

Доказательство даётся того же типа (не в евклидовом духе), как то, о котором мы говорили в связи с первым определением. Если точка M на некотором расстоянии от O, то на том же расстоянии будут и M' и N', и M'' и N'', и т. д., так что все точки кругов совпадают (черт. 6).



Черт. 6. Черт. 7.

7. Пересечение прямой с окружностью. Лежандр выводит невозможность пересечения окружности прямой в трёх точках из невозможности проведения из данной точки трёх равных наклонных.

Лежандр доказывает, что перпендикуляр к радиусу представляет касательную (черт. 7). Так как всякая наклонная OE длиннее перпендикуляра OA, то точка E находится вне окружности и линия BD имеет с ней только одну общую точку, а потому BD касательна к окружности.

8. Условия пересечения кругов. Весьма существенным дополнением к Евклиду являются предложения 13, 14 «Элементов» Лежандра[12]), устанавливающие условия пересечения и касания кругов. В современных учебниках (например, Киселёв) на этом долго останавливаются.

---

[11]) Camerer, см. прим. 9.

[12]) Лежандр, см. прим. 6.

Результаты исследования укладываются в табличку:

Если d расстояние между центрами, R и r радиусы кругов, то

при $d > R + r$ круги вне друг друга,

$d = R + r$ извне касаются,

$\left.\begin{array}{l} d < R + r \\ d > R - r \end{array}\right\}$ пересекаются,

$d = R - r$ касаются изнутри,

$d < R - r$ один внутри другого.

9. Замечание к доказательству предложения 7. Когда Евклид говорит, что BI больше CI, то он подразумевает, что угол BID больше угла CID, а в доказательстве исходит из того, что угол BEI больше угла CEI. Здесь бесспорно некоторый логический провал. Для полноты доказательства необходимо из неравенства

$$\angle BID > \angle CID$$

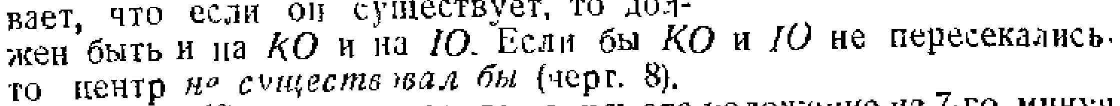
вывести, что $\angle BEI > \angle CEI$, что легко сделать с помощью предложения 25 книги I.

10. Пересечение прямых в одной точке. Доказательство предложения 9 возбуждает у некоторых комментаторов сомнения. Считают, что утверждение того, что центр O лежит на пересечении перпендикуляров в середине хорд AB и CD, можно признать, лишь доказав, что эти *перпендикуляры пересекаются.*

Указывается, что у Евклида нет такой аксиомы, что две прямые *всегда* пересекаются в одной точке (так как они могут быть параллельны и не пересекаться).

Черт. 8.

Но то, что центр существует, следует уже из *определения* круга (определение 15 книги I). Евклид же доказывает, что если он существует, то должен быть и на KO и на IO. Если бы KO и IO не пересекались, то центр *не существовал бы* (черт. 8).



Аустин [13]) предпочитает выводить это положение из 7-го, минуя это построение центра.

Существование трёх равных прямых, выходящих из точки, не совпадающей с центром, противоречит утверждению, что существуют *только две* равные прямые одна по одну, а другая по другую сторону наименьшей.

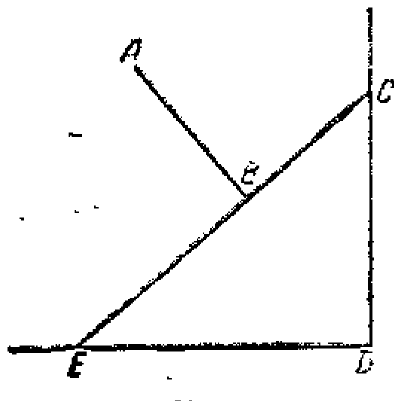
Об этой теореме говорят Кампано, Оронс Финей, Такэ, Р. Симсон, Плайфар.

В настоящее время Киселёв доказывает её, замечая, что перпендикуляры к двум пересекающимся прямым *пересекаются.*

---

[13]) Austinus, An examination of the first Books of Euclids Elements. Oxford. 1781.

В самом деле, если AB было бы параллельно CD, то и EC было бы параллельно ED и две эти прямые не были бы пересекающимися (черт. 9).



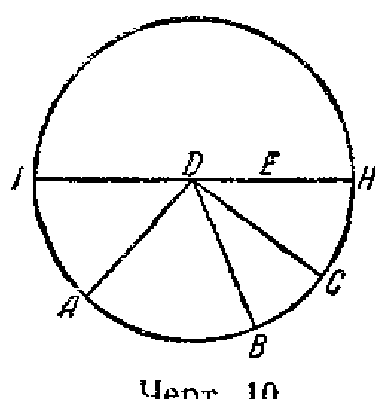
Черт. 9.

Теорема о пересечении прямых, восставленных из середины хорд, *абсолютная*, в настоящем же доказательстве используется аксиома о параллельных.

Если взять две хорды AB и CD, образующие малый угол между собой, то в геометрии Лобачевского перпендикуляры к ним (не обязательно в середине) EF, GH могут оказаться и параллельными и сверхпараллельными.

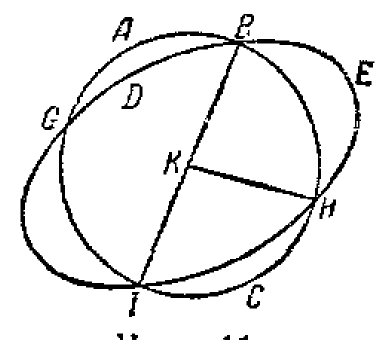
11. Другое доказательство предложения 9. В некоторых рукописях помещается ещё другое доказательство предложения 9, которое Гейберг удалил из основного текста.

«Иначе. Внутри круга ABC (черт. 10) возьмём некоторую точку D, и пусть из D к кругу ABC выходят более чем две равные прямые DA, DB, DC; я утверждаю, что взятая точка D будет центром круга ABC.



Черт. 10.

Действительно, пусть это не так, но, если возможно, пусть <центр> будет E, и соединяющая DE пусть будет доведена до точек I, H. Значит, IH диаметр круга ABC. Поскольку теперь в круге ABC на диаметре IH взята некоторая точка, которая не является центром круга, <а именно> D, то наибольшей будет DH, DC же будет больше DB, а DB <больше> DA. Но они и равны; это же невозможно; значит, E не будет центром круга ABC. Вот подобным же образом докажем, что и никакая другая, кроме D; значит, точка D есть центр круга ABC, что и требовалось доказать».



Черт. 11.

12. Другое доказательство предложения 10, помещённое у Гейберга в приложении.

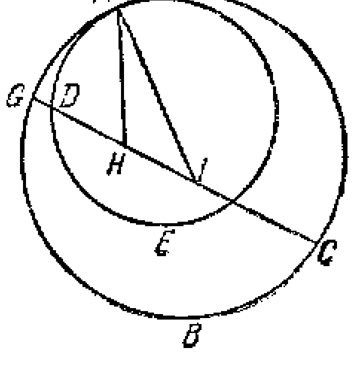
«Иначе (черт. 11). Действительно, пусть снова круг ABC сечёт круг DEI более чем в двух точках B, H, I, G; возьмём центр K круга ABC и соединим KB, KH, KI.

Поскольку теперь в круге ABC взята некоторая точка K внутри, и из точки K к кругу DEI вышли более чем две равные прямые KB, KI, KH, то значит, точка K есть центр круга DEI. Но K будет центром и круга ABC; значит, у двух секущих друг друга кругов будет один и тот же центр K; это же невозможно. Следовательно, круг не сечёт круга более чем в двух точках, что и требовалось доказать».

13. Доказательство другого случая предложения 11, помещённое у Гейберга в приложении.

«Но вот пусть она упадёт, как HIC; продолжим CIH по прямой до точки G и соединим AH, AI (черт. 12).

Поскольку теперь AH, HI больше AI, но IA равна IC, т. е. IG, отнимем общую IH; значит, остаток AH больше остатка HG, т. е. HD больше HG — меньшая большей, что невозможно. Подобным образом докажем нелепость и если центр большого круга оказался бы вне малого».



Черт. 12.

14. Теоремы о касании. Евклидовы доказательства предложений 11 и 12 имеют определённые дефекты, отмеченные рядом комментаторов.

Для того чтобы предложение 11 о внутреннем касании было абсолютно доказательным, нужно показать, что один круг (меньший) должен весь заключаться внутри другого. В этом легко убедиться, если принять во внимание, что при *внутреннем* касании один круг, лежащий внутри другого в окрестности точки касания, не может иметь ни одной части вне первого круга: в противном случае оба круга имели бы минимум три общие точки (одну касания и две пересечения), что противоречит предложению 10 книги III.

Но если оба круга не могут пересекаться, то один из них должен лежать целиком внутри другого, иными словами, внутренний круг должен быть меньше внешнего и иметь меньший радиус. Пусть I — центр большего круга (см. черт. 12), а H — меньшего. Если мы продолжаем линию центров IH, то точка касания A может лежать на продолжении этой линии или же вне её. Если точка касания лежит вне продолженной IH, то последняя может пересечь обе окружности или в одной общей точке (которая может быть только второй точкой касания) или в двух точках D и G, но тогда точка D её пересечения с меньшим кругом должна во всяком случае лежать ближе к центру H последнего, и тогда доказательство Евклида вступает в силу.

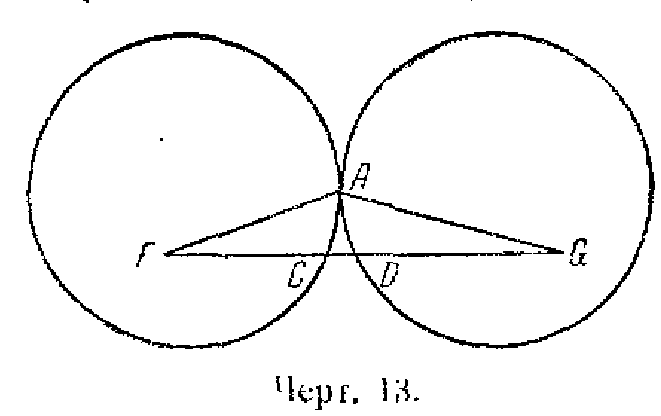
Невозможность нахождения точки касания на линии HI за центром I большего круга следует из того, что в данном случае

радиус меньшего круга оказался бы больше радиуса большего круга.

Таким образом, остаётся последняя возможность, что два круга имеют две точки внутреннего касания, т. е. точки D и G *сливаются в одну, так что* $AH = HD$ *и* $AI = ID$. Эта возможность тоже ликвидируется при помощи небольшого видоизменения того же самого доказательства Евклида. Действительно, мы имеем

$$AI < AH + IH = DH + IH = DI.$$

Но $DI = AI$, поскольку точка D лежит на окружности не только меньшего, но и большего круга, представляя вторую их общую точку касания. Таким образом, из предложения 11 вытекает не отмеченная Евклидом единственность точки касания двух кругов при их внутреннем соприкосновении.



Черт. 13.

Что касается предложения 12 то, повидимому, оно является позднейшим добавлением. Герон в своём комментарии к предложению 11 говорит, что «Евклид в предложении 11 считал оба круга касающимися изнутри... Но я покажу, как нужно доказать его, если соприкосновение является внешним». Так как после этого следует чертёж предложения 12 и текст доказательства, по существу мало отличающегося от евклидова, то, повидимому, существующий текст предложения 12 представляет доказательство Герона, внесённое позднейшими редакторами текста Евклида, может быть Теоном.

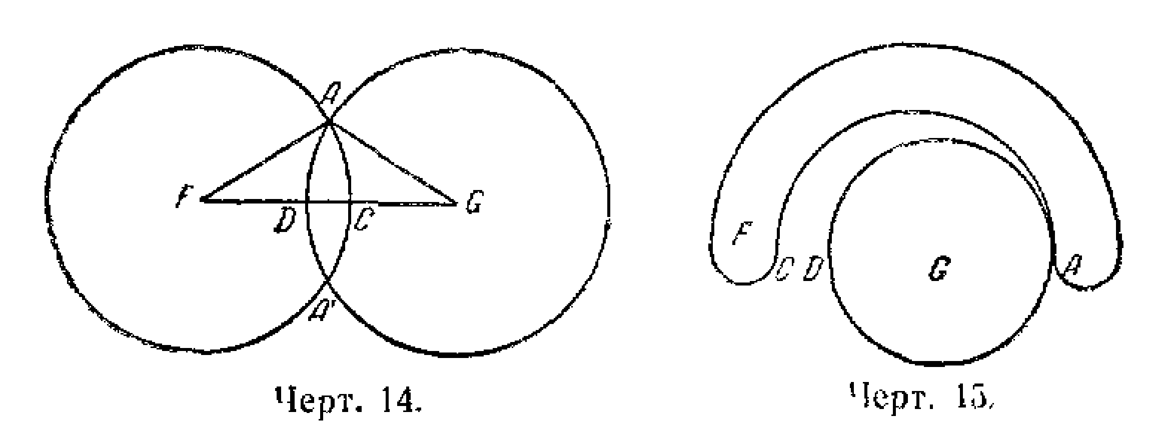
Относительно самого доказательства предложения 12 можно сделать те же замечания, что и относительно 11. Приведённое в тексте Гейберга доказательство имеет силу лишь в том случае, когда оба центра F, G и точки пересечения C, D расположены в порядке $FCDG$ (черт. 13), а не в порядке $FDCG$ (черт. 14), т. е. точка C левого круга не лежит внутри правого и обратно. Если бы это имело место, то, поскольку A есть точка внешнего касания, оба круга должны были бы пересекаться между A и C, т. е. иметь, кроме A, ещё вторую общую точку. Далее, на основании III 8 мы доказали бы, что оба круга должны иметь ещё общую точку A' — симметричную относительно линии центров, что будет противоречить III 10.

Далее рассматриваемое доказательство предполагает, что точки F, A, G образуют треугольник [Хиэс (Heath), II, стр. 29]; если бы эти три точки лежали на одной прямой (черт. 15), то

для внешнего круга радиус FC оказался бы равным FA, что невозможно.

Предложения 11, 12 могут быть формулированы так: если два круга не пересекаются, а касаются, то прямая, соединяющая их центры, проходит через общую точку. Обратная этой теореме будет: если прямая, соединяющая центры кругов, проходит через общую их точку, то они не пересекаются, а касаются в этой точке.

Противоположная теорема: если два круга не касаются, а пересекаются, то прямая, соединяющая их центры, не проходит через общую точку.



Черт. 14. Черт. 15.

Обратная противоположной: если прямая, соединяющая центры, не проходит через общую точку, то круги не касаются, а пересекаются. Последняя теорема легко доказывается на основании предложения 20 книги I.

Подробный разбор предложений 11 и 12 делает излишними комментарии к предложению 13, которое по существу уже предполагается при доказательстве предложения 11.

15. Равенство прямоугольных треугольников. Интересно отметить, что Евклид обходится без теоремы о равенстве прямоугольных треугольников при равенстве их гипотенуз и одной пары катетов. Теорема эта непосредственно не вытекает ни из 4, ни из 8, ни из 24 предложения книги I.

Мы доказываем эту теорему на том основании, что наклонные, дальше отстоящие от перпендикуляра, больше ближе отстоящей (т. е. что та больше, у которой больше проекция), причём основываясь на предложении 16 книги I.

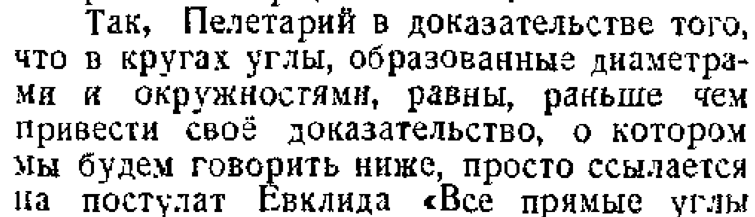
Почему это положение ускользнуло от Евклида, почему он предложение 14 доказывает не так, как мы его доказываем на основании равенства прямоугольных треугольников, а призывает на помощь теорему Пифагора?

Следует обратить внимание на то, что *абсолютная* теорема верная, как показал Феодосий, на сфере, здесь доказывается с помощью теоремы Пифагора, то-есть с помощью аксиомы о параллельных.

16. Спор Клавия с Пелетарием. Полемика между Клавием [14]) и Пелетарием [15]) (Пелетье) об угле касания, т. е. об угле, образуемом касательной с окружностью в точке касания, даёт богатый материал для характеристики мышления математиков XVI в.

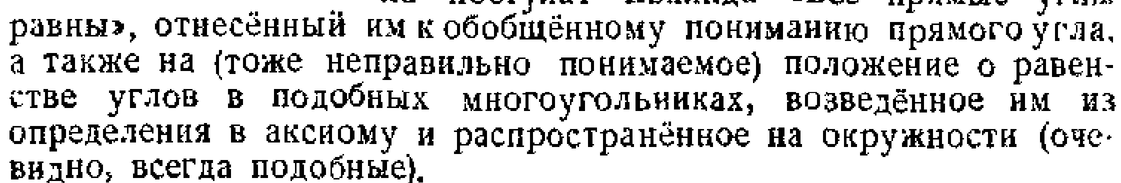
Собирание упущенных Евклидом очевидных истин без всякой попытки исследования их зависимости или независимости между собой — это дело рационалистов XVII в., которые относились несравненно *более критически* к Евклиду, чем математики XVI в., и у которых на месте Euclides Commentatus (Евклид комментированный) выступает Euclides restitutus (Евклид восстановленный).

У математиков XVI в. *вера в авторитет* сохраняется как наследие средних веков. Система евклидовых аксиом у них остаётся неизменной или же подвергается только небольшим дополнениям. Эта черта в соединении с тенденцией чисто схоластической порождает неправильные толкования положений Евклида в более широком и более желательном для схоластического настроения спорщика смысле.



Черт. 16.

Так, Пелетарий в доказательстве того, что в кругах углы, образованные диаметрами и окружностями, равны, раньше чем привести своё доказательство, о котором мы будем говорить ниже, просто ссылается на постулат Евклида «Все прямые углы равны», отнесённый им к обобщённому пониманию прямого угла, а также на (тоже неправильно понимаемое) положение о равенстве углов в подобных многоугольниках, возведённое им из определения в аксиому и распространённое на окружности (очевидно, всегда подобные).



В этом отношении особенно характерно доказательство Пелетария той же проблемы с помощью параллельных пересечённых прямой.

«*Прямая*, — *говорит* Пелетарий, — пересекающая две параллельные, делает с ними равные соответственные углы.

И в настоящем случае (когда имеем две окружности с общим центром *AC* и *BD*) *OB* пересекает *параллельные* (но уже не прямые, а окружности) (черт. 16). Так что соответствующие углы *CAO* и *DBO* равны».

Ошибку Пелетария отмечает Клавий, но и сам делает аналогичную ошибку, приписывая Евклиду обращение аксиомы 8 книги I (часть меньше целого).

---

[14]) Clavius, Elementa Euclidis, Romae, 1574.

[15]) Peletarius, Elementa Euclidis, 1557. См. о нём Cantor, т. 2, стр. 533 и Montucla, т. I, стр. 504.

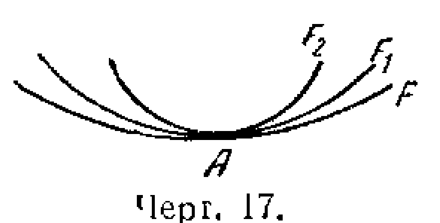
Мы уже отметили, что скрытым образом это обращение имеет место и у Евклида, но только для *прямолинейных* углов и отрезков.

Клавий это положение распространяет и на *смешанные* углы, образованные окружностью и прямой, и старается с помощью аргументов, основанных на этом положении, разбить противника.

Пелетарий доказывает, что в кругах углы, образованные диаметром с окружностью, равны. Угол касания, по Пелетарию, *не представляет величины*.

Над ним невозможны те операции, которые предполагают понятие величины.

Он видимо соглашается с тем, что все углы суть величины, но настаивает на том, что угол касания не угол. Всякий угол, говорит он, получается в сечении линий, а не в касании. Заставляя прямую AC вращаться около точки кривой A, он старается убедить в том, что в момент совпадения этой прямой с касательной в точке A мы должны говорить об *исчезновении* угла между прямой и окружностью.



Черт. 17.

Иначе думает Клавий, для которого угол состоит из одной точки и наклонённых линий (безразлично прямых или кривых), которые не имеют одного направления, как это ясно из евклидова определения угла. Но Клавию приходится обобщать понятие величины, может быть и незаметно для себя, принимая за величины и те, которые не удовлетворяют постулату Архимеда.

Пелетарий выдвигает доказательство, основанное на следующем свойстве величин вообще: «*Если две величины A и B меньше X, причём X может быть как угодно мало, то A и B равны*».

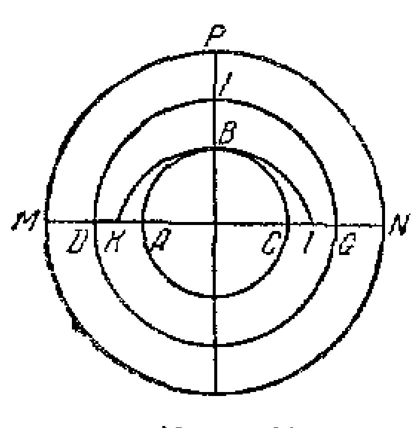
Он доказывает равенство двух углов, образованных окружностями $[(AF_1, AF_2)(AF_2, AF)]$, т. е. равенство части целому и поэтому утверждает, что такой смешанный угол *не имеет частей*, а потому не представляет величины; то же, конечно, относится к углу касания (черт. 17).

Для противников Пелетария это рассуждение представлялось неубедительным; им представлялось вполне возможным, чтобы род величин Ω разделялся на два вида: Ω_1 и Ω_2 таких, чтобы между величинами вида Ω_1 были отношения: меньше, равно, больше, и чтобы все величины Ω_1 были меньше сколь угодно малой величины вида Ω_2 и примером приводили именно род угла, делящегося на виды: углы касания, прямолинейные и смешанные углы.

Последняя точка зрения вполне отвечает канторовской точке зрения на *актуально-бесконечное* число, по которой первое *трансфинитное* число больше чем всякое конечное число и при этом между трансфинитными числами имеют место отношения: меньше, равно, больше.

Характерно ещё доказательство Пелетария равенства углов в полуокружности, влекущее за собой равенство углов касания и исключение их вследствие этого из класса величин.

Взяв два концентричных круга *ABC* и *DIG*, он замечает, что угол, образованный окружностью *ABC* и её диаметром, не может быть больше угла, образованного окружностью *DIG* с тем же диаметром, а только ему равен или меньше. В этом Пелетарий убеждает, *подвигая DIG так, чтобы он* коснулся *ABC* (черт. 18).



Черт. 18.

Если теперь *DIG* больше *ABC*, то то же имеет место для любого большего концентричного с первыми двумя круга *MPN*.

В результате для некоторого круга достаточно большого радиуса мы, по мнению Пелетария, получили бы противно Евклиду угол *b* полуокружности больше прямого.

Здесь упущена возможность *асимптотического* возрастания до определённого значения, не превосходящего прямой угол. Но в то время исследование изменения одной величины в зависимости от другой было совершенно непривычным делом.

17. Неделимое и угол касания[16]. Чем же являются углы касания у Клавия? Это величины, которые можно складывать и вычитать. Удвоение угла касания даёт больший угол, удвоение которого даёт ещё больший и т. д. Если же мы возьмём угол касания α и острый прямолинейный угол β, то прибавляя к α ещё α и т. д., мы никогда не получим величины большей β.

---

[16]) Cardanus, De subtilitate, 1550, 1554, 1560, кн. 16. стр. 980 в его Opera. О нём Cantor, т. II, стр. 484, Montucla, т. I, стр. 511. — Vietae, Opera, стр. 386, гл. 13, 14, 16, 18. — Camilli Gloriosi, Exercitationum mathematicorum, Neap., 1639. Parere di Galileo Galilei intorno all angolo del contacto scritte a Gio Camillo Glorioso Math., Neapoli, 1635. Opere di Galileo Galilei, Milano, 1811, т. 10, стр 281. — Taquet, Elementa Geometriae planae ac solidae, Antverp., 1654. Amst. 1683. Schol. III, 16, стр. 84—93 (против Клавия). — Franc Xaveri Aynscom, Expositio ac deductio Geometricae quadraturarum coram R. Gregorii S. Vincentio... Antverp., 1656 (против Клавия). — Wallisius, De angulo contactus, 2, Operum mathem. Oxoniae, 1691, стр. 631—664. — Defensio tractatus de angulo contactus et semicirculo, 1685. О нём Cantor, т. III (I), стр. 26. — Leotardi, Cyclometria... in qua anguli contigentiae natura explicatur, Lugduni, 1663 (за Клавия против Валлиса). — Leibnitius, Meditationes de natura anguli contactus et osculi. Werke VII, стр. 326—329. De Geometria recondita et analysi indivisibilium at infinitorum, Werke V, стр. 226—283.

Таким образом, эти величины *не подчиняются постулату Архимеда*, по которому для всяких двух величин a и b можно найти такое n, что $na > b$.

Определение 4 книги V «Начал»: «величины называются имеющими отношение одна к другой, если, будучи взяты кратно, могут быть больше одна другой» — Клавием разъясняется в следующем смысле.

Отношения могут иметь только такие величины, которые удовлетворяют постулату Архимеда. Поэтому отношение может быть между двумя прямолинейными углами, но не может быть между прямолинейным углом и углом касания.

Угол касания — это *отец неделимого* XVII в. и дед потенциально-бесконечно малого XIX в.

Ему присущи свойства неделимого:

1) С помощью конечного числа сложений из него нельзя получить конечного угла (смешанного угла, не отвечающего случаю касания).

2) Он *является низшей границей для частей деления непрерывной величины*.

Но у Кардана и Клавия эти величины *делимы* и вполне подчиняются аксиомам 1 и 2 книги I «Начал» Евклида.

Если ω угол касания, то

$$a + \omega > a, \quad a + 2\omega > a, \ldots$$

Но если b какой-нибудь другой конечный угол, то

$$a + \omega < b, \quad a + 2\omega < b, \ldots$$

Признать ω за величину с отнесением к классу величин вместе с a и b Клавий смог, только *обобщив* понятие величины, приняв может быть и незаметно для себя за величины и величины *неудовлетворяющие постулату Архимеда*.

Но то же мог бы сделать и Пелетарий.

Он мог бы тоже при своей точке зрения назвать угол касания *величиной* и оперировать над классом величин, объемлющим и угол касания. Но при этом он должен был бы признать:

1) *неделимость* углов касания и

2) невозможность заключения из равенства $a + \omega = a$, что $\omega = 0$, вместе с необходимостью вывода из $a + \omega = b$, что $a = b$.

Действительно, по Пелетарию угол касания неделим, далее, углы, образуемые диаметром с окружностью, равны, хотя и отличаются между собой.

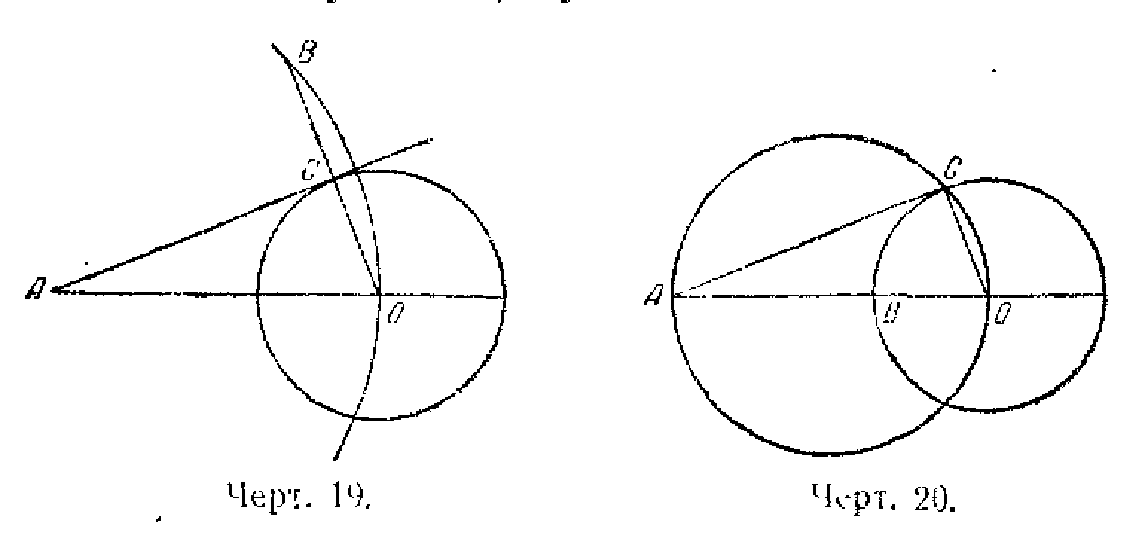
Для позднейших математиков *исчезновение бесконечно малого перед конечным* это тот принцип[17]), который являлся

[17]) Keplerus, Nova stereometria doliorum, 1615, Opera omnia, т. IV, стр. 537. Есть русский пер. Cantor, Vorles., т. II, стр. 750 — Cavalieri, Geometria indivisibilium promota 1635 (1653). Есть русский пер. Лурье, 1939. Exercitationes Geometricae, 1647. Wallisius. Arithmetica infinitorum, Opera Math. Oxoniae, т. I, стр. 1647. — Klügel, Mathem. Wörterbuch; Cavalleri Methode.

главным рычагом математической техники исчисления бесконечно малых величин до Ньютона [18]).

Корни свои эта идея опускает в метафизику. Уже в начале XVIII в. Х. Вольф [19]) так формулирует этот принцип: величина бесконечно малая в отношении конечной принимается за *ничто*. Две величины с бесконечно малой разностью принимаются за равные.

18. Проведение касательных к кругу. В современных учебниках касательная к кругу строится иначе. Из A описывается круг радиуса AO, из O он засекается в точке B радиусом, равным диаметру данного круга. Полученная точка B соединяется с O прямой BO, пересечение которой с данной ок-



Черт. 19. Черт. 20.

ружностью даёт точку касания C, так что AC будет искомой касательной (черт. 19).

В учебниках лежандрова типа употреблялось такое построение.

На AO как на диаметре описывается круг, тогда AC как перпендикулярная к OC будет касательной (черт. 20).

Это решение (неправильно приписываемое Финку (1583)) находится у Клавия [20]).

Проективная геометрия даёт возможность решать эту задачу с *помощью одной линейки*.

Проведя через A две прямые, пересекающие круг в точках B, C и D, E, соединяем точки пересечения P, Q прямых (EB, DC) и (DB, EC); прямая PQ будет полярой точки A; её пересечения с окружностью M и N дадут точки касания; AM и AN будут искомыми касательными (черт. 21).

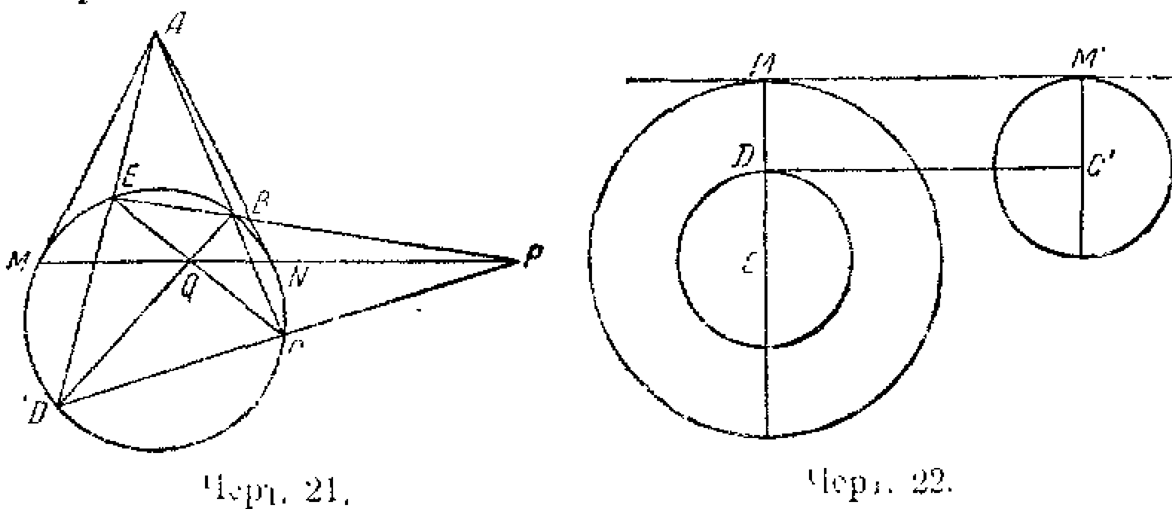
---

[18]) Ньютон, Математические работы, пер. и коммент. Д. Мордухай-Болтовского, 1937.

[19]) Ch. Wolfius, Elementa Matheseos Universae, 1730.

[20]) Clavius, см. прим. 14.

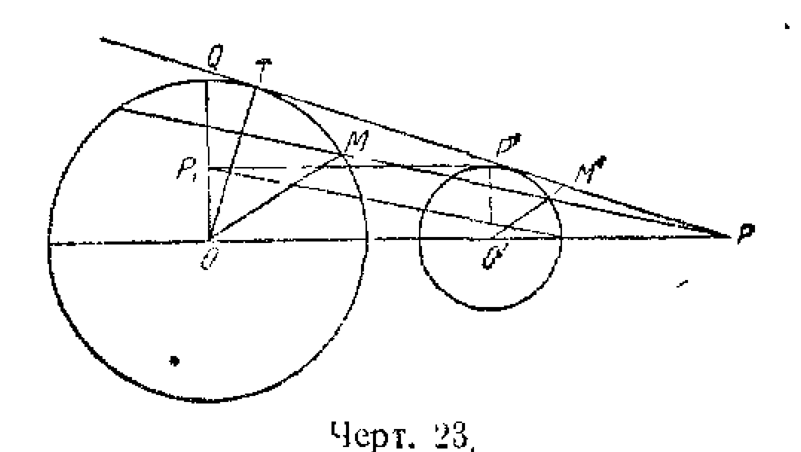
Это построение было указано ещё Григорием Сан-Винценто[21]) в 1647 г. и де-ля Хиром[22]) в 1679 г. Проведение касательных, параллельных данной прямой, впервые встречается у Пелетария.



Черт. 21. Черт. 22.

19. Проведение касательных к двум кругам. Проведение касательной к двум кругам мы сводим к построению касательной из центра C' меньшего круга к кругу концентричному большему с радиусом CD, равным разности $CM - C'M'$ радиусов данных кругов (черт. 22).

Существует другое построение, которое восходит к Паппу (черт. 23).



Черт. 23.

Проводя из центров кругов параллельные радиусы $OM \parallel O'M'$, определяем центр подобия P в пересечении MM' с OO' и из P проводим касательную PT к одному из кругов.

---

21) Gregorio a. S. Vincentio, Opus Geometricum de quadratura circuli, Antverp., 1647.

22) De la Hire, Nouveaux éléments des sections coniques et des lieux géométriques, Paris, 1679.

Интересно отметить, что первый из математиков эпохи Возрождения Кардан[23]), решающий эту задачу, поступает иначе. Он восставляет OQ перпендикуляр к OO' и откладывает угол $\angle QOT = \angle P_1O'O = \angle P'P_1O'$, под которым виден радиус малого круга из центра большего (черт. 23).

Учение о центрах подобия развивается Чевой, а затем Риккати, Эйлером[24]).

20. Тангенциальные проблемы. Проблемы более сложные о проведении кругов, касательных к прямым и кругам, были разрешены ещё Аполлонием[25]) в его не дошедшей до нас работе, с которой знакомит нас Папп. Работа эта восстановлена была Виетой.

Решение задач Аполлония можно найти в руководствах по геометрическим построениям, например, у Адлера.

Перечислим задачи, разрешаемые Аполлонием.

1) Найти круг, проходящий через две данные точки, касающийся данного круга.

2) Найти круг данного радиуса, проходящий через данную точку и касающийся данной прямой.

3) Найти круг данного радиуса, проходящий через данную точку, касающийся данного круга.

4) Найти круг, проходящий через две данные точки, касающийся данного круга.

5) Найти круг, касающийся трёх данных прямых.

6) Найти круг, проходящий через данную точку, касающийся двух данных прямых.

7) Найти круг, касающийся двух данных прямых и данного круга.

8) Найти круг, касающийся двух данных кругов и данной прямой.

9) Найти круг, проходящий через данную точку, касающийся двух данных кругов.

10) Найти круг, касающийся трёх данных кругов.

Решения Виеты сильно отличаются от современных. В основе их лежит теорема: если из общей двум окружностям точки A проводятся прямые AEB, AFD, пересекающие их в (E, F) и (B, D) и при этом $EF \parallel BD$, то в точке A окружности касаются друг друга (черт. 24).

История последней аполлониевой проблемы о построении круга, касательного к трём заданным кругам, очень интересна.

Адриан Романус (1561—1615) решает задачу с помощью пересечения двух гипербол, от которых освобождается в своём

---

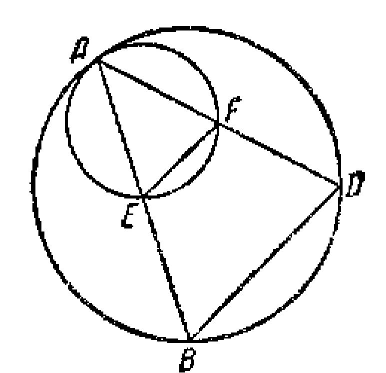
[23]) Cardanus, Opera, 1667.

[24]) Eulerus, De centro similitudinis, Nova Acta Petropolitana, 9, 1791, стр. 154.

[25]) Apollonius, De tactionibus, Pappus, Collectiones, кн. VII, стр. 82. Реконструкция Виеты (Vieta, Apollonius Gallus) и у Camerer'a (Apollonii de tactionibus quae supersunt. Gothae, 1795).

решении Ньютон. Кроме Вчеты и Романуса, задачей занимаются Декарт[26]), Эйлер[27]) и Понслэ[28]).

Решения Жергонна и Бобилье можно найти в известном учебнике Рушэ и Комберусс[29]).



Черт. 24.

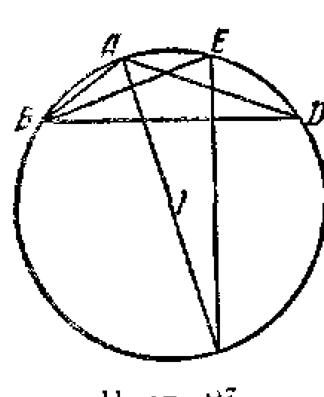
С геометрической точки зрения лучшим оказывается решение Манхейма.

Понслэ в своих Applications d'Analyse et de Géométrie даёт несколько решений задач Аполлония.

21. Выгнутые углы. По поводу предложений 20, 21 о вписанных углах можно сделать ряд замечаний.

Равенство углов в сегменте Евклид устанавливает только для сегмента, ограниченного дугой больше полуокружности. Комментаторы рассматривают случай, когда дуга меньше полуокружности. Дело в значительной мере упрощается, если ввести понятие о выгнутом угле *AOB* наряду с обыкновенным *BOA* (что и делает Аустин).

Но понятие о таком выгнутом угле, измеряемом дугой больше 180°, совершенно не вяжется с евклидовым определением угла (определение 8 книги I) как *наклонения*. Такое понятие может возникнуть только при бертрановском (или арнольдианском) понимании угла как неопределённой части плоскости, ограниченной двумя пересекающимися прямыми, или угла как *меры* поворота. Ко *времени Симсона* обе эти точки зрения уже проводились. Симсон прямой *AI*, проведённой через центр, разделяет вписанный угол (безразлично больший или меньший прямого) на две части, из которых каждая опирается на дугу, всегда меньшую полуокружности (черт. 25).



Черт. 25.

Следует ещё отметить, что в настоящее время глава о вписанных углах помещается позже измерений, связанных с понятием отношения.

Предложение 20 формулируется как теорема об измеряемости вписанного угла половиной дуги, на которую он опирается, в то время как центральный угол измеряется всей дугой.

---

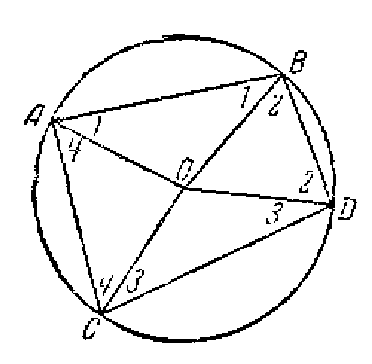
[26]) Descartes, Géométrie, 1637. Русский пер. А. П. Юшкевича, 1939.

[27]) Eulerus, см. прим. 24.

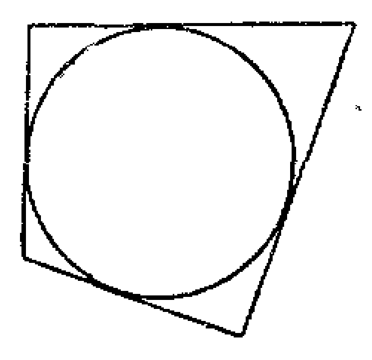
[28]) Poncelet, Traité des propriétés projectives, Paris, 1822.

[29]) Rouché et Comberousse, Traité de géométrie élémentaire, Paris, 1866.

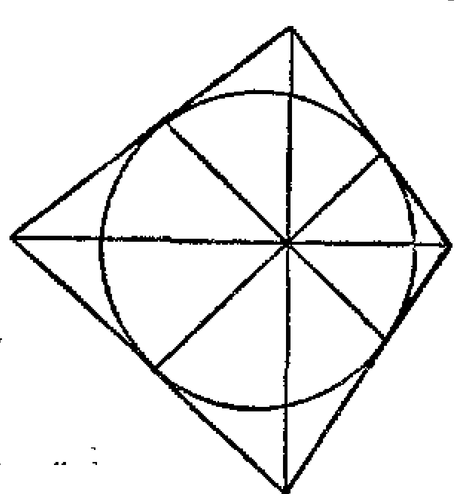
22. Вписанный и описанный четырёхугольники. Теорема Евклида о вписанном в круг четырёхугольнике легко обращается в обратную теорему о том, что всякий четырёхугольник, у которого сумма противоположных углов равна $2d$, может быть вписан в круг; доказательство можно найти в современных элементарных геометрических учебниках.



Черт. 26.


Черт. 27.

Теорема о вписанном в круг четырёхугольнике доказывается Евклидом с помощью аксиомы о параллельных. Не используя её, мы можем лишь доказать то, что сумма одной пары противоположных углов равна сумме другой пары, что легко видеть из прилагаемого чертежа, в котором все треугольники OAB, OAC, OCD, OBD равнобедренные (черт. 26).


Черт. 28.

$$\angle B + \angle C = (1+2) + (4+3),$$
$$\angle A + \angle D = (1+4) + (2+3).$$

Эта теорема *абсолютная* и переносится на сферу.

Теорема Евклида о *вписанном* четырёхугольнике восполняется теоремой, отмеченной впервые Пито (1695—1777) об *описанном* четырёхугольнике.

В каждом описанном четырёхугольнике сумма одной пары противоположных сторон равна сумме другой пары (черт. 27).

Вписанный и описанный четырёхугольники сыграли в истории геометрии важную роль.

Из *метрических* теорем следует отметить теорему Птолемея о том, что произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Из *зрительных* следует отметить теорему Ньютона (являющуюся случаем вырождения теоремы Брианшона об описанном четырёхугольнике) (черт. 28); она читается так:

Диагонали описанного четырёхугольника и прямые, соединяющие точки касания, проходят через одну точку.

Клавий, Такэ и другие выводят из предложения 20 Евклида невозможность вписания в окружность параллелограмма (понимая последний в евклидовом смысле, т. е. не прямоугольник).

23. История смешанных углов [30]. В книге III «Начал» Евклида имеются две интересные загадки: определения 7 и 8.

Согласно определению 7 *угол сегмента есть угол, который заключается между прямой и обводом круга.*

Этот смешанный угол не следует смешивать с *углом в сегменте*, о котором говорится в определении 8.

Согласно последнему *угол в сегменте есть угол, который образован двумя прямыми, проведёнными от точки на обводе сегмента к концам прямой, служащей основанием сегмента.*

Согласно определению 11 *«подобные сегменты суть сегменты, вмещающие равные углы, или сегменты, в которых углы равны друг другу».*

Но ни в одном из своих доказательств Евклид не пользуется *смешанным* углом.

Теорему 24 — подобные сегменты равны на равных прямых — Евклид доказывает на основании теоремы 23 (на той же прямой и по ту же сторону не могут быть построены два сегмента подобные и неравные).

Весьма вероятна следующая гипотеза.

Сперва определением подобия сегментов было следующее: «которые имеют равные углы», соответственно определению подобия в книге VI «Начал» Евклида.

Теорема 24 о равенстве подобных сегментов на равных прямых доказывалась наложением (вроде предложения 4 книги I), причём как в предложении 4 для прямолинейных углов, так и здесь для смешанных применялась аксиома 7 книги I: «совмещающиеся равны между собой», т. е. при равенстве углов постулировалась возможность их совмещения.

Возражения против очевидности такого совмещения и вынудили произвести изменение, поставив на место определения (см. вторую часть определения 11) то, что раньше являлось теоремой, непосредственно вытекающей из упомянутого положения.

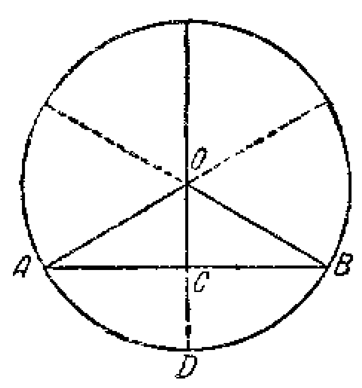
Одним словом, по моему мнению, определение 7 это *рудимент*, свидетельствующий о прошлой истории книги III «Начал» Евклида. Взгляд Виванти, что евклидово определение угла относится только к прямолинейному, и намёк на смешанные углы есть позднейшее прибавление, следует признать неверным.

---

[30]) Виванти, Понятие о бесконечно малом и его приложения. Математическое Образование.

Первая часть определения 11 тоже рудимент, но подвергшийся некоторому перерождению, затушевавшему его прежнюю историю.

До Евклида смешанный угол пользовался всеми правами, но евклидова строгость в доказательствах, вызванная софистической логикой, изгнала его из геометрии. Схоластическая мысль вернула его на сцену, чтобы через сто лет он снова сошёл со сцены и на этот раз видимо уже на очень долгое время.



Черт. 29.

Смешанный угол последний раз выплывает в борьбе математиков рационалистов против доказательств *наложением*.

Арзе[31]), стараясь избегнуть метода наложения, развивает доказательство теоремы 5 книги 1, даваемое Аристотелем (Analyt. prior. 1, 23, 416, 13—22).

Доказательство, приводимое Аристотелем, основано на двух аксиомах (черт. 29).

1) О равенстве двух углов сегмента ABD

$$\angle DAC = \angle DBC;$$

2) о равенстве углов полуокружности

$$\angle DAO = \angle DBO.$$

Помещая равнобедренный треугольник в круг радиуса $OA = OB$, мы сейчас же получаем

$$\angle OAC = \angle DAO - \angle DAC;$$
$$\angle OBC = \angle DBO - \angle DBC$$

и по аксиоме 3 Евклида:

$$\angle OAC = \angle OBC.$$

24. Типы апагогических доказательств[32]). Положением 27 заканчиваются апагогические доказательства книги III. Но в других книгах Евклид продолжает широко ими пользоваться.

Апагогическое доказательство[33]) отличается от прямого тем, что оно, наряду с математическими, пользуется и *логической аксиомой*, которой не пользуется прямое,

---

[31]) Arzet, Clavis Mathematica, 1634; Aristoteles, Opera, ed. Didot. Analytica Priora, кн. I.

[32]) Lambert, Neue Organon, т. I, 1764.

[33]) Об апагогических доказательствах см. также Ch. Wolff, Logica, § 356.— Д. Мордухай-Болтовской, О ненатуральных и апагогических доказательствах, Математическое Образование, 1929.

Всякое апагогическое доказательство предполагает приложение *закона исключённого третьего* (tertium non datur): имеет место только «*A*» или «не *A*».

Следует доказать «*A*». Предполагается, что имеет место «не *A*» и отсюда выводится абсурд — отрицание верного положения «*C*» — «не *C*». Таким образом, уже в начале доказательства утверждается альтернатива: «*A*» или «не *A*» и ничего третьего.

Обратно, если в начале или в самом ходе доказательства применяется закон исключённого третьего, то или доказательство ведётся от противного, или такое доказательство содержится в доказательстве как составная часть.

В самом деле приложение его предполагает в начале или в ходе доказательства альтернативу: «*B*» или «не *B*», и снятие одного члена альтернативы путём доказательств его невозможности.

Если снимается «не *B*» тем, что «не *B*» приводит к «не *C*», к отрицанию заведомо верного положения, то можем сказать, что положение доказывается апагогически. Если снимается *B*, то имеем апагогическое доказательство в замаскированной форме. Заменой *B* через (не *B*) мы получаем его в чистой форме: «не *B*» доказывается приведением «не (не *B*)» к «не — *C*» (абсурду).

Получаемый в конце апагогического доказательства абсурд может быть трёх родов:

1) Противоречие с уже признанной аксиомой (Quod est absurdum) или с уже доказанным положением или определением.

2) Противоречие с условием теоремы. Quod, contra propositionem est demonstratum.

3) Противоречие со сделанным предположением. Quod fieri nequit.

Чтобы яснее и глубже вникнуть в конструкцию каждого из этих типов доказательств, мы ограничимся рассмотрением только *простых* апагогических доказательств с *единичным* приложением закона исключённого третьего в самом начале:

Доказать *A*: предположим «не *A*» ⟶ абсурд. Первый тип является типом *разомкнутого* доказательства.

Если принять обозначение

«Если *B*, то *A*» через «*B*, *A*»,

то можно для первого типа наметить схему

B, *A*; «не *A*»; ⟶ не *C*.

В «Началах» Евклида пример такого простого *разомкнутого* доказательства даёт приложение 27 книги I: о параллельности при равенстве накрестлежащих углов. Отрицание приводит к *противоречию с теоремой* о внешнем угле треугольника (16_{I}, т. е. предложение 16 книги I).

К этому же типу принадлежит предложение 10 книги III о пересекаемости кругов не более, чем в двух точках. Отрицание приводит к противоречию с предложением 5 книги III о не существовании у пересекающихся кругов общего центра.

Доказательство предложения 12 приводит к противоречию с 20_{I}, первая половина 16 с 17_{I}, 23 с 16_{I}, 24 с 10_{III}.

Примеров простых разомкнутых доказательств, приводящих к отрицанию аксиом, очень много.

У Евклида обычно такой аксиомой является 8 книги I: «целое больше части» (или вернее «меньшее не больше большего»), причём доказательство носит полуинтуитивный характер.

Таковы доказательства предложения 2_{III} о том, что прямая, соединяющая две точки окружности, лежит внутри круга, предложения 5 о том, что два пересекающихся круга не имеют общего центра, предложения 6 (тоже для касающихся кругов), 11 о прохождении линии центров через точку касания кругов и, наконец, 18 и 19.

Следует отметить здесь предложение 36 книги VII о том, что наименьшее число, содержащее простые числа A, B, есть произведение $A \times B$ — отрицание приводит к тому, что меньшее число содержит большее; к тому же приводит и отрицание предложения 1 книги VIII.

У Евклида часто противоречие оказывается с *определением*. По существу это доказательство мало отличается от того, в котором противоречие упирается в аксиому, ибо, как мы видели, определения Евклида, логически действующие, представляют только *более очевидные аксиомы*.

Противоречие с определением прямого угла имеем в 16_{III} с определением круга в 18_{III}.

Второй тип апагогического доказательства — *замкнутый на условии* B, A; B, «не A» $\rightarrow$ «не B».

Если B, то A. Полагаем, что при B «не A», и выводим, что тогда обязательно имеет место не B, что противно условию.

Пример (предложение 25 книги VII). Если два числа взаимно просты, то число, содержащееся в одном из них, будет взаимно простым с другим.

Отрицание приводит к признанию данных чисел не взаимно простыми.

Такова часть доказательства 13_{III} предложения — в первой части имеем противоречие с *определением*, во второй противоречие с *условием*.

Третий очень редкий тип — *замкнутый на заключении*; здесь могут быть два вида:

Первый вид:

$$B,\ A \rightarrow B, \quad \text{«не } A\text{»} \rightarrow A.$$

Этот тип встречается у Евклида *только один раз*, а именно, в доказательстве предложения 12 книги IX «Начал».

«Дано несколько непрерывно пропорциональных чисел, A, B, C, D; я утверждаю, что всякие простые числа, делящие D, будут делить и A».

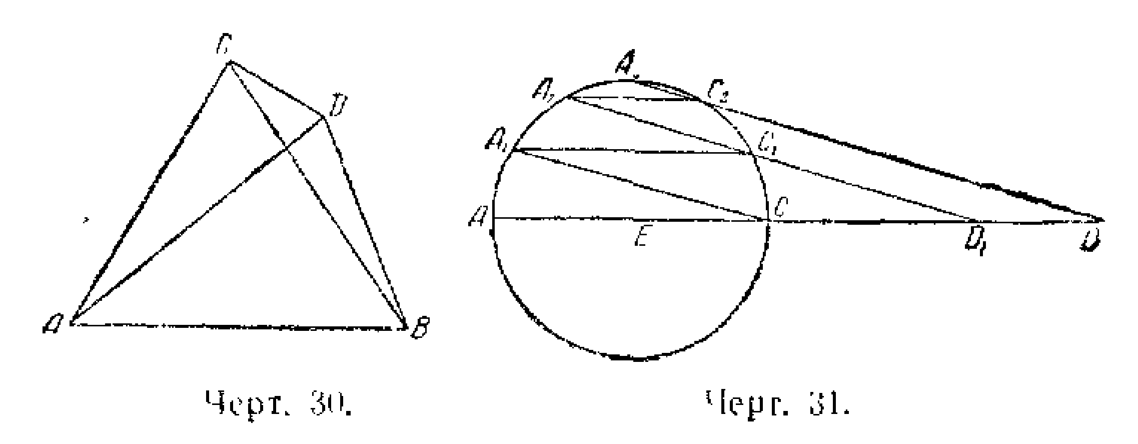
Говоря современным языком — даны члены геометрической прогрессии

$$1:A = A:B = B:C = C:D.$$

Следует доказать, что E простой делитель D, делит также и A.

Евклид предполагает противное, что *E не делит A* и опровергает это предположение выводом из него, что *E делит A*.

Этот редкий приём употребляется и Саккери в его «Euclides ab omni naevo restitutus» при его попытке доказать постулат 5.



Черт. 30. Черт. 31.

Саккери принимает 26 первых предложений «Начал», допускает *предположительно* ложность 5 постулата и старается вывести для этого положения верность этого постулата.

Второй вид: *замкнутый не в начале.*

Из не A извлекаются двумя путями *два противоположных заключения*: E и «не E».

Схема его:

$$B \longrightarrow \text{не } A \longrightarrow E,$$
$$B \longrightarrow \text{не } A \longrightarrow \text{«не } E\text{»}.$$

Пример: предложение 7 книги I. Если концы прямой AB соединить с точками C и D по одну её сторону, то расстояния CA и CB точки C от A и B не могут быть равны каждое каждому расстояниям DA и DB точки D от A и B (черт. 30)·

$$AD = AC, \quad \angle ACD = \angle ADC, \quad \angle BCD < \angle BDC;$$
$$\angle BDC > \angle BCD,$$
$$BD = DC, \quad \angle BDC = \angle BCD,$$

что противоречит предыдущему.

25. Дуги между параллельными секущими. Теорема о том, что дуги между параллельными секущими равны, принадлежит Паппу

Клавий даёт это положение в виде королларня и, кроме того, отмечает следующее положение из сочинения Кардана «De subtilitate», которое нетрудно будет доказать (черт. 31).

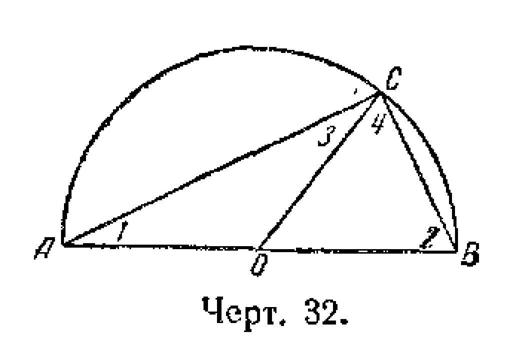
Если разделить окружность на равное число частей

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$$

$$CC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots$$

и провести прямые A_1C, A_2C_1, A_3C_2, то эти прямые вырежут на *диаметре отрезки, равные этим хордам.*

26. Теорема Фалеса. Положение о том, что угол, опирающийся на диаметр, прямой приписывается Фалесу.



Черт. 32.

Оллмэн старается убедить в том, что Фалесу было известно, что сумма углов в треугольнике равна двум прямым. Если это так, то весьма вероятно, что вывод теоремы об угле, опирающемся на окружность, был таков, как это указывает Оллмэн (черт. 32).

Обозначив углы при диаметре через 1, 2, а части угла ACB, на которые он рассекается радиусом OC, через 3, 4, получаем, с одной стороны (по предложению 5 книги I),

$$\angle 1 = \angle 3, \quad \angle 2 = \angle 4;$$

с другой стороны,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2d,$$

или

$$2(\angle 3 + \angle 4) = 2d$$

и, наконец,

$$\angle 3 + \angle 4 = d, \quad \text{т. е. } \angle ACB = d.$$

Ганкелю [34]) представляется более вероятным обратный путь от положения о равенстве угла, опирающегося на диаметр, прямому, к положению о равенстве двум прямым углов в прямоугольном треугольнике, а отсюда к предложению 32 книги I «Начал». Тогда положение об угле, опирающемся на диаметр, должно было быть принято как нечто непосредственно очевидное.

Следует думать, что и другие положения Фалесом не доказывались, а просто показывались на чертеже.

---

[34]) H a n k e l, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig, 1874.

27. Случаи вырождения. Евклид выводит, что $\angle 3 = \angle 1$ на том основании, что согласно предложению 31 $\angle 4 = d$ и потому (по предложению 32 книги I)

$$\angle 1 + \angle 2 = d,$$

но также и

$$\angle 3 + \angle 2 = d.$$

В настоящее время мы замечаем, что

$$\angle ABI = \angle 2 + \angle 3 = d = \frac{1}{2}\, 2d, \quad \angle 2 = \frac{1}{2}\, AOC,$$

$$\angle 3 = \frac{1}{2}(2d - \angle AOC) = \frac{1}{2}\angle COB,$$

т. е. угол, образованный касательной и хордой, равен половине соответствующего центрального угла, а потому равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу.

Это положение с точки зрения *актуально-бесконечно малого* могло рассматриваться как *частный случай* предложения 20. В самом деле, с этой точки зрения касательная мыслилась как секущая, проходящая через две точки с актуально-бесконечно малым расстоянием.

С точки зрения *потенциально-бесконечно* малого, т. е. *предела*, это положение мыслилось как *предельный случай* 20-го или как его *вырождение*.

В основу вывода должен был встать основной принцип теории пределов: *то, что остаётся неизменным при всём изменении переменных* x, y, z, ... *остаётся и в пределе.*

По существу к нему сводится и знаменитый принцип непрерывности Понслэ в первой своей части: *если некоторое положение имеет место, когда некоторые величины* α, β, γ, ... *не равны нулю, бесконечности (или не становятся мнимыми), то положение это верно и в том случае, если эти ограничения сняты.*

Именно с помощью этого принципа мы переходим от предложения 20 к 32.

У Евклида нет теоремы, входящей во все наши учебники о том, что угол, образованный двумя прямыми, пересекающимися внутри круга, равен полусумме центральных углов, опирающихся на те же дуги, и такой же теоремы для случая точки пересечения вне окружности, в которой сумму следует заменить разностью.

Теоремы об углах с одной или двумя касающимися окружности сторонами представляют тоже случаи вырождения и устанавливаются на основании того же принципа непрерывности.

28. Предложение 35. Доказательство этого предложения в издании Гейберга даётся для двух случаев:

1) Когда хорды пересекаются в центре и

2) когда не пересекаются в центре.

В других изданиях Евклида проводится деление на четыре части:

1) Обе хорды совпадают с диаметром.

2) Одна хорда представляет диаметр, другая ей перпендикулярна.

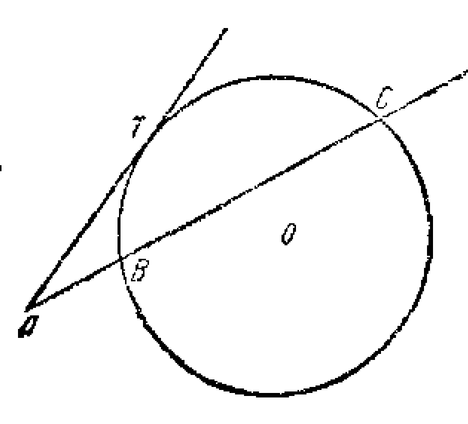
3) Одна — диаметр, другая ей не перпендикулярна.

4) Общий случай.

29. Степень точки. Степенью точки A (внутренней или внешней) называется произведение отрезков $AB \cdot AC$ секущей, проведённой из A к окружности.

Предложения 35, 36 выражают независимость *степени* точки A от направления секущей.

В том случае, если точка внешняя, то $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AT}^2$, где AT — касательная, проведённая из точки A к окружности (черт. 33).



Черт. 33.

С помощью этой теоремы производится построение средней пропорциональной, так как

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AC}.$$

На прямой, проведённой через A, откладываются $AB = a$ и $AC = b$, проводится через B и C какой-нибудь круг, и к нему касательная AT

$$AT = x = \sqrt{ab}.$$

30. Предложение 36 и начало буквенной алгебры. Теорема 36 даёт возможность *геометрического* вывода формулы для решения квадратного уравнения.

Такой вывод делался арабами, а затем европейскими математиками эпохи Возрождения с помощью предложений 28, 29 книги VI.

Но Гетальди[35]) использует для этой цели предложение 36 книги III.

Ознакомимся кстати с символикой буквенной алгебры в её ранней стадии развития.

Как Виета, Гетальди пишет квадратное уравнение $x^2 + bx = c$ в форме

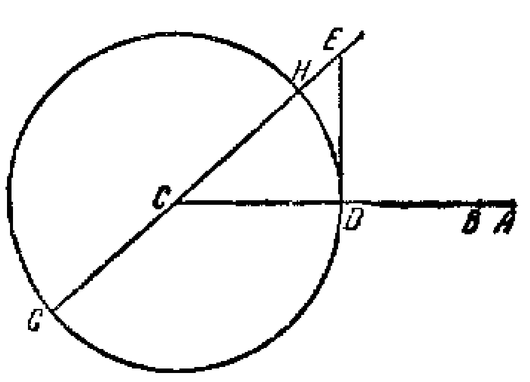
$$AQ + B \text{ in } A \text{ aeq. } ZQ,$$

т. е. A в квадрате (вместо x берётся *гласная* буква) плюс B, умноженное на A, равны Z в квадрате (z берётся в квадрате для однородности членов, что предполагается геометрическим смыслом уравнения).

[35]) Marinus Ghetaldus. De resolutione et compositione mathematica, Romae, 1640.

На прямой CA откладываем CB, равное коэффициенту B (черт. 34); CB делится в D пополам. Описывается из C окружность радиусом CD и проводится $DE \perp CA$, причём откладывается $DE = Z$.

Соединяем E с C и продолжаем EC до пересечения с окружностью в G, так что $CG = CH = \frac{B}{2}$.



Черт. 34.

С одной стороны, на основании предложения 36

$$EH(EH + HG) = ED^2$$

или в обозначении Гегальди

$$AQ + B \text{ in } A \text{ aeq. } ZQ,$$

с другой стороны, длина CE как гипотенуза равна

$$\sqrt{\left(BQ\frac{1}{4} + ZQ\right)},$$

или в нашем обозначении

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + Z^2}$$

и HE aeq $\sqrt{\left(BQ\frac{1}{4} + ZQ\right)} - B\frac{1}{2}$, или в нашем обозначении

$$HE = \sqrt{\frac{1}{4}B^2 + Z^2} - \frac{1}{2}B.$$

31. Доказательство Клавия предложения 36 [36]). Клавий сводит предложение 36 к 35 и ещё к *лемме* (которой нет у Евклида, но которая приводится многими комментаторами), что отрезки секущей между двумя концентричными кругами равны

$$AM = NB$$

и что отрезки касательной между ними равны и делятся точкой касания пополам (черт. 35).

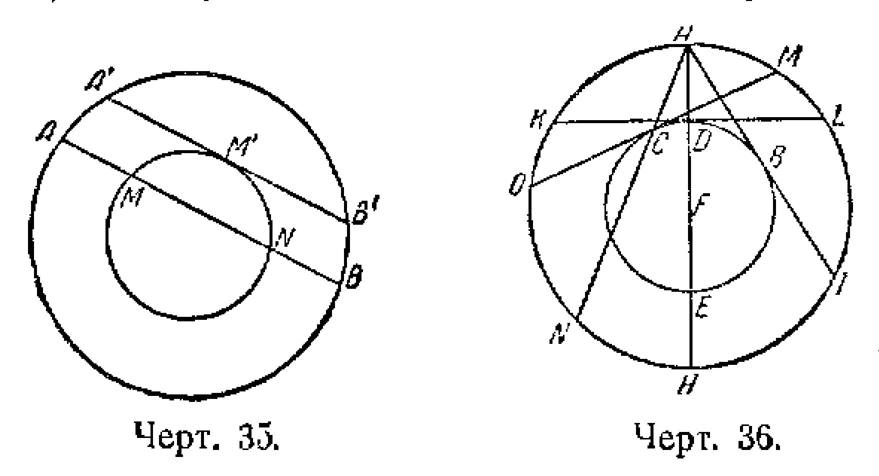
Для приведения предложения 36 к 35, сперва через точки A и центр F круга проводится прямая AH и проводится в D

---

[36]) Clavius, см. прим. 14.

касательная, пересекающая в точках K, L круг, описанный из F радиусом FA (черт. 36).

Тогда, замечая, что $AD=EH$, на основании предложения 35



Черт. 35. Черт. 36.

имеем $AD \cdot DH = KD \cdot DL = AB \cdot BI = AB^2$ и затем $AD \cdot AE = AB^2$.

Дальше, проводя секущую ACN, получаем:

$$AC \cdot AN = OC \cdot CM = KD \cdot KL = AB^2.$$

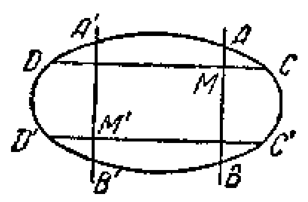
32. Теория траиверсалей [37].

Предложения 35 и 36, можно сказать, являются первой теоремой теории транверсалей, которая получает развитие у Карно [38] и Понслэ.

Ближайшим обобщением этой теоремы является теорема Аполлония о хордах *конического сечения*, по которой (черт. 37)

$$\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = \frac{M'A' \cdot M'B'}{M'C' \cdot M'D'}$$

при условии, что $MA \parallel M'A'$ и $MC \parallel M'C'$, которая имеет очень важное значение в его «Конических сечениях». Эта теорема, в настоящее время отодвинутая на второй план, играет существенную роль в развитии аналитической геометрии конических сечений у Эйлера. Дальнейшим обобщением является теорема Ньютона (для алгебраических кривых вообще), по которой, если кривая пересекается в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ парой прямых, сохраняющих своё направление, то $\frac{MA_1 \cdot MA_2 \cdot \ldots \cdot MA_n}{MB_1 \cdot MB_2 \cdot \ldots \cdot MB_n} = \text{const.}$ и не зависит от положения точки M.



Черт. 37.

[37]) Papelier, Les exercices de géométrie moderne. **Transversales**, Paris, 1912. — Ceva, De lineis rectis se invicem **secantibus statica** constructio.

[38]) Carnot, La géométrie de position, Paris, 1803.

Следующим шагом является теорема Карно.

Пересекая треугольник ABC алгебраической кривой в точках $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots,$ мы имеем

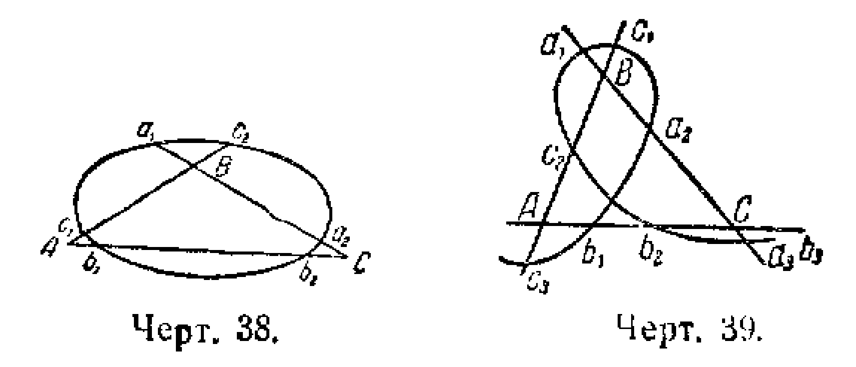
$$\frac{\overline{Ab_1}\cdot\overline{Ab_2}\cdot\ldots\cdot\overline{Ab_n}}{\overline{Cb_1}\cdot\overline{Cb_2}\cdot\ldots\cdot\overline{Cb_n}}\cdot\frac{\overline{Ca_1}\cdot\overline{Ca_2}\cdot\ldots\cdot\overline{Ca_n}}{\overline{Ba_1}\cdot\overline{Ba_2}\cdot\ldots\cdot\overline{Ba_n}}\cdot\frac{\overline{Bc_1}\cdot\overline{Bc_2}\cdot\ldots\cdot\overline{Bc_n}}{\overline{Ac_1}\cdot\overline{Ac_2}\cdot\ldots\cdot\overline{Ac_n}}=(-1)^n$$

(черт. 38, 39).

Частный случай, относящийся к кругу, выводится очень просто на основании положений Евклида. Для этого достаточно перемножить почленно равенства

$$\overline{Ab_1}\cdot\overline{Ab_2}=\overline{Ac_1}\cdot\overline{Ac_2},$$
$$\overline{Ca_1}\cdot\overline{Ca_2}=\overline{Cb_1}\cdot\overline{Cb_2},$$
$$\overline{Bc_1}\cdot\overline{Bc_2}=\overline{Ba_1}\cdot\overline{Ba_2}.$$

Следует отметить, что теория транверсалей развивалась сперва в направлении теории транверсалей *треугольника*.



Черт. 38. Черт. 39.

В основе её лежат теорема Менелая (около 80 г. до н. э.) и теорема Чевы. Первая даёт при пересечении сторон треугольника ABC прямой в точках α, β, γ

$$\frac{\overline{A\gamma}}{\gamma\overline{B}}\cdot\frac{\overline{B\alpha}}{\alpha\overline{C}}\cdot\frac{\overline{C\beta}}{\beta\overline{A}}=-1 \text{ (черт. 40).}$$

Вторая при пересечении сторон прямыми, соединяющими точку O с вершинами в α, β, γ:

$$\frac{\overline{A\gamma}}{\gamma\overline{B}}\cdot\frac{\overline{B\alpha}}{\alpha\overline{C}}\cdot\frac{\overline{C\alpha}}{\alpha\overline{A}}=1 \qquad \text{(черт. 41).}$$

Черт. 40.

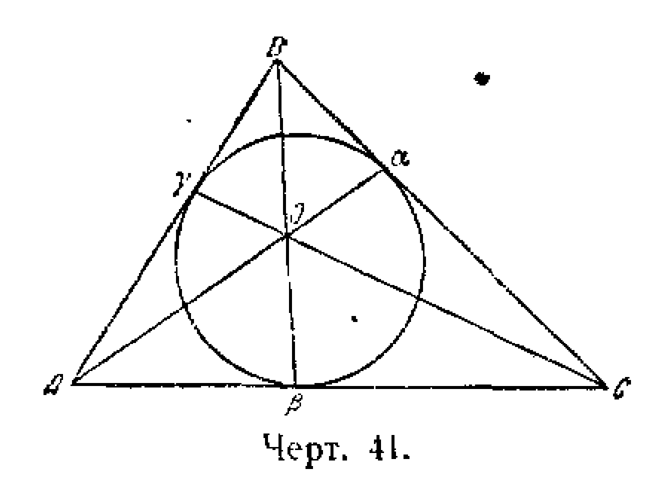
Обе эти теоремы обращаются и дают условия, необходимые и достаточные, чтобы три точки α, β, γ лежали на одной прямой или три прямые $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ пересекались в одной точке.

Обе теоремы выводятся элементарным путём.

Нетрудно видеть, что теорема Менелая представляет частный *случай теоремы Карно (когда алгебраическая кривая первого* порядка).

32. Сферическая геометрия. Некоторые теоремы, а именно, те, которые не зависят от аксиомы параллельных I и III книг, имеют место и на сфере, если вместо прямых брать *большие круги.*

Эти теоремы доказывает Феодосий [39]) *в своих Элементах* сферики.



Черт. 41.

Едва ли Феодосий сознаёт, *почему* ему удаётся найти соответствующие аналогии на сфере, а также и то, что среди предложений книги III остаётся ещё много *абсолютных*, которые могут быть *перенесены на сферу.* К их числу принадлежат предложения книги III: 1—19, 25, 28—30.

При этом 11—12 сливаются в одно, а 15, 26, 27 переносятся на сферу с ограничением, чтобы линии не превосходили $\frac{1}{2}$ большого круга. Но 20, 21, 22, 31—36, как зависящие от аксиомы о параллельных, на сферу уже не переносятся.

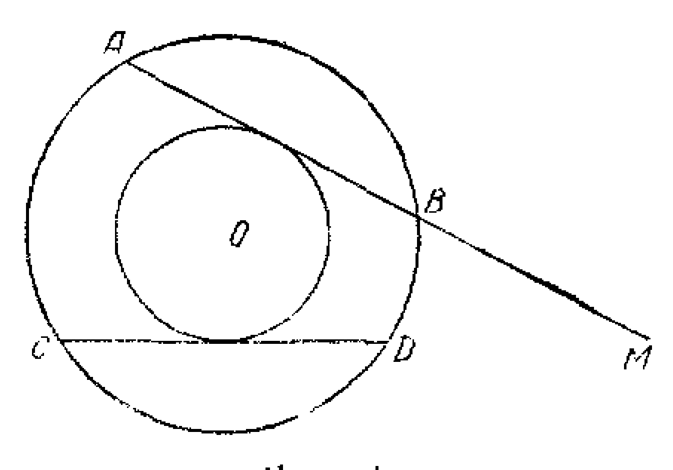
---

[39]) Theodosii, Sphaericorum libri III a Clavio illustrati (в «Opere»). Есть немец. перев. Nizze.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ IV

1. Проблемы о хордах. Очень простая задача, разрешаемая Евклидом в предложении 1, является первой в ряде постепенно усложняющихся проблем.

Задача построить в круге хорду данной длины является задачей *неопределённой.* Чтобы это сделать вполне определённо, достаточно зафиксировать один её конец на окружности. Вполне



Черт. 1.

естественен переход к случаю, когда точка, через которую проходит секущая, берётся вне круга. Такая задача решается Паппом[1]).

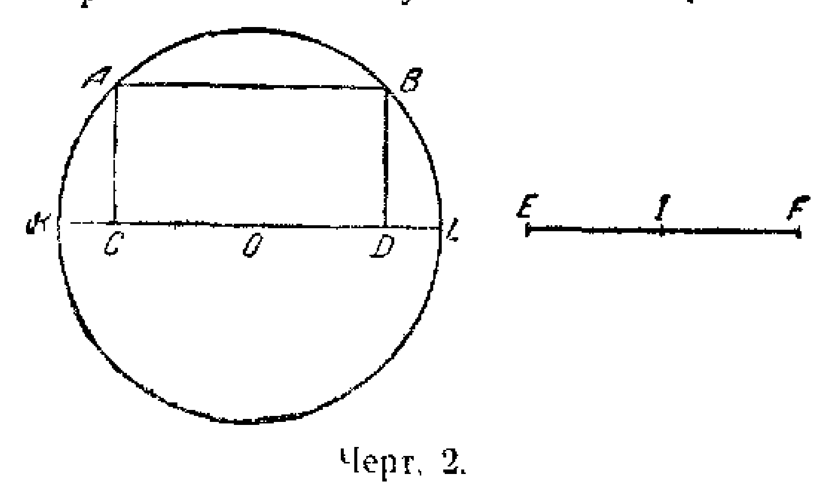
Основываясь на том, что хорды данной длины CD касаются круга, концентричного данному, который нетрудно построить, он проводит к этому последнему касательную AB из данной точки M (черт. 1).

Тот же Папп[1]) решает и другую проблему о проведении хорды данной длины параллельно данной прямой.

[1]) Pappi Alexandrini, Collectiones, ed. Hultsch, Berolini, 1877—1878. Enriques, Gli Elementi, т. IV, стр. 269 (12). — Anaritii, Commentarii, ed. Curtze, Lipsiae, 1899, стр. 139.

Нетрудно видеть, что хорда, равная EF, получается, если, разделив EF пополам, в обе стороны от центра O по диаметру отложить $OC = IE$ и $OD = IF$ и восставить к диаметру KL перпендикуляры AC и BD до пересечения с окружностью в точках A, B. (черт. 2).

Эти построения имеются и у Коммандина и у Клавия.



Черт. 2.

2. О вписанном треугольнике. Задача, разрешаемая в этом предложении, находит себе применение дальше только в отношении равностороннего треугольника (предложение 16 книги IV). При неопределённости одной вершины задача неопределённая.

Эта задача, так же как и предложение 1, открывает путь тоже к ряду постепенно осложняющихся проблем.

Папп разрешает задачу о вписанном в круг треугольнике, стороны которого проходят через три точки A, B, C, лежащие на одной прямой.

Её естественным обобщением является задача, предложенная Крамером [2]) и разрешённая Кастильоном [3]) (1708—1791) в 1776 г.

Даны три точки A, B, C и круг, вписать в него треугольник DEF такой, что каждая сторона проходит через данную точку (черт. 3).

а) Предположим, что проблема разрешена и DEF искомый треугольник.

Проводим $GF \parallel BC$, соединяем GE и продолжаем до H.

Тогда $\angle D = \angle G$ и потому $\angle EHB = \angle D$, и $\triangle BHE$ подобен $\triangle BDC$, так как у них общий угол B и $\angle H = \angle D$.

Поэтому $\frac{BH}{BD} = \frac{BE}{BC}$, откуда $BH = \frac{BD \cdot BE}{BC}$.

---

[2]) Задачу Cramer'а см. F. G. M., Exercices de Géométrie, Paris, 1912, стр. 21.

[3]) Castillon, Sur un problème de géométrie plane, Nouv. Mém. de l'Acad. de sc., 1776, Berlin, 1779, стр. 265—283.

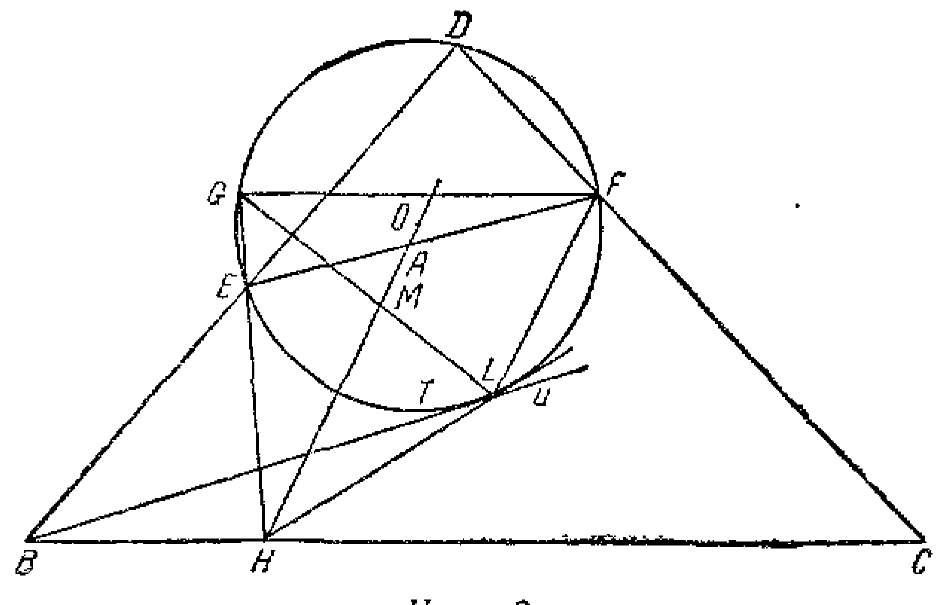
Далее, если проведём к кругу касательную BT:

$$BE \cdot BD = BT^2$$

и

$$BH = \frac{BT^2}{BC}.$$

Это выражение позволяет нам построить точку H.



Черт. 3.

б) Задача теперь сводится к следующей: провести из данных точек H и A прямые к некоторой точке E окружности так, чтобы $GF \parallel BC$.

Проведём $FL \parallel AH$ и соединим GL.

Пусть M — точка пересечения HA с GL. Мы определим положение этой точки.

Замечаем, что $\triangle MGH \sim \triangle EAH$ (ибо H — общий угол и угол M равен углу E, так как оба угла дополняют угол L до $2d$).

Поэтому

$$\frac{HM}{HE} = \frac{HG}{HA},$$

откуда

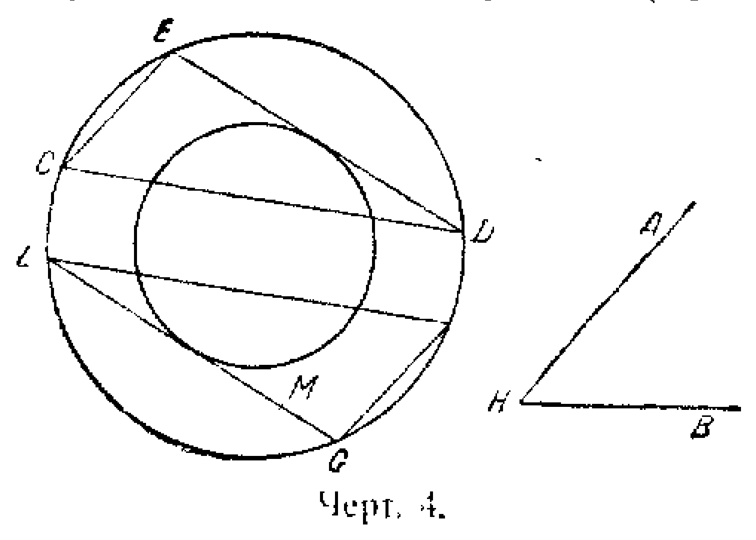
$$HM = \frac{HE \cdot HG}{AH} = \frac{HU^2}{AH},$$

где HU — проведённая из H касательная к окружности.

Таким образом, положение M известно, с другой стороны $\angle LFG = \angle AHC$ дан.

в) Нам остаётся решить задачу о проведении через точку M секущей MGL такой, что угол GFL равен углу, образованному данными прямыми AH и BC.

Эту последнюю задачу рассмотрим на отдельном чертеже. Для того чтобы провести через M хорду, на которую опирается угол, равный данному, следует построить где-нибудь такую хорду ED и затем провести к кругу, концентричному данному и касательному к ED, из M касательную MGL (черт. 4).

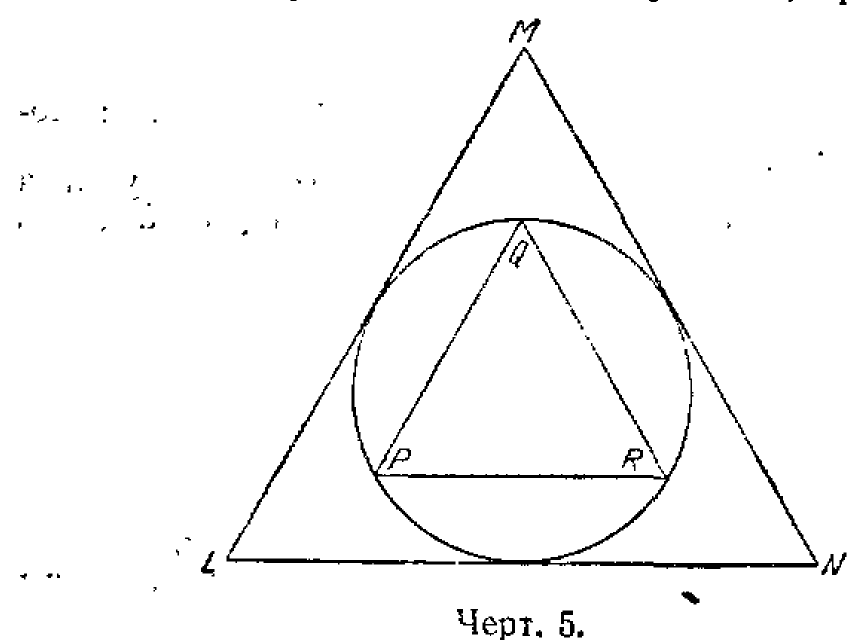


Черт. 4.

3. Описанный треугольник. Пелетарий и Борелли сперва вписывают треугольник PQR (черт. 5), а затем проводят касательные, параллельные его сторонам

$$LM \parallel PQ, \quad LN \parallel PR, \quad MN \parallel QR.$$

Так как параллельно данной прямой можно провести д в е касательные, то будем иметь всего 8 решений, среди которых



Черт. 5.

вместе с *описанным* в узком смысле, т. е. заключающем в себе круг (два треугольника), будут ещё вне описанные треугольники,

т. е. одной лишь стороной касающиеся круга (шесть треугольников).

4. Вписанный круг. Задачу эту Евклид решает обычным в настоящее время путём, проводя биссектрисы углов. Из самого построения следует, что биссектрисы пересекаются в одной точке.

Это положение является *условно абсолютным* на не евклидовой плоскости и его следует формулировать так: если биссектрисы пересекаются, то пересекаются в одной точке.

Р. Симсон замечает необходимость доказательства их пересечения и выводит это из того, что сумма углов ABC и ACB, а тем более DBC и DCB меньше $2d$ (черт. 4 к предложению 4).

Если вместо внутренних биссектрис будем проводить внешние (т. е. биссектрисы внешних углов треугольника), то получим ещё три решения (вне вписанные круги, извне касающиеся данного треугольника) и вместе с тем убедимся, что две внешние и *одна внутренняя биссектрисы пересекаются в одной точке.*

Отсюда непосредственно следует, что удвоенная площадь треугольника ABC равна периметру $2p$, умноженному на радиус вписанного круга.

В самом деле, ABC разлагается на три треугольника ABD, ADC, BDC с площадями, равными $\frac{1}{2}AB \cdot DE$, $\frac{1}{2}AC \cdot DH$, $\frac{1}{2}BC \cdot DI$.

5. Особенные точки в треугольнике. Евклид ничего не говорит об особенных точках в треугольнике. Из предложения 3 он не делает вывода, что три биссектрисы пересекаются в одной точке, из 4-го, что перпендикуляры к серединам сторон пересекаются в одной точке. Понятия об *ортоцентре* как точке пересечения высот треугольника у Евклида нет.

Четвёртой особенной точкой является центр тяжести треугольника — точка пересечения медиан. Интересно отметить, что эта теорема является *абсолютной*, хотя её элементарное доказательство основывается на теореме подобия и потому на аксиоме о параллельных.

Геометрия треугольника исследует свойства этих особенных точек [4].

К упомянутым выше следует присоединить ещё *точку Лемуана* как пересечение *симмедиан*, т. е. прямых, симметричных медианам относительно биссектрис.

---

[4]) Archimedes, Opera omnia, ed. Heiberg, 1910—1913. Libri assumptorum, Lemma V.—Pappi, Collectiones, кн. VII, стр. 62, ed. Hultsch, стр. 761 (1). — Gauss, Werke IV, Göttingen, 1873, стр. 396. — Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, т. IV, Berlin, 1923, стр. 165 (21).

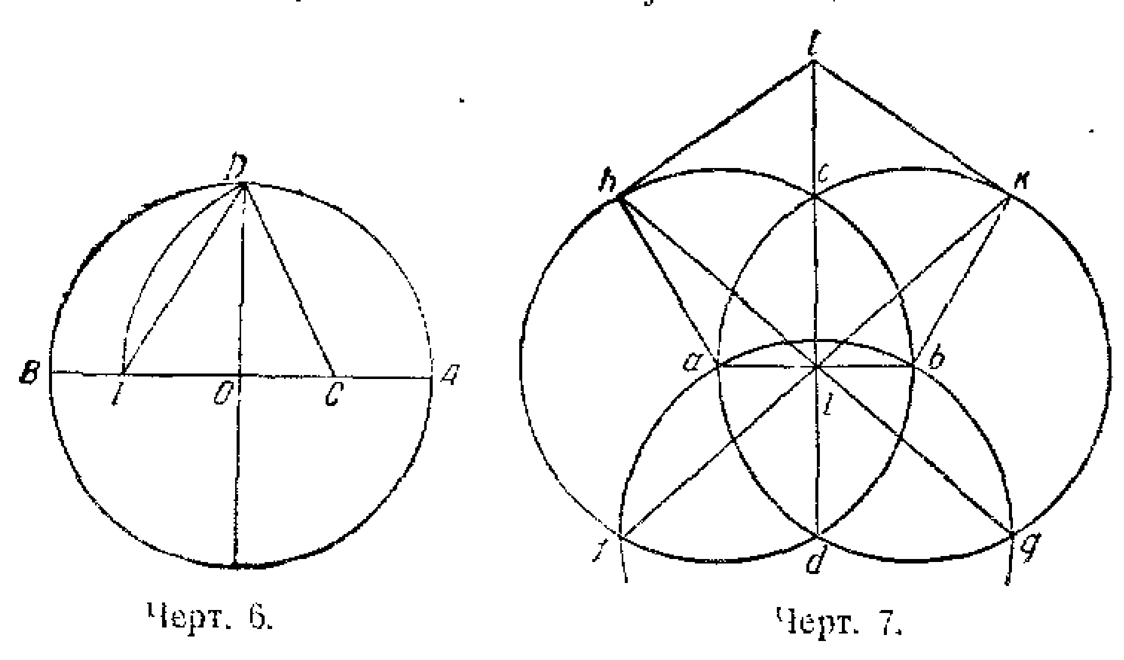
Шестой точкой является точка Жергонна[5]) как пересечение трёх прямых, соединяющих вершины с точками касания вписанного круга на противоположных сторонах.

Теорема о пересечении таких прямых в одной точке выводится как частный случай теоремы *Брианшона*[6]); возможны и элементарные доказательства.

Особенной прямой в треугольнике является прямая Эйлера, соединяющая ортоцентр с центром описанного круга.

Эйлер доказывает, что на одной окружности лежит 9 точек: середины сторон, основания высот и середины прямых, соединяющих вершины с ортоцентром. Центр этого круга лежит на прямой Эйлера посредине между ортоцентром и центром описанного круга.

6. Построение правильного пятиугольника. Птолемей, а затем Дюрер[7]) *дают иные, чем у Евклида,* построения сторон правильных пятиугольников и десятиугольников.



Черт. 6. Черт. 7.

Птолемей радиус OA делит в C пополам и радиусом CD описывает окружность до пересечения с диаметром AB в точке I (черт. 6).

Тогда OI есть сторона правильного десятиугольника, а ID — правильного пятиугольника.

Дюрер даёт *приближённое* построение пятиугольника с помощью *циркуля постоянного раскрытия,* которое он заимствует

[5]) Gergonne, Annales Math., ap. 1, Nismes, 1810—1811, стр. 17.

[6]) Brianchon, Journal de l'Ecole Polyt., гл. XIII, 1810.

[7]) Durer, Underweijsung der Messung mit den Zirkel, Nürnberg, 1527. — Cantor, Vorlesung über Gesch. d. Math., т. II, стр. 225, 462.

из Geometria Deutsch [8]). Берётся отрезок ab, радиусом ab из его концов описываются окружности, пересекающиеся в c и d (черт. 7.)

Из d описывается окружность, проходящая через точки a, b и пересекающая две первые окружности в точках f и g. Соединяя f и g с серединой l прямой ab и проводя fl и gl, получаем на этих окружностях точки h, k. Принимаем ha, ab, bk за стороны пятиугольника; описывая же из h и k окружности радиуса ab, получаем и две последние стороны пятиугольника hi, ki.

7. Правильный пятнадцатиугольник. Источник интереса древних греков к правильным многоугольникам и многогранникам *метафизический*.

Корни его следует искать у пифагорейцев, по взглядам которых все мировые явления представляют обнаружения различных *числовых* законов и связанных с ними геометрических форм. Возможность деления плоскости на правильные треугольники, четырёхугольники и шестиугольники имела важное метафизическое значение в их мировоззрении.

Правильные многогранники имели ещё большее значение: атомам четырёх основных стихий: земли, воды, воздуха и огня приписывали формы правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра, которые потом пополняются позже открытым додекаэдром, форму которого приписали *пятой* стихии — эфиру.

В стереометрических книгах «Начал» мы увидим, какое значение для Евклида имели правильные многогранники.

Гранями правильных многогранников являются: *треугольник, квадрат и пятиугольник*.

В планиметрической части «Начал» об этих многоугольниках даются сведения, которые затем используются при построении правильных многогранников.

Но почему внимание математиков остановилось ещё на правильном пятнадцатиугольнике? Они заметили, что дуга угла наклонения эклиптики к экватору представляет пятнадцатую часть окружности, т. е. дугу, стягивающую сторону правильного пятнадцатиугольника.

Построение пятнадцатиугольника, т. е. деление окружности на 15 равных частей, сводится к делению окружности на 3 и на 5 равных частей [9]).

8. Семиугольник [10]). Уравнение третьей степени (не приводимое и поэтому указывающее на неразрешимость с помощью

---

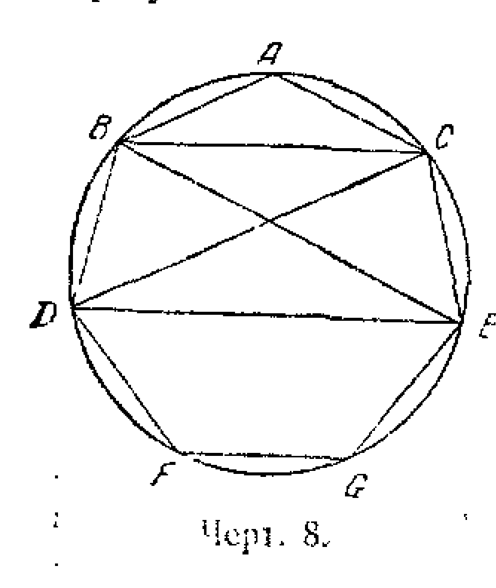
[8]) Geometria Deutsch. Lineal oder Richtscheid. 1485.

[9]) Cardanus, Opera IV, 1667. Opus novum de proportionibus, стр. 492. — Cantor, Vorles., т. II, гл. 65.

[10]) Federigo Enriques, Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Roma, 1925. Libro quarto per cura di Amedeo Agostini. Woepke, l'Algèbre d'Omar Alkhayami, стр. 125—127.—Ващенко-Захарченко, История математики, Киев, 1883, стр. 552.

циркуля и линейки), дающее сторону правильного семиугольника, выводится Феррари на основании теоремы Птолемея (черт. 8).

Взяв семиугольник $ABCDEFG$ и полагая $AB = 1$, а $BC = x$, из четырёхугольника $ABCD$ получаем



Черт. 8.

$$BC^2 = BD \cdot CA + AB\ DC$$

или

$$x^2 = 1 + DC.$$

Из четырёхугольника же $BCDE$ имеем

$$DC^2 = BC \cdot DE + BD \cdot CE$$

или

$$(x^2 - 1)^2 = x\ DE + 1,$$

откуда

$$DE = x^3 - 2x.$$

Но $DE = DC$ (так как это хорды, стягивающие равные дуги), поэтому:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

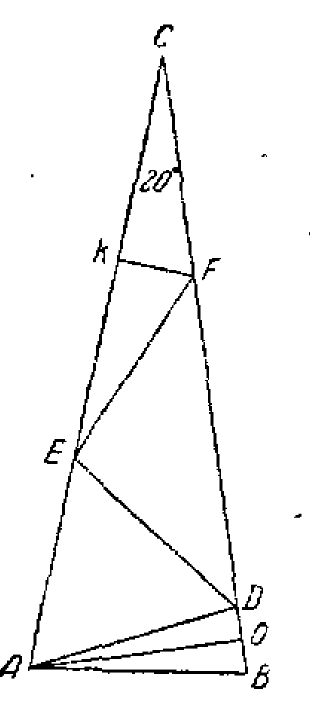
Зная AB и BC, построим треугольник BAC с данным основанием BC и вместе с тем угол в семиугольнике, с помощью которого нетрудно построить и сам семиугольник.

9. Девятиугольник[11]. Сторона правильного девятиугольника не может быть построена с помощью циркуля и линейки. Задача эта сводится алгебраически к неприводимому уравнению третьей степени

$$x^3 + 1 = 3x,$$

корни которого не могут быть построены при помощи циркуля и линейки. Приведение задачи к кубическому уравнению было сделано впервые арабским математиком Абул-Джуда.

В современном обозначении решение Абул-Джуда получается при помощи следующих рассуждений.



Черт. 9.

Пусть AB (черт. 9) будет сторона правильного девятиугольника, вписанного в круг. Примем её за основание равнобедренного треугольника, вершина C которого будет находиться на окружности. Нетрудно видеть, что угол при C будет равняться 20°, углы же A и B при основании будут по 80°. Опустим из A перпенди-

[11]) См. Enriques, стр. 316 (прим. 10).

куляр AO на BC и построим $AD=AB$; тогда ABD будет треугольником, подобным ABC, и угол CAD будет равняться 60°. Если мы построим $ED=AD$, то треугольник ADE будет равносторонним, а угол CDE, как нетрудно видеть, будет равняться 40°. Если мы ещё раз построим $EF=ED$, то в равнобедренном треугольнике EDF углы при основании будут по 40°, а угол при вершине E будет равняться 100°. Отсюда следует, что угол CEF равняется 20° и треугольник CEF будет равнобедренным и $EF=CF$. Опустим перпендикуляр FK; тогда треугольники CFK и AOC будут подобными.

Положим $AB=x$ и $AC=BC=1$. Из подобия треугольников CKF и AOC имеем

$$\frac{CF}{CK}=\frac{CA}{CO} \quad \text{или} \quad \frac{x}{CK}=\frac{1}{CO}.$$

Но $EC=2CK$, а $CO=\dfrac{CD+CB}{2}=\dfrac{1+CD}{2}$; значит

$$\frac{x}{EC}=\frac{1}{1+CD}.$$

Составляя производную пропорцию и помня, что $x+EC=AE+EC=1$, получим

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{2+CD} \quad \text{или} \quad x(2+CD)=1.$$

Из подобия треугольников ABC и ABD имеем

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BD} \quad \text{или} \quad x^2=BD.$$

Значит, $CD=AB-BD=1-x^2$ и для определения x мы приходим к уравнению:

$$x(3-x^2)=1,$$

или

$$x^3+1=3x.$$

Герон[12]) даёт приближённое выражение стороны девятиугольника, а именно, две трети радиуса, откуда выводится приближённое построение с помощью циркуля и линейки правильного девятиугольника.

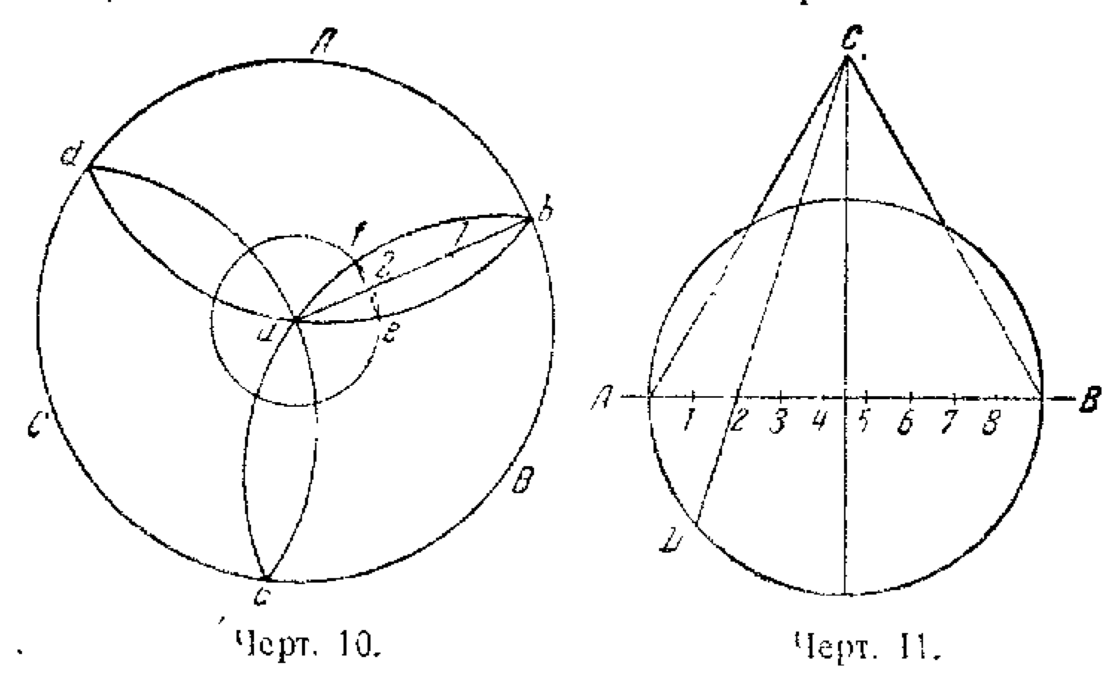
Взяв круг ABC и описывая окружности bad, dac, cab из точек A, B, C, делящих окружность на три равные части, получаем то, что Дюрер называет *рыбьим пузырём*.

---

[12]) Heronis, Geom. et Stereom., ed. **Hultsch**, **Berolini**, 1884, стр. 134, 206, 218, 219.

Приближённое построение стороны правильного девятиугольника, предлагаемое Дюрером, состоит в следующем: радиус ab делится на три равные части $a2$, 21, $1b$ (черт. 10). Описывается радиусом $a2$ круг; прямая, соединяющая точки e и f пересечения его с дугами aeb и afb, представляет сторону правильного девятиугольника, вписанного в малый круг.

10. Теорема о вписываемом и описываемом правильном многоугольнике. У Лежандра, а затем и во всех наших учебниках, доказывается возможность вписания правильного много-



Черт. 10. Черт. 11.

угольника с любым числом сторон в круг. С евклидовой точки зрения Лежандр доказывает только то, что если правильный многоугольник существует, то существует окружность, проходящая через все его вершины.

Но в *евклидовом* смысле Лежандр не доказывает существования правильного многоугольника; это достигается только построением в данном круге с помощью циркуля и линейки правильного многоугольника. Это делает Евклид для трех-, четырёх-, пяти- и шестиугольников.

В настоящее же время доказано, что это возможно для семнадцатиугольника [18]).

Вообще, если число сторон n простое, то это возможно лишь при $n = 2^m + 1$, причём $m = 2^p$.

---

[18]) Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Göttingen, 1796, Werke, т. II, стр. 120. — Klein, Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire tr. par Gries, Paris, 1896. — Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig. — Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, т. IV, Berlin, 1923, стр. 193.

Упомянем *практический* приём деления окружности на n частей (к чему сводится построение правильного n-угольника).

Приём Биона[14]) состоит в том, что на диаметре круга строится равносторонний треугольник ABC; диаметр делится на n равных частей (черт. 11).

Соединяя вторую точку деления с вершиной C, мы, продолжая $C2$ до пересечения с окружностью в D, получаем AD как n-ю часть окружности (на чертеже дано построение стороны AD девятиугольника).

Теория многоугольников развивается Мейстером (1724—1788) и Мёбиусом (1796—1868). Наиболее подробные сведения имеются у Брюкнера (Brückner)[15]).

---

[14]) N. Bion, Traité de construction et des principaux usages des instruments de mathématiques. — Cantor, Vorles., т. II, стр. 672. — Pressland, On the history of certains geom. approximations. Proceedings of the Edinburgh Mat. Society, т. X.

[15]) Brückner, Vielecke und Vielfläche. Theorie und Geschichte, Leipzig, 1864.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ V

1. Отношение и схоластика. Евклидово определение *отношения*, так же логически не действующее, как его определение *точки, линии, поверхности и прямой*.

Математическое отношение (количественное) в этом определении подводится, как вид, под род — общее понятие, которое на русском языке мы называем тоже отношением (в общем смысле) а на латинском relatio.

Аристотель[1]) говорит: «*Отношение* является то отношением двойного к половинному, тройного к третьей части и вообще кратного к кратной части, превосходящего к превосходимому, то отношением нагревающего к нагреваемому, режущего к разрезываемому и вообще действующего к страдающему; далее, отношение измеряющего к мере, познающего к познанию и чувствующего к чувственному восприятию».

Эта аристотелевская категория имеет богатую схоластическую литературу[2]).

В каждом отношении Аристотель различает субъект, конечный член, основание (subjectum, terminus, fundamentum). В математическом отношении $A:B$ субъект — A, конечный член — B, основание — *количество*.

Уже начиная с Альберта Великого[3]), схоластик бьётся над вопросом; если члены отношения A и B существуют, то существует ли само отношение?

Эта *онтологическая* схоластическая проблема в математической области превращалась в проблему: следует ли отношения чисел или вообще величин относить к той плоскости существования, в которой находятся числа или величины, *следует ли считать отношение числом.*

---

[1]) Aristoteles, Opera, ed. Didot, Categoriae, гл. V.

[2]) Biese, Philosophie des Aristoteles, 1871. — Cantor, Vorles, т. I, стр. 238. — Д. Мордухай-Болтовской, Генезис современного числа, Известия С. К. Г. У., 1928, стр. 61.

[3]) Albertus Magnus, Opera. ed. Jammy, Lyon, 1653, т. III, стр. 207.

Фома Аквинский[4]) развивает учение Аристотеля о *категорическом* и *условном* отношении.

Категорическое отношение не относится только к *числам*; оно может быть между всякими вещами, не предполагая особенных условий, при которых оно только и имеет место. Примерами могут служить отношения тождества и различия (основанием является категория субстанции), равенства и неравенства (количества), подобия и неподобия (качества), причины и действия.

Все эти отношения ни от чего третьего не зависят, они всегда при всяком условии имеют место.

Примеры условных отношений: отношение науки к познаваемому, движущего к движению.

Необходимые условия *реальности* отношения: субъект должен существовать, конечный член должен реально от него отличаться, основание должно быть положительным и реальным в различных членах. Чтобы получить достаточное условие, следует прибавить ещё требование *реального существования обоих членов*, что и имеет место в категорическом отношении.

Математическое отношение следовало бы отнести к категорическим. В $(A:B)$ оба члена A и B постулируются существующими, отношение $A:O$ не имеет смысла, так же как $O:B$.

Но математическое отношение схоластики менее всего жалуют. Указывают, что вещь имеет бесконечное число отношений к своей половине, к трети, к четверти и, таким образом, является *носителем актуальной бесконечности*, которую Аристотель не признаёт и которую схоластики уже с некоторым колебанием стараются изгнать, оставаясь верными Аристотелю.

Анализируя схоластические споры об отношении, мы вскрываем в них *эмбрионы математических идей*, касающихся числовых отношений.

В тесной связи с проблемой реальности отношения стоит проблема: при одинаковом отношении A к B, к C и к D следует ли считать в A *одно* отношение или *несколько* (AB), (AC), (AD), ... иными словами, если A отец, B, C, ... сыновья, то сколько в A *отчеств*.

Две постоянно враждующие между собой школы *томистов* и *скотистов* отвечают на это различно. Первые говорят *одно*, вторые *много*.

Переводя этот спор на плоскость математических понятий, можно спросить: следует ли одинаковость отношений $a:b$, $c:d$ рассматривать как их *тождество*, как равенство *чисел*?

В такой постановке вовсе не спрашивается: представляет ли отношение собой *число*, но только — можно ли смотреть на одинаковость отношений как на нечто вполне аналогичное равенству чисел.

---

[4]) Thomas Aquinatus, Opera Omnia, Romae, 1884, Opuscula 48. Guerinois, Clypeus Thomisticae philosophiae. Avicenna, Metaphysik. Übers. Hort, Leipzig, 1909.

2. Отношение с методической точки зрения. Каким образом определять отношение в школе? На этот важный вопрос ответить совсем не так легко. Конечно, сейчас никому не придёт в голову вводить в школьную практику евклидово определение отношения, но вместе с тем можно поставить вопрос, следует ли, как это многие делают в настоящее время, отождествлять отношение с дробью. Я не берусь дать окончательный ответ на этот вопрос, но всё же отмечу, что такое стремление встать на научно-формальную точку зрения производит определённое насилие над теми не вполне ясными представлениями об отношении, которые существуют в сознании учащихся, тем более, что к понятию об отношении мы приходим не в результате арифметической операции деления, а в результате *сравнения* двух объектов. Правда, это сравнение осуществляется при помощи создания некоторого числа (индекса отношения, как говорили раньше), которое получается при помощи деления. Можно доказывать свойства пропорций, сводя отношения к дробям, но отождествлять отношение с дробью равносильно отождествлению длины окружности с пределом периметра, вписанного в последнюю многоугольника.

Если мы обратимся к истории методики изложения теории пропорций, то придётся сказать, что в старых учебниках геометрии долежандровского типа понятия отношения и числа резко отделяются одно от другого, хотя, начиная с Ньютона и Лейбница, математики уже рассматривают иногда число как некоторого рода отношение. В это время, например, говорят: «содержание (так раньше называли отношение) есть сравнение двух однородных величин. Пропорция есть сравнение двух равных содержаний». Конечно, такое определение не хорошо хотя бы потому, что «сравнение» в первом и во втором предложениях берутся в различных смыслах.

В учебниках XIX в. наблюдаются несколько ступеней в формализации понятия об отношении, причём на крайность, т. е. на полное отождествление отношения и числа, решаются очень немногие. Даже в настоящее время в XX веке есть стремление определять отношение с уклоном в сторону сравнения. У Бореля и Серре отношением двух однородных величин называется «число, выражающее *меру* одной из величин, когда другая принимается за единицу», иными словами, если отношение и выражается числом, то принципиально оно является не числом, а мерой. У Лакруа «отношение есть число целое или дробное, показывающее сколько раз одна величина содержится в другой» или «отношение или содержание двух чисел есть частное от деления одного на другое» [5]).

---

[5]) Робуш, Теоретическая арифметика, Харьков. — Ушаков, Новая арифметика, СПБ, 1915. — Лакруа, Основания арифметики, СПБ, 1826. — Серре, Курс арифметики, Москва, 1881. —

3. Отношение в логистике. В логистике, старающейся свести математические понятия к чисто логическим, математическое отношение тоже рассматривается как частный случай общего понятия отношения. Однако исследования логистов в области логики отношений резко отличаются от схоластических. Для них не имеют значения вопросы реальности существования отношений. Весь их интерес лежит только в тех законах формальных операций, которым подчиняется это понятие. Под такое определение отношения, обозначаемое $a\ R\ b$, подходит, конечно, и наше $a:b$.

Математическое отношение $a:b$ не принадлежит к категории коммутативных:

$$aRb \text{ не равно } bRa,$$

но оно будет транзитивным:

$$aRb \times bRc = aRc$$

как отношения равенства, параллелизма и вывода.

4. Евклидово отношение и число[6]. История книги V Евклида, содержащей античную теорию пропорций, это — история *арифметизации геометрии*, история эволюции числа.

Для Евклида число — это собрание единиц (определение 2 книги VII), так что дробь для него ещё не является числом. Между геометрическими величинами и числами ещё нет *взаимно однозначного соответствия*; отношение двух отрезков, площадей или объёмов ещё не сводится к отношению двух чисел. Евклиду приходится строить две теории пропорций: величин в книге V и чисел в VII. С *нашей* точки зрения он *повторяется*[7].

Но это только с нашей точки зрения, а не с точки зрения *самого Евклида*. У Евклида не только нет взаимно однозначного соответствия между геометрическими величинами и характеризующими их числами, но у него даже нет идеи рода, объемлющей видовые понятия геометрической величины и числа; эта идея является результатом дальнейшей эволюции математической мысли.

Борель, Арифметика, Москва, 1923. — Никулычев, Арифметика, Москва, 1904. — Попов, Арифметика, Москва, 1937.

[6]) Эвклидовых Начал восемь книг, пер. Ф. Петрушевского, СПБ, 1819. — Cantor, Vorles., т. I, стр. 222, 250. — Heiberg, Studien, стр. 83. — Hanckel, Geschichte der Mathem., стр. 389—398. — Vogt, Die Entdeckungs-Geschichte der Irrationalen nach Platon und anderen Quellen aus IV. Jahrhundert Bibliotheca Mathematica (3) 10, стр. 592—655. — Bettini, La definizione di proporzione ed il V lib. di Euclido, Periodico Math. VII, 1892. — Vincenzo Viviani, Quinto libro degli Elementi di Euclide, 1924. — Hill, On the fifth book of Euclid. Cambr. Royal Soc. Trans. 22 (1921).

[7]) Д. Мордухай-Болтовской, Из прошлого пятой книги Начал Евклида, Математическое Образование, 1916, № 7—8.

Чисто формальная точка зрения совершенно чужда Евклиду, определение класса совокупностью формальных законов ему чуждо.

Число и прямолинейный отрезок (в его терминологии «прямую») он не решается отнести к одному классу только потому, что будут тождественными те законы, которым подчиняются соответствующие формальные операции над ними.

Величины в книге I (аксиома 7) взаимно *налагаются.*

Аксиомы 1, 2, 3, ... («Равные одной и той же равны между собой»; «Если к равным придадим равные, то получим равные»; «Если от равных отнимем равные, то получим равные» и т. д.) *все* относятся не к *числам*, а к *геометрическим величинам*, т. е. к *классу*, в который отнюдь не входят числа.

Но в высокой степени интересным является то, что эти и другие аксиомы лежат в основе *Арифметики Евклида*; все арифметические действия над числами Евклид сводит к действиям над особым классом *отрезков*, составленных из одного определённого, отвечающего единице.

Между отрезками этого класса и целыми числами существует взаимно однозначное соответствие, которое позволяет Евклиду, идя в обратном современному направлении, свести не геометрию к арифметике, а арифметику к геометрии.

Как только *дробь становится числом*, результаты книги VII начинают толковаться в обобщённом виде. В пропорции $a:b=c:d$ члены a, b, c, d оказываются не только *целыми* числами, но и *дробями*. Характерно определение Беха-эд-дина деления как отыскания числа, которое с единицей находится в том же отношении, что делимое с делителем.

Понятием об *отношении чисел* Евклид в книге V не пользуется, но у него есть понятие об отношении *величин*. Оно даётся определением 3 книги V.

«Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству».

Но понятие *пропорциональности* имеется как для величин, так и для чисел.

Для величин определение 6 книги V.

«Пропорциональными называются величины, имеющие то же отношение».

Для чисел определение 20 книги VII.

«Числа пропорциональны, если первое от второго и третье от четвёртого составляют то же кратное или ту же долю $\left(\frac{1}{n}\right)$ или ту же дробь $\left(\frac{m}{n}\right)$».

Книга VII проводится независимо от V; не будучи в силах охватить эти два понятия *пропорциональности чисел и пропорциональности величин* в одном общем их объемлющем понятии *пропорциональности вообще* (конечно, в смутной форме у него имевшемся), Евклид даёт определения этих понятий раздельно, так что общим у них остаётся только *название.*

Определение отношения величин у Евклида **остаётся** ***мёртвым***, логически не действующим; рабочим определением **является** 5 — *равенства отношений*.

На алгебраическом языке оно выражается так:

$$a:b = c:d,$$

если при всяких целых числах, m, n таких, что

$$\begin{aligned} ma > nb \quad &\text{также} \quad mc > nd, \\ ma < nb \quad &\text{также} \quad mc < nd, \\ ma = nb \quad &\text{также} \quad mc = nd. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Что такое отношение? Евклид пытается *определить*. Но тогда следовало бы определить и то, что представляет тождественность или одинаковость отношений.

Здесь положение то же, что и с понятиями прямого угла, площади и т. д., равенство которых Евклид не определяет, но для которого даёт аксиомой 7 книги I *признак*. Определение 5, дающее такой признак, скорее является аксиомой, чем определением.

То же самое относится и к определению большего и меньшего отношений (определение 7), выражаемого в алгебраической символике так:

$$a:b > c:d,$$

если для некоторых целых чисел m, n

$$\begin{aligned} ma &> nb, \\ mc &< nd. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

5. Архимедова аксиома [8]. В евклидовой системе аксиом нет архимедовой аксиомы: «какую-нибудь величину можно взять столько раз, что она превзойдёт всякую данную величину». Но Евклид *неявно* пользуется этой аксиомой.

Чтобы понять четвёртое евклидово определение книги V, следует вспомнить то, что мы сказали об евклидовом определении вообще.

Это определение носит явно *аксиоматический* характер и утверждает, что две величины могут находиться в математическом отношении, только если для них имеет место аксиома Архимеда, если кратное одной может быть больше другой.

Что такое отношение? Это разъясняется определением 3, которое подчёркивает *однородность* величин, находящихся в отношении. За этим определением ставится вопрос: ***все ли однородные величины имеют отношение?***

---

[8]) Ф. Петрушевский, Архимеда две книги о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы, СПБ, 1823.

Клавий[9]) в четвёртом евклидовом определении видит отрицательный ответ.

Он разбивает род (*величина*) на два вида: 1) находящихся и 2) не находящихся между собой в отношении.

Первые это те, которые обладают свойством, определяемым аксиомой Архимеда, а именно, отрезки, прямые, площади, объёмы, прямолинейные углы.

Вторые, которым присуще чудесное свойство, состоящее в том, что прибавление к $a \ldots a, a, a \ldots$ не даёт возможности превзойти b. Такой величиной, по мнению Клавия, является *угол касания*. Сколько раз мы его ни брали бы, мы получаем величину меньшую, чем любой прямолинейный угол.

6. Несоизмеримые величины. Иногда приходится читать, что Пифагор открыл *иррациональные числа*. Конечно, это не верно. Пифагор открыл не существование иррациональных чисел, а существование отношений, *не выражаемых числами*.

Следует думать, что прежде мыслили *все* величины соизмеримыми, всякое отношение геометрических величин, в частности прямолинейных отрезков, считалось равным рациональному числу. Во времена же Евклида вполне ясно сознавалось, что существуют отношения и не выражаемые отношением двух целых чисел, т. е. рациональной дробью.

Чисто геометрическое доказательство существования несоизмеримых величин, например, несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, ведётся при помощи операции над величинами, которую ныне называют *алгорифмом Евклида*—нахождением общей меры. Формально он вполне соответствует алгорифму нахождения общего наибольшего делителя, развиваемому Евклидом в книге VII «Начал» (см. предложения 1, 2); следует только заменить деление числа A на число B последовательным откладыванием отрезка B на A, пока не получится в остатке отрезок r_1, меньший B.

Алгорифм Евклида определяется системой формул:

$$\begin{aligned} A &= Bq + r_1, \\ B &= r_1 q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-1} &= r_n q_n + r_{n+1}. \end{aligned}$$

Если $r_{n+1} = 0$, то r_n оказывается общей мерой A и B.

Если этот процесс *никогда не прекращается*, то общей меры для A и B не существует, иначе говоря, A и B несоизмеримы.

7. Актуальная бесконечность в истории иррациональных чисел. Открытие несоизмеримых величин положило конец наив-

---

[9]) Clavius, Euclidis Elementa, 1574.

ному представлению о существовании взаимно однозначного соответствия между величинами и рациональными числами (или вернее отношений целых чисел).

Бруншвиг[10]), видимо, правильно предполагает, что был произведён целый ряд попыток численного выражения диагонали квадрата со стороной, равной единице, раньше, чем была установлена *неразрешимость* этой задачи.

Само пифагорейское мировоззрение должно было располагать к вере в *разрешимость* этой проблемы, и открытие её неразрешимости нанесло ему неисцеляемую рану.

Интересно отметить, что установке *логически необоснованного*, но *психологически объясняемого* взаимно однозначного соответствия между геометрическими величинами и числами, путём *расширения идеи числа*, предшествовал краткий период особенного понимания произведений

$$ab,\ abc,\ abcd,\ \ldots,$$

когда постулировалось взаимно однозначное соответствие между *геометрическими величинами и числами*, но при этом числами не только рациональными, как до Пифагора, но и *целыми*.

Разница была только в том, что брались *актуально-бесконечные числа*, которых не знала античная мысль.

«Линия, — говорит Ривар[11]), в своих «Элементах математики», — умножается на другую линию, если *первая берётся столько раз, сколько точек во второй*: например, чтобы умножить AC на CD, следует линию AC взять столько раз, сколько точек в линии CD»; это значит, что для получения произведения AC на CD следует представить, что проведены линии, равные и параллельные AC; они заполняют пространство $ACDB$, и поэтому произведение одной линии на другую даёт прямоугольник.

Но эти целые числа — уже актуально-бесконечные числа, которыми определяется сколько раз *неделимое* (актуально-бесконечно малое XVII и начала XVIII в.) содержится в конечной величине.

Но этот подход к иррациональным числам от *актуально-бесконечно малого* не получает дальнейшего развития, так как предреволюционная мысль энциклопедистов производит революцию в области математики, уничтожает актуальную бесконечность и выдвигает на её место *потенциальную* бесконечность — д'аламберовскую идею предела[12]). И именно в этом направлении через

---

[10]) Brunschvicg, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, 1912, стр. 17.

[11]) Rivard, Élements de Mathématiques, Paris, 1788.

[12]) d'Alembert, Encyclopédie под словом Limite; также: Mélanges de littérature, d'histoire et de la philosophie, Nouv. éd. т. V, Amst., 1767.

Ньютона и Л. Бертрана[13]) — идёт зарождение понятия *иррационального числа*, ведущее к уничтожению книги V «Начал» Евклида. Иррациональное число выступает здесь не как бесконечное число актуально-бесконечно малого, а как *предел сходящегося ряда*, и только много позже возвращаются к помощи актуальной бесконечности, так как без неё, т. е. без *теории множеств*, потенциальная бесконечность обнаруживает свою слабость при строго логическом обосновании теории иррациональных чисел.

8. Глухие числа. Уже в шестидесятых годах XVII в. у Арно[14]) дробь начинает рассматриваться как *отношение*. У Ньютона[15]) различие между 2/3 и 2:3 исчезает. Для него вполне определённо *всякое число является отношением*. Видимо эта точка зрения принадлежит и другим математикам его эпохи. Так, Лейбниц говорит, что отношение A к B это не что иное, как число, выражающее A, когда B принято за единицу.

Отсюда следует, что величина (magnitudo) отличается от отношения (ratio), как *конкретное* число от *абстрактного*.

Но всякое ли отношение является числом? И во времена Ньютона обычно на это отвечали отрицательно. Можно сказать, что не только до Ньютона, но и во время Ньютона не существовало иррациональных чисел, не только в нашем смысле, но и в смысле Лежандра, как чисел, определяемых взаимно однозначным соответствием точек прямой и чисел.

Но было бы совершенно неправильно думать, что признавались только числа рациональные. Нет, наряду с ними существовали иррациональные числа в смысле чисел «глухих» или «немых» (surdus). Анализируя отношение к ним математиков XVI и XVII вв., мы должны прийти к заключению, что название «числа» не вполне отвечает содержанию, которое в них вкладывалось.

С одной стороны, «глухие» или «немые» числа — это числа, но не «выражаемые в словах». Математика в них не могла ничего уловить, кроме *пустого символа*, если не вкладывать в них чисто *геометрического* содержания, например, если не считать $\sqrt{2}$ стороной квадрата с площадью, равной 1.

«Глухими» числами, — говорит Кардан[16]), — называются такие, которые не могут отчётливо (distincte) быть мыслимы и называются они так потому, что не могут быть расслышаны (quia

---

[13]) L. Bertrand, Développement sur la partie élémentaire de Géométr.e, Paris, 1767.

[14]) (Arnaldus), Nouveaux éléments de géométrie, Paris, 1667, 1683.

[15]) Newton, Arithmetica universalis (есть франц. пер.. Paris, 1802).

[16]) Cardanus, Practica Arithmeticae, 1539, гл. 1, De subiectis arithmeticis (в «Opera»).

audiri non possunt) и не могут быть воспроизведены (quia fieri non possunt).

Эти глухие числа меняют своё название, становятся *иррациональными* и их право на отнесение к числам время от времени оспаривается. «С одной стороны, — замечает Штифель, — мы видим, что операциями над иррациональными числами, аналогичными операциям над рациональными, доказывается то, что нельзя доказать без них, и чувствуем их *реальность*; с другой стороны, иррациональное число мы никак не можем выразить отношением рациональных чисел и не можем признать их *истинными* числами, как не можем признать таковыми *бесконечные* числа».

Штифель[17]), полемизируя с одним неудачным изобретателем квадратуры круга Долэ[18]), старается доказать, правда, рядом очень туманных рассуждений, что отношение окружности к диаметру не представляется ни выражаемым (dicibile), ни невыражаемым числом (indicibile).

9. Определение равенства отношений. Определение 5 следует хорошо продумать. Оно постулирует, что неравенство

$$mA \leqslant nB \qquad (I)$$

влечёт за собой *всегда*

$$mC \leqslant nD,$$

а неравенство

$$mA \geqslant nB \qquad (II)$$

влечёт

$$mC \geqslant nD,$$

причём второе неравенство должно иметь место при всех целых числах (m, n), при которых имеет место первое неравенство.

Этого не понимает Рамус, который указывает, нападая на определение 5, что числа 4, 3, 5, 4 не пропорциональны, хотя при $6 \cdot 4 < 9 \cdot 3$ также $6 \cdot 5 < 9 \cdot 4$.

Но при $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$ имеем $6 \cdot 5 < 4 \cdot 8$ и т. д.

Следует также отметить, что одно условие I является *недостаточным*.

Необходимо ещё выполнение II, которое приходится ставить только при условии, что для всякого n существует такое m, что mA превосходит nB, т. е. постулировать *аксиому Архимеда*[19]): *для всякого* n существует такое m, что, с одной стороны,

$$mA \leqslant nB,$$

с другой,

$$(m+1)A > nB.$$

---

[17]) Stiffelius, Arithmetica Integra, 1544. Appendix.

[18]) Simon du Chesme de Dole, Quadrature du cercle, 1584.

[19]) См. прим. 8.

Условия I и II сменяются такими: при значениях m, n таких, что

$$mA \leqslant nB < (m+1)A,$$

имеем также

$$mC \leqslant nD < (m+1)C.$$

При этом значения n, меньшие m и большие $m+1$, можно не рассматривать.

В самом деле,

$$\begin{aligned} &\mu A < mA, && \text{и потому} && < nB, \\ &\mu C < mC, && \text{и потому} && < nD, \\ &\nu A > (m+1)A, && \text{и потому} && > nB, \\ &\nu C > (m+1)C, && \text{и потому} && > nD. \end{aligned}$$

В своей *деарифметизации* геометрии (т. е. в освобождении её от алгебры) итальянские учебники уже нашего времени (например, Саньо и д'Овидьо[20])) заменяют евклидовы условия следующими:

$$\begin{aligned} na &= mb + a', \\ nc &= pd + c', \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a' &< b, \\ c' &< d, \end{aligned}$$

и

$$m = p.$$

Эти условия являются эквивалентными евклидовым. А именно, мы получаем:

из первых

$$mb < na < (m+1)b, \qquad (4)_1$$

из вторых

$$pd < nc < (p+1)d, \qquad (4)_2$$

а так как $m = p$, то

$$md < nc < (m+1)d. \qquad (5)$$

Обратно от евклидовых нетрудно перейти к условиям Саньо и д'Овидьо.

Этого рода точка зрения проводилась ещё в XVII в. Такэ[21]); ниже мы приводим критику Такэ евклидовой теории пропорций, приведшую его к новой теории пропорций.

10. Экспонент. Если A и B соизмеримы, то

$$A = mC, \quad B = nC,$$

где m и n — целые числа. Мы тогда можем написать

$$A:B = m:n.$$

---

[20]) Sannio e d'Ovidio, Elementi di Geometria, Nàpoli, 1869, 1906, 1910.

[21]) Taquet, Elementa Geometriae, 1654.

Отношение $m:n$ в настоящее время отождествляется с *числом*. И число и отношение обозначается через $\frac{m}{n}$, так что пишут:

$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n}.$$

Но прежде (даже в XVIII и в начале XIX в.) строго различали $m:n$ от $\frac{m}{n}$. Рациональная дробь $\frac{m}{n}$ являлась только *экспонентом* (показателем, denominator) отношения величины A (числа) к величине B (числу).

Кестнер[22]) определяет так экспонент: «Экспонент отношения есть число, которое означает, сколько предыдущий член содержится в последующем». Это понятие идёт, кажется, от Клавия.

Несоизмеримые величины сперва не имели экспонента, но затем экспонентом стало иррациональное число.

У Ньютона $\frac{m}{n}$ обращается в $m:n$ — число становится отношением. У Лежандра всякое отношение является числом рациональным или иррациональным.

11. Бертран и Лежандр. Арно, Луи Бертран и Лежандр — вот три ступени постепенной арифметизации геометрии.

То, что у Бертрана высказывается в робкой форме, то Лежандр высказывает вполне категорически.

Лежандр и все авторы учебников лежандровского типа всякое действие над отрезками заменяют соответствующими действиями над числами, им соответствующими; произведение ab понимается только как число, квадрат суммы двух отрезков AB и BC выражается формулой

$$(AB+BC)^2=AB^2+2AB\cdot BC+BC^2,$$

потому что квадрат суммы чисел a и b, определяющих величины этих отрезков, будет

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Вполне понятно, что Лежандр, лучшие труды которого относятся к теории чисел, должен был дойти до крайнего предела арифметизации геометрии. Для него из равенства

$$a:b=c:d$$

следует

$$ad=bc,$$

«Эта истина, — говорит Лежандр, — *в числах верна*, значит, она верна и при всяких других величинах, лишь бы они изображались через числа, что *всегда можно положить*.

---

[22]) Kästner, Anfangsgründen der Mathematik, 1758.

Например, если A, B, C, D — четыре линии, то можно вообразить, что одна из них D служит мерой; тогда, будут ли A, B, C соизмеримы или несоизмеримы, во всех случаях они выражаются числами, в первом случае соизмеримыми (рациональными), во втором несоизмеримыми (иррациональными)».

То, что до чисто арифметического обоснования теории иррациональных чисел математики и после Лежандра чувствовали себя несколько неловко в критических местах элементарного курса геометрии, можно видеть в примечаниях учебника Лакруа, в которых он как бы старается оправдаться перед читателем в своих арифметизирующих тенденциях.

«Испытывается, — говорит Лакруа[23], — некоторое затруднение в перенесении на части пространства понятия отношения *в таком виде, как оно понимается для чисел*, в особенности, когда дело идёт о несоизмеримых между собой линиях, но туман рассеется, если обратить внимание на то, что сравнивать две линии возможно, только относя их к общей мере, но тогда их отношение есть действительно число или дробь, члены которой, выражаемые числами, представляют то, сколько раз мера заключается в каждой линии.

Хотя эту дробь невозможно показать в том случае, когда отношение несоизмеримо, но она тем не менее существует».

12. Исправленный Евклид. Комментаторы XVI в. Евклида не *критикуют*, а только *разъясняют*; высказываемое ими мнение выдаётся или за мнение самого Евклида, или за мнение, согласное с его взглядами.

В XVII в. выступает «Euclides restitutus», т. е. исправленный Евклид[24].

Евклида не только комментируют, его же и *исправляют*. Пополняют систему аксиом, исправляют определения, меняют части всей логической постройки и делают попытки полной её перестройки.

Арзе, Озанам, Такэ, Борелли, Саккери, Арно — вот ряд ступеней всё более и более существенных перестроек «Начал». Особенное внимание на книгу V обращает Борелли, чьё имя связано также с историей развития теории параллельных и который оказал очевидное влияние на Саккери. Однако сам он здесь ещё в большей зависимости от Клавия, вероятно, и от других своих современников. В его «Euclides restitutus» интересна и оригинальна книга V «Начал».

Он резко критикует определение 5 книги V.

---

[23]) Lacroix, Éléments de Géométrie de l'École Centrale des Quatres Nations, Paris, 1814.

[24]) Borelius, Euclides restitutus, Romae, 1670. — Saccherius, Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediolani, 1733. См. также Engel-Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, Leipzig, 1895.

Всякое научное определение должно ясно изложить природу определяемой вещи через свойство возможное, истинное, первое и известнейшее, которым определяется вещь и отличается от какого-либо другого объекта.

Свойство же, излагаемое в евклидовом определении, таково, что нельзя узнать, даётся ли оно в действительности, так как мы не можем определить, даётся ли это бесконечное число равнократных, единовременно бóльших и единовременно меньших, так что не знаем верно ли оно...

В определении отношения и пропорции он видит неопределённость и неясность, он подчёркивает неопределённость в определении отношения, указывая на возможность не одной, а многих взаимных зависимостей, и на то, что здесь, а также в определении пропорциональности, дело идёт о *специальном типе* зависимости.

Интересна критика Борелли, относящаяся к так сказать *преждевременной* арифметизации теории пропорций, сводящей определение пропорциональности к равенству экспонентов отношения, получаемых делением (a и b) (c и d).

Говоря в своей критике о числах, Борелли разумеет под иррациональными числами *только корни из рациональных чисел.*

Невозможность представления всякого показателя отношения *таким числом* приводит его к заключению о неверности утверждения, что *всякое иррациональное отношение можно считать числовым.*

Пропорция чисел и геометрических величин у него включаются в *пропорцию величин вообще*, к которым и относятся исправления книги V «Начал».

Соизмеримая пропорциональность, т. е. пропорциональность двух пар соизмеримых величин (a, b), (c, d), им определяется так, как Евклид определяет в книге VII пропорциональность чисел, а именно, по определению 20 книги VII числа называются пропорциональными, когда первое второго, а третье четвёртого равнократные, или равно частные или равно многочастные.

Соединительным звеном между соизмеримой и несоизмеримой пропорциональностью является *определение неравенств отношений*

$$a:b \gtrless c:d,$$

где a и b несоизмеримы, а c и d соизмеримы.

В алгебраической символике это определение выражается так:

$$a \gtrless \frac{m}{n} b,$$

если $c:d = m:n$, где m и n — целые числа.

В словесном выражении: отношение a к b больше (меньше) c к d, если a больше (меньше) той же части b, какую составляет c от d.

Дальше идёт определение $a:b \gtrless c:d$ в случае несоизмеримости a и b, c и d с помощью вспомогательного соизмеримого отношения $e:f$:

$$a:b > c:d,$$

если при $a:b > e:f$ имеем также $c:d < e:f$.

Наконец, пропорциональность определяется таким образом:

$$a:b \text{ не } > c:d \quad \text{и} \quad \text{не } < c:d$$

согласно указанным выше определениям.

Критику Борелли интересно сравнить с критикой Такэ, который становится на совершенно другую точку зрения.

Борелли выступал против определения, основанного на употреблении бесконечного класса; собственно говоря, он старается *исправить Евклида в духе самого Евклида*, признающего только то, что может быть в действительности получено построением. Такэ же старается исправить Евклида так, чтобы он согласовался с логическими идеями того времени, так ярко очерченными в знаменитой порт-рояльской логике (Арно и Николь).

По мнению Такэ[25]), учение Евклида встречает следующие затруднения:

1) Определение 5 равенств отношений, а отсюда и пропорции, даёт не *сущность* пропорции, а только один из её *признаков*.

2) То, что доказывает дальше Евклид относительно пропорций, опираясь на своё определение, не может быть *доказательством* того, что указанное им свойство действительно присуще равенству отношений, распространённому *на абсолютное равенство* отношений, т. е. на то *истинное* равенство отношений, идея которого предваряет всякое математическое исследование.

По мнению Такэ, «одно дело сказать, что отношение площадей треугольников с равными высотами ABC и DEF равно отношению их оснований AC и DF, и другое — сказать, что для всяких целых чисел m, n, для которых $m\,ABC \gtreqless n\,DCF$ также и $m\,AC \gtreqless n\,DF$, и незаконно утверждать, что если второе доказано, то доказано и первое без особого оправдания евклидова определения пропорций».

Но определение самого Такэ равенства отношений оказывается столь же мёртвым, как и определение отношения Евклида. «Два отношения (a к b и c к d) подобны или равны, когда предыдущее a равно (aeque) или так же (т. е. не больше и не меньше) *содержит* своё последующее b как предыдущее c содержит последующее d, или короче, сколько b содержится в a, столько d в c.

Входящее сюда понятие «содержания» Такэ разъясняет для случая рациональных отношений, а для иррациональных он не даёт разъяснения, считая это само собой понятным: «Если про-

[25]) См. прим. 21.

порция иррациональная, то эта вещь не может и не должна разъясняться».

Так как из своего мёртвого определения Такэ ничего не может извлечь, то ему приходится к нему приклеить *аксиому*, которую потом Дешаль[26]) возводит в определение, заменяющее евклидово.

«Отношения (a к b) и (c к d) равны, если последующие (т. е. b к d) и их подобные части, каковы бы они ни были, равное число раз содержатся в предыдущих (т. е. a к c)».

В алгебраической символике это истолковывается таким образом: четыре величины a, b, c, d пропорциональны

$$a:b=c:d,$$

если, обозначая через (b_1d_1), (b_2d_2), ..., (b_jd_j) такие величины, что

$$b=m_jb_j,\quad d=m_jd_j,$$

где m_j — целые числа, а через a_j, c_j — остатки, определяемые равенствами:

$$a=n_jb_j+a_j,\quad c=p_jd_j+c_j,$$

где $a_j<b_j$, $c_j<d_j$, а n_j и p_j — целые числа, то одновременно будет

$$n_j=p_j.$$

Что касается системы положений теории пропорций, то средством её упрощения у Такэ является обычный в XVII в. способ *обращения доказывавшихся раньше положений в очевидные истины*.

В этом отношении усматривается большое сходство между *рационалистами* XVII в. и современными *логистами*; разница лишь в том, что ту роль, которую раньше играли *аксиомы*, играют теперь *определения*, к которым не предъявляется иных требований, чем те, чтобы из них могли быть извлечены наперёд намеченные теоремы.

К определению 4 Евклида Такэ присоединяет опять в качестве аксиомы положение о равенстве величин, имеющих к одной и той же величине (или к равным) одно и то же отношение, обратное ему, затем аналогичное, относящееся к неравенству и, наконец, положение: отношения, равные одному и тому же отношению, равны между собой.

Не вполне ясны взгляды Такэ на предложения 12 и 15. Он не называет их аксиомами, но поступает с ними так, как если бы это были теоремы, доказательства которых так просты, что их и не стоит приводить.

О предложении 15: «Две величины имеют между собой такое же отношение, какое имеют их равнократные», он говорит: это

---

[26]) Deschales, Elementa Euclidis lib. octo, 1673. Франц. изд. 1672, 1675 и других годов.

положение можно было бы принять и за аксиому, если только правильно понимать, что такое подобные части.

Вне сомнения такое обращение целого ряда раньше доказывавшихся положений в очевидные истины обусловливается не одним методическим стремлением к сокращённой теории пропорций для более лёгкого усвоения её начинающими изучать Евклида; следует при объяснении этого явления учесть и то, что эти положения с постепенной арифметизацией уже стали приобретать, хотя и не в сильной степени, ту *очевидность*, которая раньше им не была присуща.

Область понятия числа далеко расширяется за пределы евклидовых, т. е. целых чисел.

Общность формальных законов, присущая отношениям и числам, прекрасно сознавалась математиками этой эпохи; она, можно сказать, каждую минуту вставала перед их глазами, так что они против воли приучались смотреть на отношение как на число; вследствие создавшегося через это настроения ума и возникали эти иллюзии очевидности.

13. Подобие отношений. В некоторых рукописях определение 8 даётся словами: «пропорциональность есть подобие отношений» Ἀναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. Это определение представляет интерес. В некоторых списках стоит вместо ὁμοιότης — ταυτότης, т. е. *тождество* отношений.

Следует думать, что *подобие* представлялось слишком общим, неопределённым понятием, под которое подводилось и подобие отношения сторон и отношения площадей подобных треугольников.

Но затем *тождество* показалось слишком узким понятием; отношение 12:10 не решались считать совершенно тождественным отношению 6:5. Отношение $AB:CD$ казалось тождественным $A_1B_1:C_1D_1$, если $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$, но не тождественным $2AB:2CD$, а только равным. Барроу настаивает на замене ὁμοιότης и ταυτότης словом ἰσότης.

14. Первые шесть предложений книги V «Начал». Книга V Евклида не принадлежит к числу пользующихся особой популярностью; о первых шести предложениях было, например, сказано, что они представляют простые предложения конкретной арифметики, изложенные языком, который делает их неудобопонимаемыми для современного интеллекта. Многие находили, что эта книга представляет определённый параллелизм с арифметическими книгами VII—IX, где ряд предложений книги V доказывается наново специально для чисел. Только в XIX в. книга V Евклида получила признание; знаменитый математик Феликс Клейн признал её одним из перлов античной математической мысли.

Для того чтобы разобраться в этом, нужно хорошо понять принципиальное отличие позиций греков и современных математиков в рассматриваемом вопросе. Книга V посвящена общей теории отношений. Для современного математика всякое отноше-

ние двух величин может быть представлено числом рациональным или иррациональным; поскольку законы математических операций, установленные для целых чисел, распространены и на другие классы чисел, вплоть до иррациональных и комплексных, нет надобности в создании специальной теории операций с отношениями.

Совершенно иное положение было для греческого математика. Для него число — ἀριθμός — это прежде всего целое число, собрание нескольких единиц, к тому же часто определённым образом расположенных (фигурные числа). Пока отношения выражаются целыми числами, всё обстоит благополучно. Но как быть, когда отношения перестанут выражаться целыми числами?

Все данные говорят за то, что идея целочисленных отношений зародилась в древнем Египте; мы встречаем целочисленные отношения в архитектурных деталях гробницы Менеса (1-я династия) и пирамид. В дальнейшем целочисленные отношения сделались основой модулярной теории, которая почти одновременно появляется как в греческой, так и персидской архитектуре. В Персии она появилась после завоевания Египта Камбизом вместе с пленными египетскими архитекторами, введшими целый ряд египетских мотивов в архитектуру дворцов и царских могил Ахеменидов. В Греции поборником идеи числа, как выражающего истинную сущность вещи, является Пифагор, родина которого Самос была при Поликрате в теснейших отношениях с Египтом.

Но уже очень скоро греки поняли, что далеко не все элементы правильных геометрических фигур могут быть выражены не только целыми числами, но даже и отношениями целых чисел, нашими дробями. Как тогда надо было ставить определение отношения двух величин?

Пока отношения выражались целыми числами, для определения отношения двух длин нужно было меньшую повторять кратным столько раз, сколько нужно для того, чтобы она сравнялась с большей. Если это число равно m, то меньшая длина, взятая m раз, будет равна большей, взятая $m-1$ раз меньше её, взятая $m+1$ раз больше.

Нетрудно видеть, как нужно изменить определение отношения в случае дробного числа. Если отношение двух длин a и b выражается дробным числом $\frac{m}{n}$, то если мы возьмём a кратным n раз, а b кратным m раз, то полученные длины na и mb будут равны друг другу; вместе с тем, мы возьмём b кратным $m-1$ или $m+1$ раз, то получим длину, соответственно меньшую или большую длины na. Таким образом, для определения дробных отношений мы пользуемся равенствами

$$(m-1)\,b < na,$$
$$mb = na,$$
$$(m+1)\,b > na.$$

В том случае, когда длины a и b несоизмеримы, среднее равенство $mb = na$ невозможно, но оба крайних продолжают оставаться справедливыми. Их то и принял Евдокс, которому приписывается авторство основной части предложений книги V, в качестве определения отношения двух величин в самом общем случае.

Вся сущность книги V содержится в следующих определениях:

«(4). Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они взятые кратно могут превзойти друг друга.

(5). Говорят, что величины *находятся в том же отношении:* первая ко второй и третья к четвёртой, если равнократные первой и третьей одновременно больше или одновременно меньше равнократных второй и четвёртой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответствующем порядке.

(7). Если же из равнократных кратное первой превосходит кратное второй, а кратное третьей не превосходит кратного четвёртой, то говорят, что первая ко второй *имеет большее отношение*, чем третья к четвёртой».

Значение определения 4, равносильного так называемой аксиоме Архимеда, было понято только в XIX в.; 5 же и 7 определения по существу равнозначны определениям равенства и неравенства иррациональных чисел при помощи метода сечений Дедекинда.

В первых шести предложениях книги V рассматриваются элементарные свойства отношений.

Первые два в современной форме можно выразить так:

«Если ma, mb, $mc\dots$ суть любые равнократные a, b, c, ..., то

$$ma + mb + mc + \dots = m(a + b + c + \dots)».$$

«Если ma, na суть некоторые кратные от a, а mb, nb суть такие же кратные от b, то $ma + na = (m + n)a$ и $mb + nb = (m + n)b$ будут одинаковыми кратными соответственно от a и b». Можно сказать, что оба эти предложения выражают распределительные законы умножения в том случае, когда сомножителями являются числа m, n и геометрические величины a, b, c, ...; при этом предложение 1 выражает распределительный закон слева, а предложение 2 распределительный закон справа. Для отрезков распределительный закон был установлен в предложении 1 книги II, для чисел же в предложениях 5 и 6 книги VII.

В другой форме эти предложения могут быть выражены формулами:

Предложение 1. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

Предложение 2. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{b} = \frac{f}{d}$, то $\frac{a+e}{b} = \frac{c+f}{d}$.

Предложения 3 и 4 касаются умножения равных отношений на целые и дробные числа.

Предложение 3 в современной форме выразится так:

«Если ma и mb суть равнократные a и b, то $n(ma)$ и $n(mb)$ будут равнократными a и b».

Или:

$$«\text{Если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } \frac{ma}{b}=\frac{mc}{d}».$$

Последняя форма приближает к выражению предложения 4:

$$«\text{Если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } \frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}».$$

Первые три предложения доказываются очень просто при помощи разложения предыдущих членов на величины, равные последующим, при доказательстве же предложения 4 применяется определение 5.

Сущность доказательства заключается в следующем:

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то при любых p и q будет (определение 5)

$$\begin{aligned} &\text{если } pma > qnb, \text{ то и } pmc > qnd,\\ &\text{если } pma = qnb, \text{ то и } pmc = qnd,\\ &\text{если } pma < qnb, \text{ то и } pmc < qnd. \end{aligned}$$

Поскольку же p и q суть какие угодно числа, то из этих неравенств по тому же определению 5 следует

$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}.$$

Предложение 5, которое в современной формулировке можно выразить так:

$$«\text{Если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}»,$$

или же в виде равенства:

$$ma-mb=m(a-b),$$

представляет распространение предложения 1 на случай вычитания (или отнятия) отрезка.

При доказательстве Евклид употребляет следующий прием.

Дано: $\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CI}$. Нужно доказать: $\frac{BE}{ID}=\frac{AB}{CD}$.

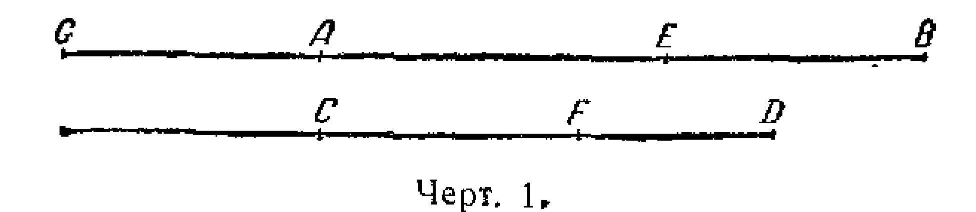
Построим CH, удовлетворяющее пропорции

$$\frac{AE}{CI}=\frac{EB}{CH},$$

т. е. возьмём четвёртую пропорциональную для AE, CI и EB — построение, которое даже для прямых линий разбирается только в предложении 9 книги VI; выполнимость этого построения для величин Евклидом не доказана. Построивши эту величину CH, Евклид доказывает, что она равна остатку ID после вычитания CI из CD.

Так как употребление построений, возможность которых ещё не доказана, совершенно не в духе Евклида, то Симсон даёт другое доказательство, заимствованное им из перевода Евклида с арабского, сделанного Кампаном. Доказательство это таково [Хиэс (Heath), т. II, стр. 146].

«Возьмём AG таким же кратным FD, каким AE будет от CF (черт. 1); тогда AE будет таким же кратным от CF, как EG от CD (V, 1). Но AE, согласно предположению, такое же кратное от CF, как AB от CD; значит, EG равно AB.



Черт. 1.

Отнимем общую величину AE, остаток AG будет равен остатку EB. Значит, поскольку AE такое же кратное от CF, как AG от FD и поскольку AG равно EB, то AE есть такое же кратное от CF, как EB от FD.

Но AE есть такое же кратное от CF, как AB от CD; значит, EB есть такое же кратное от FD, как AB от CD; что и требовалось доказать».

Шестое предложение так же относится ко второму, как пятое к первому. В современной формулировке его можно дать так: «Если даны ma, mb и na, nb, то

$$ma - na = (m - n)\,a \quad \text{и} \quad mb - nb = (m - n)\,b».$$

В доказательстве Евклид различает случаи, когда $m - n$ равно или не равно единице. При этом он употребляет тот же приём, что и при доказательстве предложения 5: он сначала берёт отрезок, удовлетворяющий доказываемому равенству (в нашем случае прикладывает к CD слева CK, равную I), и затем доказывает, что эта CK будет равна получаемому остатку GD от вычитания CG из CD.

15. Связи между членами равных и неравных отношений. Четыре предложения с 7 по 10 образуют единую группу и по особенностям формулировки (в каждом предложении доказываются и прямая и обратная теоремы), и по методу доказательства, основанному на непосредственном или посредственном применении определений 5 и 7.

В предложении 7 доказывается, что равные величины имеют одинаковые отношения к одной и той же величине и наоборот. Идея доказательства состоит в том, что поскольку одинаковые кратные равных величин тоже равны между собой, то они одновременно будут больше, равны или меньше какой-нибудь кратной третьей величины, т. е. согласно определению 5 будут стоять к этой величине в одинаковых отношениях.

В издании Гейберга после этой теоремы идёт следствие, которое в некоторых манускриптах помещается после 4-го предложения. По существу, это следствие, пытающееся оправдать операцию «обращая» (ἀνάπαλιν — определение 13), неуместно ни после 4 ни после 7 предложений. Действительно, предложение 7 касается *трёх* величин:

$$\text{если } A = B, \text{ то } \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \text{ и } \frac{C}{A} = \frac{C}{B},$$

тогда как операция «обращая» требует *четырёх* величин, составляющих пропорцию:

$$\text{если } a:b = c:d, \text{ то } b:a = d:c.$$

Предложение 8 касается неравных величин; в современной форме оно может быть выражено так:

$$\text{если } a > b, \text{ то } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ и } \frac{c}{b} > \frac{c}{a}.$$

Пользуясь определением 7, мы должны доказать, что существуют такие равнократные a и b, что первая превосходит, а вторая не превосходит какой-то кратной c, т. е.

$$ma > nc \geqslant mb.$$

Евклид различает два случая. Поскольку $a > b$, то остаток $a - b$ может быть больше или меньше b.

Рассматриваем первый случай, когда $a - b = d < b$.

Повторяем d столько раз кратным, чтобы превзойти c; пусть

$$md > c.$$

Затем образуем такие же кратные

$$mb \text{ и } m(b + d) = ma.$$

Теперь находим такое кратное c, чтобы было

$$(n-1)c < mb < nc.$$

Полученное кратное nc будет превышать некоторое кратное mb

второй величины b, но оно не превзойдёт такого же кратного ma от a. Действительно,

$$ma = mb + md > (n-1)c + c = nc,$$

а это показывает, что $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Аналогично рассматривается и второй случай, когда $a - b = d > b$; в этом случае повторяется кратным b, и мы имеем

$$mb > c, \quad m(b+d) = ma,$$
$$(n-1)c < mb < nc,$$
$$ma = mb + md > (n-1)c + c = nc,$$

так как $d > b$, а $mb > c$.

Предложение 9, представляющее обратное по отношению к предложению 7, легко доказывается от противного при помощи предложения 8.

При доказательстве же предложения 10, являющегося обратным по отношению к предложению 8, и которое Евклид доказывает от противного, им была допущена ошибка, раскрытая Симсоном.

Действительно, у Евклида ход рассуждений таков: дано, что

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{C};$$

требуется доказать, что $A > B$.

Доказательство от противного распадается на два этапа: сначала Евклид доказывает, что A не может быть равным B, а затем, что A не может быть меньше B: «ибо тогда A имела бы к C меньшее отношение, чем B к C (предложение 8). Она же не имеет. Значит, A будет больше B».

Вот здесь-то и появляется затруднение. Если мы говорим, что A имеет к C меньшее отношение, чем B к C, то это значит, что существуют такие равнократные A и B и такое кратное C, что 1) взятое кратное B больше кратного C и 2) что такое же кратное от A не больше кратного C. Для того чтобы исключить эту возможность, нужно доказать, что если какое-нибудь кратное B будет больше данного кратного C, то такое же кратное A будет *всегда* больше данного кратного C.

Если прибегнуть к методу сечений Дедекинда, то это рассуждение будет равносильно следующему:

«Пусть будут два числа A и B, производящих сечения

$$\ldots a \ldots < A < \ldots a' \ldots$$
$$\ldots b \ldots < B < \ldots b' \ldots$$

Если $A > B$, то все a' будут больше всех b, но некоторые из b' могут быть и больше a'.

Симсон заменяет евклидовское доказательство следующим [см. Хизс, стр. 157].

«Пусть A имеет к C отношение большее, чем B к C, A больше B.

Действительно, поскольку A имеет к C отношение большее, чем B к C, то-есть некоторые равнократные A, B и некоторое кратное C такие, что *кратное* A *больше* кратного C, но кратное B *не* больше его (определение 7).

Возьмём их, и пусть D, E будут равнократные от A, B, и F кратное C, такие, что D больше, чем F, но E не больше, чем F.

Значит, D больше, чем E.

И поскольку D, E суть равнократные A, B и D больше, чем E, то A больше, чем B.

Далее, пусть C имеет к B отношение большее, чем к A; B меньше A.

Действительно, тогда есть некоторое кратное F от C и некоторые равнократные E и D от B и A, такие, что F больше, чем E, но не больше, чем D (определение 7).

Значит, E меньше D; и поскольку E и D равнократные от B и A, значит, B меньше A».

Доказательство Симсона основывается на аксиоме, что если из двух равнократных величин одно будет больше другого, то такое же отношение будет и между теми величинами, равнократными которых они являются.

16. Дальнейшие свойства отношений. Поскольку риторическая форма изложения Евклида представляет определённые трудности для понимания, то в дальнейшем мы будем давать доказательства их в современной математической форме.

Предложение 11. Если отношения $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ и $\frac{C}{D}=\frac{E}{I}$, то $\frac{A}{B}=\frac{E}{I}$.

Берём

$$H=mA,\quad G=mC,\quad K=mE,$$
$$L=nB,\quad M=nD,\quad N=nI.$$

Так как

$$A:B=C:D,$$

то, согласно определению 5, мы должны иметь **одновременно**

$$mA>nB,\quad mC>nD,$$
$$mA=nB,\quad mC=nD,$$
$$mA<nB,\quad mC<nD.$$

Далее, из равенства отношений

$$C:D=E:I$$

следует, что одновременно

$$mC > nD, \quad mE > nI,$$
$$mC = nD, \quad mE = nI,$$
$$mC < nD, \quad mE < nI,$$

значит, одновременно

$$mA > nB, \quad mE > nI,$$
$$mA = nB, \quad mE = nI,$$
$$mA < nB, \quad mE < nI.$$

Согласно же определению 5 это обозначает, что

$$A:B = E:I.$$

Предложение 12. Если дано, что

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{I},$$

то

$$\frac{A}{B} = \frac{A+C+E}{B+D+I}.$$

Берём

$$H = mA, \quad G = mC, \quad K = mE,$$
$$L = nB, \quad M = nD, \quad N = nI.$$

Равенства

$$A:B = C:D = E:I$$

равносильны одновременному существованию трёх групп соотношений:

$$mA > nB, \quad mC > nD, \quad mE > nI,$$
$$mA = nB, \quad mC = nD, \quad mE = nI,$$
$$mA < nB, \quad mC < nD, \quad mE < nI$$

или

$$mA > nB, \quad mA + mC + mF > nB + nD + nI,$$
$$mA = nB, \quad mA + mC + mE = nB + nD + nI,$$
$$mA < nB, \quad mA + mC + mE < nB + nD + nI.$$

Согласно предложению 1 эти соотношения могут быть переписаны в виде:

$$mA > nB, \quad m(A + C + E) > n(B + D + I),$$
$$mA = nB, \quad m(A + C + F) = n(B + D + I),$$
$$mA < nB, \quad m(A + C + E) < n(B + D + I).$$

Эти же соотношения, согласно определению 5, равносильны пропорции

$$\frac{A}{B}=\frac{A+C+E}{B+D+I}.$$

Эта теорема употреблялась Аристотелем («Этика Никомахова», V, 7, 1131 b 14) в форме: «как один к одному, так и все ко всем».

Предложение 13. Если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ и $\frac{C}{D}>\frac{E}{I}$, то $\frac{A}{B}>\frac{E}{I}$.

Поскольку $C:D>E:I$, то, согласно определению 7, должны быть такие равнократные от C и E

$$H=mC, \quad G=mE$$

и другие равнократные от D и I

$$K=nD, \quad L=nI,$$

что одновременно должны существовать равенства

$$mC>nD \quad \text{и} \quad mE\leqslant nI.$$

Из равенства же отношений $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ следует, что одновременно должно быть

$$M=mA \gtreqless nB=N \quad \text{и} \quad mC \gtreqless nD.$$

Это значит, что при

$$mA>nB$$

будет

$$mE\leqslant nI,$$

т. е., согласно определению 7,

$$\frac{A}{B}>\frac{E}{I}.$$

Предложение 14. Если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ и $A>C$, то и $B>D$.

Действительно, из неравенства $A>C$ по предложению 8 следует, что

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{B}$$

или

$$\frac{C}{D}>\frac{C}{B}.$$

Согласно же предложению 10 это значит, что

$$B>D.$$

Аналогично доказываются и случаи:

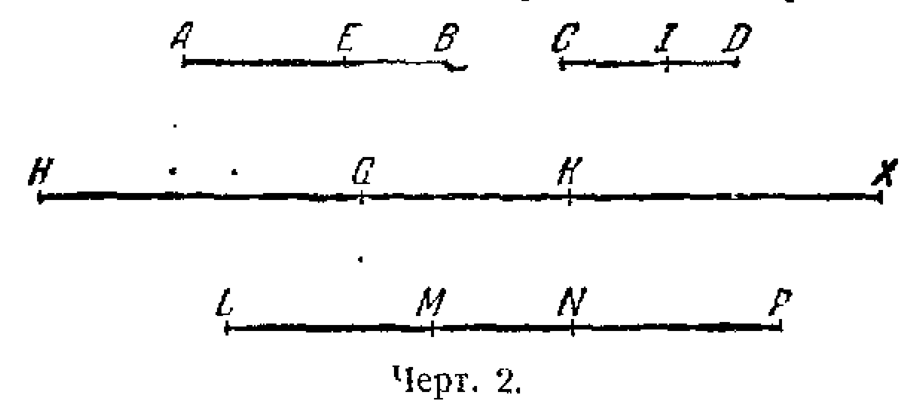
$$\text{если } A = C, \text{ то } B = D,$$
$$\text{если } A < C, \text{ то } B < D.$$

Предложение 15, соответствующее формуле

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

доказывается, как предложения 1 — 3, путём разложения на части и подсчёта количества *найденных частей* (*с применением предложений* 7 и 12).

17. Производные пропорции. При переводе книги V Евклида известные трудности представило то обстоятельство, что на русском языке нет установившихся терминов для перевода грече-



Черт. 2.

ских συνθέντι, διελόντι и т. д. В настоящем переводе взята терминология, которой пользовался С. Я. Лурье при переводе «Геометрии неделимых» Кавальери, но во избежание недоразумений соответствующие термины поставлены в кавычки.

Предложение 16. Если $A:B = C:D$, то и $A:C = B:D$ (операция «перестановки»).

Берём

$$E = mA, \quad I = mB, \quad H = nC, \quad G = nD.$$

По предложению 15

$$A:B = mA:mB = E:I,$$
$$C:D = nC:nD = H:G.$$

По предложению 11

$$E:I = H:G,$$
$$mA:mB = nC:nD.$$

По предложению 14 мы можем заключить, что

$$\text{если } mA > nC, \text{ то и } mB > nD,$$
$$\text{если } mA = nC, \text{ то и } mB = nD,$$
$$\text{если } mA < nC, \text{ то и } mB < nD.$$

Согласно же определению 5 это означает

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}.$$

Предложение 17. Если $\frac{AE+EB}{BE}=\frac{CI+ID}{DI}$, то и $\frac{AE}{EB}=\frac{CI}{ID}$.

Помещаем чертёж к этому предложению, отсутствующий в тексте Гейберга (черт. 2).

Берём

$$HG=mAE,\quad GK=mEB,\quad KX=nEB,$$
$$LM=mCI,\quad MN=mID,\quad NP=nID.$$

Согласно предложению 1 и 2,

если $HG=mAE$ и $GK=mEB$, то $HK=mAB$,
если $LM=mCI$ и $MN=mID$, то $LN=mCD$,
если $GK=mEB$ и $KX=nEB$, то $GX=(m+n)EB$,
если $MN=mID$ и $NP=nID$, то $MP=(m+n)ID$.

Теперь из пропорции

$$AB:BE=CD:DI$$

вытекает, согласно определению 5,

$$\text{если } mAB \gtreqless (m+n)EB, \text{ то } mCD \gtreqless (m+n)ID,$$

что равносильно пропорции

$$HK:GX=LN:MP.$$

Предположим, что имеет место первый случай

$$mAB=HK>(m+n)EB=GX,$$
$$HG+GK>GK+KX,$$
$$HG>KX.$$

Точно так же, если

$$LN=LM+MN>MP=MN+NP,$$
$$LM>NP.$$

Таким образом, мы видим, что

$$\text{если } HG>KX, \text{ то и } LM>NP,$$

и аналогично докажем, что

$$\text{если } HG = KX, \text{ то и } LM = NP,$$
$$\text{если } HG < KX, \text{ то и } LM < NP.$$

Поскольку же

$$HG = mAE, \quad LM = mCI,$$
$$KX = nEB, \quad NP = nID,$$

то вышеприведённые равенства по определению 5 выражают, что имеет место пропорция

$$AE : EB = CI : ID.$$

Доказательство предложения 18, являющегося обратной теоремой по отношению к предложению 17, ведётся методом доказательства от противного, что требует опять предварительного построения четвёртой пропорциональной для величин AB, BE и CD, о чём см. ниже.

Предложение 19. Если $AB:CD = AE:CI$, то

$$(AB - AE):(CD - CI) = AB:CD.$$

Из пропорции

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CI}$$

заключаем на основании предложения 16

$$\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{CI},$$

затем на основании предложения 17

$$\frac{AB - AE}{AE} = \frac{CD - CI}{CI},$$

а отсюда на основании предложений 16 и 11

$$\frac{AB - AE}{CD - CI} = \frac{AE}{CI} = \frac{AB}{CD}.$$

Предложение 19 заканчивается фразой, поставленной у Гейберга в скобки и предваряющей «следствие».

Из соотношения

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{ID}$$

перестановкой получается пропорция

$$\frac{AB}{BE} = \frac{CD}{DI}, \qquad (1)$$

которая в дальнейшем сравнивается с ранее установленной пропорцией

$$\frac{AB}{AE}=\frac{CD}{CI},$$

или, что то же,

$$\frac{AB}{AB-BE}=\frac{CD}{CD-DI}, \qquad (2)$$

получаемой из (1) при помощи «переворачивания» (определение 16).

Это рассуждение имеет определённый дефект: доказано лишь, что пропорции (1) и (2) вытекают из

$$AB:CD=AE:CI,$$

но не то, что пропорция (2) вытекает из (1), как утверждается в следствии. Гейберг считает, что следствие принадлежит Евклиду, а поставленная в скобки вводящая фраза является позднейшей интерполяцией. Однако вполне возможно, как думает Хиэс, что и это следствие наряду со следствием после предложения 6 есть позднейшая вставка, сделанная с целью оправдать существование операций ἀνάπαλιν и ἀναστρέψαντι, для которых нет специальных предложений, а имеются только голые определения 13 и 16 в начале книги V.

18. Аксиома Клавия. Евклид при доказательстве предложения 18 пользуется одной аксиомой так же неявно, как он пользуется аксиомой Архимеда. Аксиому эту вскрывает Клавий [27]).

Постулируется существование четвёртой пропорциональной, т. е. существование такого x, что при данных a, b, c:

$$x:a=b:c.$$

Доказательство того, что из

$$a:b=c:d \text{ следует } (a+b):b=(c+d):d,$$

ведётся от противного с помощью предыдущей обратной теоремы, что из

$$(a+b):b=(c+d):d \text{ следует } a:b=c:d.$$

Предполагается, что $(a+b):b$ равно не $(c+d):d$, а какому-то $(c+d):e$, где e больше или меньше d.

В первом случае на основании предложения 17

$$a:b=(c+d-e):e,$$

откуда можно получить

$$(c+d):d=(c+d-e):e,$$

а так как $c+d>c+d-e$, то должны иметь и $d>e$, что противно условию.

---

[27]) Euclidis Elem. libri XV auctore Chr. Clavio, 1574 и 1654.

Таким же образом устраняется и второй случай.

Подлинность этого доказательства оспаривается Робертом Симсоном.

Вайлати[28]) доказывает это утверждение ссылкой на то, что в латинском издании «Начал» Кампануса, составленном по арабскому переводу, содержится другое доказательство, не зависящее от аксиомы Клавия.

В истории эволюции идеи числа это доказательство не играло роли.

Между тем, метод доказательства предложения 18 книги V составляет именно тот метод, который применялся Лежандром для доказательства пропорциональности углов и дуг в случае несоизмеримости и других аналогичных положений.

Аксиома Клавия должна была оказать большой толчок в направлении *арифметизации* геометрии.

Как мы выше заметили, едва ли сам Евклид включал числа и геометрические величины в один класс. Но такое включение совершенно определённо совершилось при создании *буквенного счисления.*

Для Евклида пропорция (равенство отношений) $a:b = c:d$ имеет место или для геометрических величин (книга V) или для чисел (книга VII). Для позднейших математиков (a, b) (c, d) суть величины вообще (*magnitudines in genere*); может быть, что (a, b) — геометрические величины, а (c, d) — числа, но при этом, если (a, b) одного рода, то и (c, d) одного рода.

Аксиома Клавия тогда постулирует возможность для геометрических величин (b, c) и для числа a найти такое число, что

$$x:a = b:c.$$

Возьмём $x = 1$ и мы будем приведены к необходимости признать всякое отношение даже несоизмеримых величин как отношение числа к единице.

Если за c принять *единицу меры*, то результат измерения $b:1$ представляется отношением числа к 1. Остаётся только отождествить отношение с числом, чтобы получить взаимно однозначное соответствие между геометрическими величинами и характеризующими их числами.

19. Окончание предложения 19. В некоторых рукописях после окончания следствия идёт следующее место, исключённое Гейбергом из текста Евклида и отнесённое в приложение.

> «Эти же отношения имеют место и для равнократных величин и для пропорций, поскольку если первая второй будет такой же равнократной, как третья четвёртой, то получится, что как первая ко второй, так и третья к четвёртой. Однако обращать этого нельзя; если было бы, что как первая ко второй, так и третья к четвёртой, то не

---

[28]) Энриквес, Элементарная математика, СПБ., 1913, статья Вайлати.

всегда получится, что первая второй и третья четвёртой будут равнократны, как, например, бывает в случае полуторного отношения, или равного единице с четвертью и других подобных, что и требовалось доказать».

20. Сложные отношения. Следующие четыре предложения книги V «Начал», а именно, 20—23, посвящены обоснованию теории сложных пропорций (определения 17 и 18).

Предложение 20. Если

$$A:B = D:E,$$
$$B:C = E:I,$$

то

$$\text{если } A > C, \text{ то и } D > I,$$
$$\text{если } A = C, \text{ то и } D = I,$$
$$\text{если } A < C, \text{ то и } D < I.$$

Если $A > C$, то по предложению 8

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{B},$$

или, поскольку $\frac{A}{B} = \frac{D}{E}$:

$$\frac{D}{E} > \frac{C}{B}.$$

Но на основании следствия из предложения 7

$$\frac{C}{B} = \frac{I}{E}$$

и, значит,

$$\frac{D}{E} > \frac{I}{E}.$$

По предложению 10 это требует, чтобы

$$D > I.$$

Аналогично доказываются и оба остальных неравенства.

Предложение 21. Если

$$A:B = E:I,$$
$$B:C = D:E,$$

то

$$\text{если } A > C, \text{ то и } D > I,$$
$$\text{если } A = C, \text{ то и } D = I,$$
$$\text{если } A < C, \text{ то и } D < I.$$

Из неравенства $A > C$ на основании предложения 8 получаем

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{B}.$$

Но $\frac{A}{B} = \frac{E}{I}$, значит,

$$\frac{E}{I} > \frac{C}{B}.$$

Из равенства $\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ следует $\frac{C}{B} = \frac{E}{D}$, значит,

$$\frac{E}{I} > \frac{E}{D},$$

откуда по предложению 10

$$D > I.$$

Предложения 20 и 21 являются леммами, служащими для доказательства соответственно предложений 22 и 23.

Предложение 22. Если

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E}, \quad \frac{B}{C} = \frac{E}{I},$$

то

$$\frac{A}{C} = \frac{D}{I}.$$

Берём

$$H = mA, \quad K = nB, \quad M = pC,$$
$$G = mD, \quad L = nE, \quad N = pI.$$

Из пропорций

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E}, \quad \frac{B}{C} = \frac{E}{I}$$

следует (предложение 4)

$$\frac{mA}{nB} = \frac{mD}{nE}, \quad \frac{nB}{pC} = \frac{nE}{pI},$$

или

$$H:K = G:L, \quad K:M = L:N.$$

По предложению 20 мы имеем:

если $H > M$, то и $G > N$,
если $H = M$, то и $G = N$,
если $H < M$, то и $G < N$,

или

$$mA \gtreqless pC, \quad mD \gtreqless pI,$$

а это, согласно определению 5, эквивалентно пропорции:

$$\frac{A}{C}=\frac{D}{I}.$$

Предложение 23. Если $\frac{A}{B}=\frac{E}{I}$ и $\frac{B}{C}=\frac{D}{E}$, то $\frac{A}{C}=\frac{D}{I}$.

Берём

$$H=mA, \quad G=mB, \quad K=mD,$$
$$L=nC, \quad M=nE, \quad N=nI.$$

По предложению 15 имеем

$$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}=\frac{H}{G}, \quad \frac{E}{I}=\frac{nE}{nI}=\frac{M}{N}$$

или вследствие пропорции $A:B=E:I$

$$\frac{H}{G}=\frac{M}{N}.$$

Далее из пропорции $B:C=D:E$ получаем «переставляя»

$$\frac{B}{D}=\frac{C}{E}.$$

Но

$$\frac{B}{D}=\frac{mB}{mD}=\frac{G}{K}, \quad \frac{C}{E}=\frac{nC}{nE}=\frac{L}{M},$$

откуда

$$\frac{G}{K}=\frac{L}{M},$$

или «переставляя»

$$\frac{G}{L}=\frac{K}{M}.$$

Сопоставляя равенства

$$\frac{H}{G}=\frac{M}{N} \text{ и } \frac{G}{L}=\frac{K}{M},$$

мы, согласно предложению 21, имеем,

если $H>L$, то и $K>N$,
если $H=L$, то и $K=N$,
если $H<L$, то и $K<N$.

Эти равенства выражают, что

$$\text{если } mA \gtreqless nC, \text{ то } mD \gtreqless nI,$$

а это по определению 5 означает, что существует пропорция

$$\frac{A}{C} = \frac{D}{I}.$$

21. Два последних предложения книги V. Предложение 24 касается общих свойств отношений, представляя по существу иную форму выражения предложения 2, но помещается здесь, поскольку для своего доказательства требует наличности предложения 22.

Предложение 24. Если $\frac{AB}{C} = \frac{DE}{I}$ и $\frac{BH}{C} = \frac{EG}{I}$, то

$$\frac{AB + BH}{C} = \frac{DE + EG}{I}.$$

Из пропорции $\frac{BH}{C} = \frac{EG}{I}$ получаем «обращая»:

$$\frac{C}{BH} = \frac{I}{EG}.$$

Теперь, сравнивая пропорции

$$\frac{AB}{C} = \frac{DE}{I} \quad \text{и} \quad \frac{C}{BH} = \frac{I}{EG},$$

мы по предложению 22 будем иметь

$$\frac{AB}{BH} = \frac{DE}{EG},$$

а это после применения предложения 18 даст

$$\frac{AB + BH}{BH} = \frac{DE + EG}{EG}.$$

Сопоставляя же это равенство с пропорцией

$$\frac{BH}{C} = \frac{EG}{I}$$

и применяя опять предложение 22, будем иметь

$$\frac{AB + BH}{C} = \frac{DE + EG}{I}.$$

Различие между предложениями 2 и 24 заключается в том, что в формулировке предложения 2 первый член AB представляет некоторое кратное второго C, тогда как в формулировке предложения 24 это ограничение снимается: отношение $AB:C$ может выражаться *любым числом, а не только целым*.

Предложение 25. Если $\frac{AB}{CD}=\frac{E}{I}$ и $AB>CD$, $AB>E$, то

$$AB+I>CD+E.$$

Берём

$$AH=E, \quad CG=I$$

и переписываем основную пропорцию в виде

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AH}{CG}.$$

По предложению 19

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB-AH}{CD-CG}=\frac{HB}{GD}.$$

Поскольку же $AB>CD$, то и

$$HB>GD.$$

Теперь из равенств

$$AH=E \text{ и } CG=I$$

следует

$$AH+I=E+CG,$$

или

$$AH+I+HB>E+CG+GD,$$

т. е.

$$AH+HB+I>CG+GD+E$$

$$AB+I>CD+E.$$

22. Неравенство отношений. В определении 7 Евклид даёт формулировку неравенства отношений:

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d},$$

если можно найти такие два целых числа m и n, что одновременно будет

$$ma>nc$$

и

$$mb<nd.$$

В предложениях 13, 14, 20, 21 и 25 он доказывает ряд свойств, касающихся неравенства отношений:

1) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d}>\frac{e}{f}$, то $\frac{a}{b}>\frac{e}{f}$ (предложение 13).

2) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то при $a>c$ $b>d$,

$a=c$ $b=d$ (предложение 14).

$a<c$ $b<d$

3) Если $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$, $\frac{b}{c}=\frac{e}{f}$ и $a>c$, то $d>f$ (предложение 20).

4) Если $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, $\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$ и $a>c$, то $d>f$ (предложение 21).

5) Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, и $a>b$, то $a+d>b+c$ (предложение 25).

Наше изложение арифметической теории пропорций в известном смысле противоположно евклидову.

Мы начинаем с предложений 22 и 23.

Если $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$ и $\frac{b}{c}=\frac{e}{f}$, то $\frac{a}{c}=\frac{d}{f}$ (предложение 22).

Если $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$ и $\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$, то $\frac{a}{c}=\frac{d}{f}$ (предложение 23),

сводя доказательство к простому перемножению дробей:

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c},\quad \frac{d}{e}\times\frac{e}{f}=\frac{d}{f}.$$

Из равенства $\frac{a}{c}=\frac{d}{f}$ выводим, что

если $\frac{a}{c}>1$, то $\frac{d}{f}>1$ (предложение 14).

Предложения 22 и 23 доказываются не на основании 20 и 21, а с помощью предложения 14.

Для доказательства мы составляем пропорции:

$$ma:mb=nd:ne,\quad mb:mc=ne:nf,$$

откуда при

$$ma \gtreqless nd \quad \text{и} \quad mb \gtreqless ne,\ mb \gtreqless ne \quad \text{и} \quad nc \gtreqless nf,$$

т. е. при

$$ma \gtreqless nd \quad \text{и} \quad mc \gtreqless nf,$$

иными словами, если

$$a:d = c:f,$$

то и

$$a:c = d:f.$$

Что касается предложения 25, то для его доказательства мы пишем пропорцию

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d};$$

из того, что $a > b$, мы заключаем, что

$$a - c > b - d$$

и, наконец, что

$$a + d > b + c.$$

В книге VII «Собрания» Папп[29]) в значительной мере пополняет Евклида.

Все неравенства Паппа относятся не к геометрическим величинам вообще, но к прямолинейным *отрезкам*. Только для отрезков имеет место положение: произведение крайних равно произведению средних, т. е.

$$ac = bd$$

(см. предложение 16 книги VI), так как только для этого случая имеет смысл произведение ac, представляя «прямоугольник, построенный между a и c». В исследованиях Паппа это положение является основным.

Приводим табличку результатов Паппа.

Предложения 3, 4. Если $a:b \gtrless c:d$, то $(a+b):b \gtrless (c+d):d$.

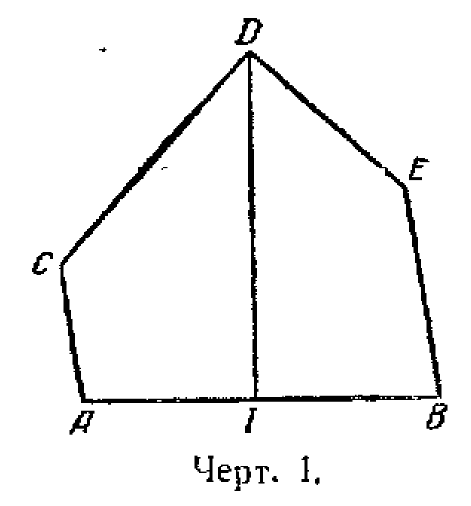
5. Если $a:b > c:d$, то $a:c > b:d$.
6. Если $a:b > c:d$, то $a:(a+b) < c:(c+d)$.
7. Если $a:b > c:d$, то $b:a < d:c$.
8. Если $a:b > c:d$, то $a:b > (a+c):(b+d)$.
9. Если $a:b > c:d$, то $a:b > (a-c):(b-d)$.
11. Если $a > c, b < d$, то $a:c > b:d$.
12. Если $m < a$, то $m:(a+b-m) < a:b$.
16. Если $a:b > c:d$, то $ad > bc$.

29) Pappi, Collectiones, изд. Hultsch, т. 1—3, 1875—1876; т. 2, стр. 687 и сл.

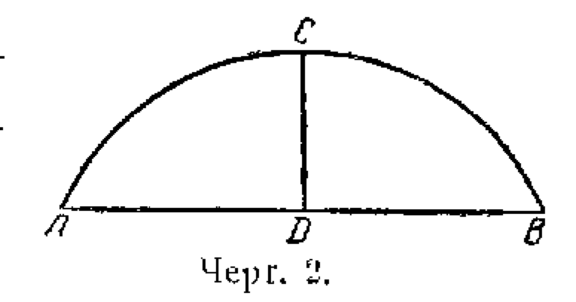
КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ VI

1. Высота. Высота понимается Евклидом и античными математиками *шире*, чем мы понимаем. Высота фигуры — это перпендикуляр, опущенный из вершины на основание; конечно, при этом высота зависит от того, что мы принимаем за *основание*. Вершиной же является высшая точка, т. е. наиболее отдалённая от основания.

Согласно Евклиду можно говорить о высоте любого многоуголь-



Черт. 1.



Черт. 2.

ника. Так, для многоугольника $ABCDE$ высотой является перпендикуляр DI, опущенный из точки D на основание AB (черт. 1).

Архимед [1]) говорит также и о высоте кривой; за основание он принимает хорду, за вершину — наиболее удалённую точку (черт. 2).

В тупоугольном треугольнике ABC (черт. 3) высотой приходится считать перпендикуляр не на основание, а на *продолжение* основания. Поэтому при чисто евклидовом определении высоты нам приходится потом вносить коррективы.

Если наряду с выпуклыми ломаными и кривыми брать и вогнутые, то высота будет уже не совсем определённой, так как

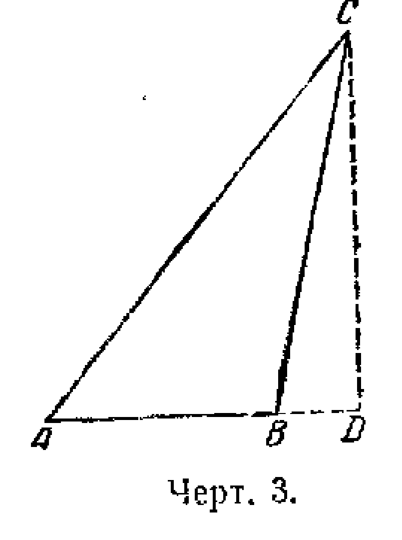
---

1) Archimedes, Opera, ed. Heiberg, Quadratura parabolae, theor. 18.

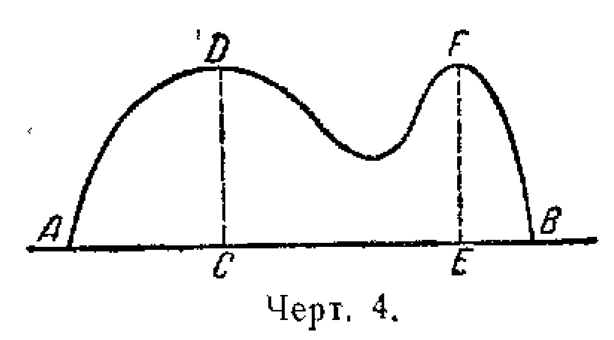
может оказаться не одна, а несколько высот (DC и FE на черт. 4).

Евклид в предложении 1 книги VI пользуется понятием о высоте треугольника. В первой книге он не говорит о высоте параллелограмма, рассматривая «параллелограммы, лежащие между двумя параллельными».

Но в предложении I книги VI наряду с высотой треугольника выступает и высота параллелограмма.



Черт. 3.



Черт. 4.

Стереометрических аналогий: высоту призмы, пирамиды цилиндра, Евклид не определяет, хотя пользуется этими понятиями.

2. Составные отношения. Большую роль в арифметизации теории пропорций сыграло определение 5 книги VI.

Определение это даётся в неясной форме. Поэтому переводчики стараются выяснить его содержание вольным переводом[2]).

Лоренц[3]) даёт следующий свободный перевод: «Из трёх или многих величин a, b, c, d, из которых каждая предыдущая находится в отношении с последующей

$$(a:b),\quad (b:c),\quad (c:d),\ldots$$

отношение первой к последней называется *составленным* из всех этих отношений».

Перевод Ващенко-Захарченко: «Отношение называется составленным из отношений, когда эти отношения, будучи перемножены, дают это отношение». При этом рассматриваемое определение поясняется рядом равенств в современной алгебраической

---

[2]) Euclidis Elementa. Libri XV a Barth. Lamberto latinitati donatae, Basileae, 1558, стр. 157.

[3]) Euclidis Elementa fünfzehn Bücher, übers. v. I. Lorenz, Halle, 1840. — Ващенко-Захарченко, Начала Евклида, Киев, 1880.

символике, в которых отношение мыслится **определённо** *как дробь*:

$$\frac{a}{b}=\frac{k}{e},\quad \frac{b}{c}=\frac{m}{n},\quad \frac{c}{d}=\frac{s}{r},$$

$$\frac{a}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{k}{e}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{r}.$$

Видимо, около этого же понимания вращалась мысль математиков второй половины XVI в., уже отчасти арифметизированная [4]).

Тарталья даёт такой перевод: «Отношение, составленное из отношений, если количества отношений между собой умноженные дают количество».

Евклид нигде не оперирует отношениями как с числами. С его точки зрения не может быть *умножения* отношений. Поэтому, если в тексте Евклида употреблён термин πολλαπλασιασθεῖσαι — умноженные, то, как справедливо замечает Вайлати, определение это не может быть признано подлинным.

Подробно анализируя доказательство предложения 23 книги VI, мы видим, что приведённая выше формулировка Лоренца не охватывает содержания этого определения.

Отношение $a:d$ мыслится составленным не только из $(a:b)$, $(b:c)$, $(c:d)$, но и из $(\bar{a}:\bar{b})$, $(\bar{b}:\bar{c})$, $(\bar{c}:\bar{d})$ при условии, что

$$a:b=\bar{a}:\bar{b},\quad b:c=\bar{b}:\bar{c},\quad c:d=\bar{c}:\bar{d}.$$

Вообще евклидово понятие отношения было ближе к общему *логическому* понятию отношения, лежащему в основе современной математической логики, чем к математическому отношению *чисел*; вероятно, и у самого Евклида не было вполне ясного понимания.

Р. Симсон [5]) даёт пояснения, которые совершенно исключают мысль об *умножении*. Мы приводим их полностью.

1. Пусть даны несколько величин одного и того же рода. Говорят, что первая имеет к последней отношение, составленное из отношения, которое имеет первая ко второй, из отношения второй к третьей и из того, которое имеет третье к четвёртой, и так далее до последней. Например, пусть даны *A*, *B*, *C*, *D*: говорят, «первая *A* имеет к последней *D* отношение, составленное из отношения *A* к *B*, *B* к *C*, *C* к *D*» или «отношение *A* к *D* составлено из отношений *A* к *B*, *B* к *C*, *C* к *D*».

2. Если отношение *A* к *B* то же, что *E* к *F*, а отношение *B* к *C*, то же, что *G* к *H*, а *C* к *D* то же, что *K* к *L*, то гово-

---

[4]) Clavius, Euclidis Elementa, Francf. 1607, т. I, стр. 542, стр. 180.

[5]) R. Simson, Euclidis elem. libri priores, Glasguae, стр. 177, 370.

ряг, что A к D имеет отношение, составленное из отношений, *которые те же*, что E к F, G к H и K к L.

И это разумеют, когда ради краткости говорится, что A к D имеет отношение состоящее из отношения E к F, G к H и K к L.

Здесь нельзя согласиться с тем, что такая форма выражения у Евклида является только условной.

Р. Симсон является *бо́льшим формалистом*, чем Евклид. Он мыслит отношение как какую-то *операцию* (которая затем обращается в операцию деления) и составное отношение не как отношение настолько же простое, как каждое из составляющих.

Так мыслится и отношение и нематематического характера: B отец A, C брат B, D внук C, D родственник A.

3. Точно таким же образом, продолжает Р. Симсон, если отношение M к N то же, что A к D, то *ради краткости* говорится, что отношение M к N тоже составлено из E к F, F к H и K к L (или из A к B, B к C, C к D).

3. **Неудобные обозначения.** Барроу[6]) противится грядущей *арифметизации*. Он очень резко подчёркивает, что математическое отношение (ratio) есть простая зависимость, взаимоотношение (relatio), а вовсе не величина, и отношение можно назвать величиной только *иносказательно*.

Но затем он говорит о том, что всё-таки *вошло в употребление* сравнивать отношения как *абсолютные величины* и говорить о равных, бо́льших и меньших отношениях.

Комментируя предложение 20 книги V, он пишет:

$$\frac{A}{D}=\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{D};$$

здесь под знаком сложения подразумевается знак умножения, так как «сложное» отношение, составленное из нескольких, получается в результате их перемножения.

Говоря об определении 5 книги VI, он говорит: A к C составлено из отношения A к B и B к C, ибо по предложению 20

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{C}=\frac{A}{C},$$

а по определению 5 оно равно $\frac{AB}{BC}$.

Это режущее глаз обозначение, открывающее пропасть между отношением и числом, находится и значительно позже у Гаузера[7]), который пишет:

$$A:H=\overline{A:B}+\overline{B:C}+\overline{C:D}+\overline{D:E}+\overline{E:F}+\overline{F:G}+\overline{G:H}.$$

---

[6]) Barrow, Lectiones habitae anno 1684, кн. V, стр. 25.

[7]) Hauseri, Elementa Matheseos, стр. 56. Pfleiderer's Scholien zum VI Buch, стр. 158.

4. Относительные величины Арно. Интересно проследить колебания в арифметизации отношения. Арно[8]) в своих «Новых элементах Геометрии» идёт значительно дальше своих современников.

Я приведу 10 положений, представляющихся Арно очевидными.

1. $(a+b+c):d=(a:d)+(b:d)+(c:d)$.
2. $a:d=(a-b):d+b:d$.
3. $a:(b:m)>a:b$, где m — целое число.
4. $(a:c):(b:c)=a:b$.
5. $(c:a):(c:b)=(b:a)$.
6. $\left.\begin{array}{l}a:b=c:d,\\ e:f=c:d\end{array}\right\}\longrightarrow a:b=e:f$.
7. $a:b=c:b\longrightarrow a=c$.
8. Два из следующих влекут за собой третье:
$$a=c,\quad a:b=c:d,\quad b=d.$$
9. $\left.\begin{array}{l}a:b=c:d,\\ e:f=g:h\end{array}\right\}(a:b):(e:f)=(c:d):(g:h)$.
10. $a:b=c:d\longrightarrow c:d=a:b$.

Но, правда, некоторые из этих положений Арно вследствие *недостаточно сильной очевидности*, вернее, только разъясняет.

Достаточно бросить взгляд на эту табличку, чтобы усмотреть, что для Арно *отношения уже величины*, которые, как числа, отрезки площади, объёмы и т. д., могут между собой складываться и вычитаться. Но только это *величины, относительные*, в то время как последние *величины абсолютные*.

Для каждого рода величин можно отметить оба эти вида. Числами абсолютными у Арно называются только *целые* числа, относительными являются дроби. Таким образом, дробь *начинает рассматриваться как отношение*.

«Так как отношение величина, хотя бы и относительная, — говорит Арно, — то *всё, что относится к величине, вообще относится и к отношению*».

Две величины $(a:b)$ и $(c:d)$, замечает Арно, хотя и относительные, мы можем подвергнуть, как a и b, сравнению, дающему или равенство или неравенство.

В случае равенства имеем пропорцию $a:b=c:d$. Случай неравенства даёт то, что мы могли бы назвать вообще относительной величиной уже *второго порядка*:
$$(a:b):(c:d)\cdot$$
и сравнение таких новых величин даёт опять пропорцию:
$$(a:b):(c:d)=(e:f):(g:h)$$

[8]) (Arnaldus — Arnaud), Nouveaux éléments de géométrie, 1667, 1683.

или то, что мы могли бы считать равенством относительных величин уже второго порядка.

5. Треугольники с равными основаниями. Конечно, доказательство Евклида не зависит от того, имеют ли треугольники общую сторону AC.

Чертёж можно брать иной (черт. 5) и рассматривать треугольник MC_1A и C_2AL при $MC_1 = C_2L$.

Доказательство Евклида можно представить в более развитой форме.

Определение 5 книги V утверждает равенство отношений

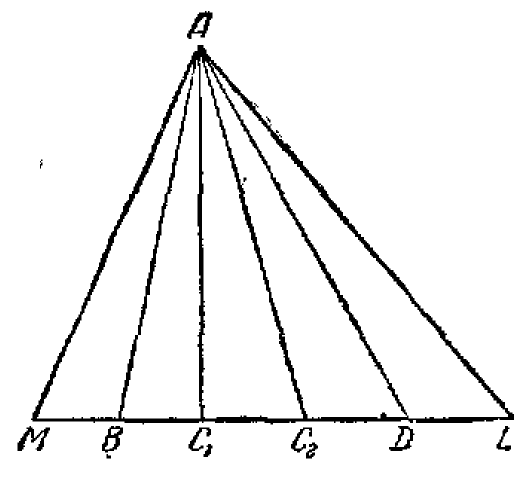
$$A:B \text{ и } C:D,$$

если для всяких целых чисел m, n, для которых при

$$mB \leqslant nA < (m+1)B$$

также

$$mD \leqslant nC < (m+1)D.$$



Черт. 5.

Здесь A и B это основания BC_1 и C_2D, а их же кратные nA и mB, MC_1 и C_2L. C и D — площади треугольников ABC_1 и C_2AD.

В настоящее время мы поступаем иначе. Мы сперва устанавливаем, что площади прямоугольников с общим основанием относятся как высоты и на основании предложения 36 книги I распространяем это на параллелограммы сперва с общим, а затем с равными основаниями.

Ход рассуждений иной, чем у Евклида. Можно сказать, что то, что входило в евклидово определение отношения, теперь *доказывается*.

Случай, когда высоты соизмеримы, не представляет никаких затруднений.

Мы откладываем на высоте AB общую меру и проводим через точки деления параллельные основанию, разделяя как $ABFD$, так $ACED$ (черт. 6,*a*) на равные прямоугольники, первый в числе m, второй — n; тогда будем иметь

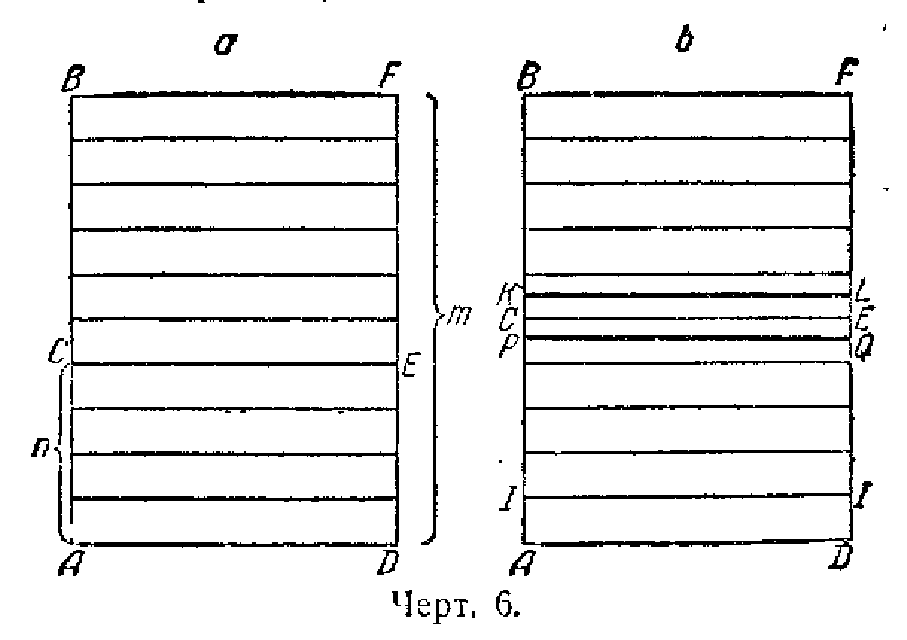
$$\frac{AC}{AB} = \frac{n}{m}, \quad \frac{\text{прям.}\, ACED}{\text{прям.}\, ABFD} = \frac{n}{m},$$

откуда и делаем заключение:

$$ACED : ABFD = AC : AB.$$

Но, как известно, *случай несоизмеримости* представляет большие методические трудности (черт. 6,*b*).

Мы в этом случае начинаем с *деления* AB на m частей, равных AI, а затем откладываем AI на AB, так что $nAI < AC$, а $(n+1)AI > CA$ (nAI не равно CA, так как AC и AB предположены несоизмеримыми).



Черт. 6.

Тогда устанавливается одновременное существование неравенств:

$$nAB < mAC < (n+1)AB, \qquad \text{I}$$

и

$$nABFD < mACED < (n+1)ABFD. \qquad \text{II}$$

По Евклиду этого уже *достаточно*, чтобы утверждать, что

$$ACED : ABFD = AC : AB. \qquad \text{III}$$

Для нас же это *недостаточно*.

Обычный приём, которым мы в настоящее время в этом *убеждаемся*, состоит в *неявном применении понятия предела*, который выявляется вполне только гораздо позже в главе «измерение круга».

По существу же рассуждение сводится к тому, что отношение $AB:AC$, не выражаясь рациональным числом, выражается *иррациональным*, которое мыслится как предел рационального, т. е. как предел отношения $\frac{m}{n}$ при бесконечном возрастании числа делений n.

Неравенства I и II дают

$$AB:AC = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad ABFD:ACED = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}. \qquad \text{IV}$$

Цель методической обработки — проведение доказательства без точного выявления понятия предела. Наиболее убедительным и простым приёмом является использование *актуальной бесконечности* в том виде, как это делается и в других случаях, например, если вывести из неравенств I и II, что отношения $AB:AC$ и $ABFD:ACED$ (которые должно мыслить как числа, выражаемые десятичными дробями с бесконечным числом знаков после запятой) имеют те же цифры на первом месте после запятой, затем те же на втором, на третьем и т. д. до бесконечности.

У Лежандра и во всех учебниках лежандрова типа до начала XX в. пользуются *методом исчерпывания* (о котором будем подробно говорить в комментариях к книге XII), но только в арифметизированной форме.

Ведётся рассуждение от противного (черт. 6,*b*).

Предполагается, что отношение $ABFD:ACED$ не равно $AB:AC$. Например, что

$$ABFD:ACED < AB:AC.$$

Тогда можно написать, что

$$ABFD:ACED = AB:AK, \qquad \text{V}$$

где

$$AK > AC.$$

Но разделяя AB на части, меньшие CK, мы можем получить точку деления P между CE и KL и будем иметь

$$ABFD:APQD = AB:AP,$$

$$ABFD:ACED = AB:AK.$$

Но этого быть не может, ибо

$$APQD > ACED$$

и поэтому

$$ABFD:ACED > ABFD:APQD,$$

т. е.

$$\frac{AB}{AK} > \frac{AB}{AP};$$

но, с другой стороны,

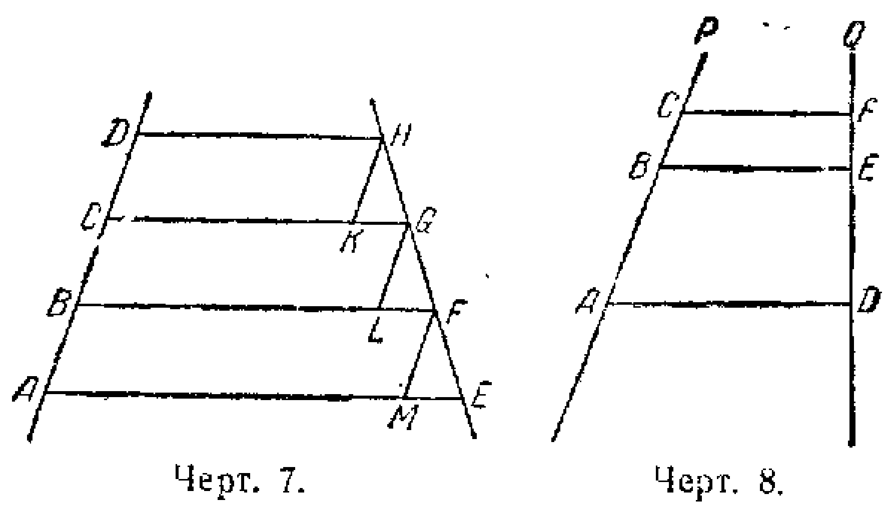
$$AB:AK < AB:AP,$$

так как

$$AK > AP.$$

Следует отметить, что во всех этих рассуждениях мы *делим* AB на равное число частей, т. е. делаем то, что, согласно Евклиду, можем делать лишь после предложения 9 книги VI.

6. Приём Евклида и приём Лакруа. В отличие от «Начал», в современных учебниках геометрии теория подобия излагается далеко от исходного пункта. Как совершенно основательно замечает Таннери, понятие о подобии и пользование некоторыми предложениями, к нему относящимися, следует отнести к зарождению геометрии; это и обусловило положение теории подобия в «Началах». Отделение теории подобия от исходного пункта геометрии было вызвано осознанием того, что её строгое обоснование зависит от строгого обоснования других геометрических теорий, которые поэтому должны быть изложены раньше.



Черт. 7. Черт. 8.

Лежандр поступает совершенно так же, как Евклид. В настоящее время пользуются другим приёмом, идущим мимо античной теории площадей.

В основу кладётся свойство отрезков двух прямых между параллельными.

В школьную геометрию приём этот видимо впервые внесён Лакруа[9]), которому мы обязаны методической обработкой элементов геометрии Лежандра; однако приём этот имеется уже в комментариях Р. Симсона.

Если из точек A, B, C, D, равноотстоящих друг от друга (черт. 7), проведены параллельные прямые, то отрезки EF, FG, GH, отсекаемые на другой прямой, будут равны. Напомним, что доказательство сводится к установлению равенств треугольников HKG, LGF, FME, в которых $MF \parallel AB$, $LG \parallel BC$, $KH \parallel CD$.

Отсюда выводится (черт. 8), что, пересекая две прямые AP и DQ параллельными прямыми AD, BE, CF, имеем

$$AB:BC = DE:FE.$$

Евклидово предложение является частным случаем этого положения, когда C и F сливаются.

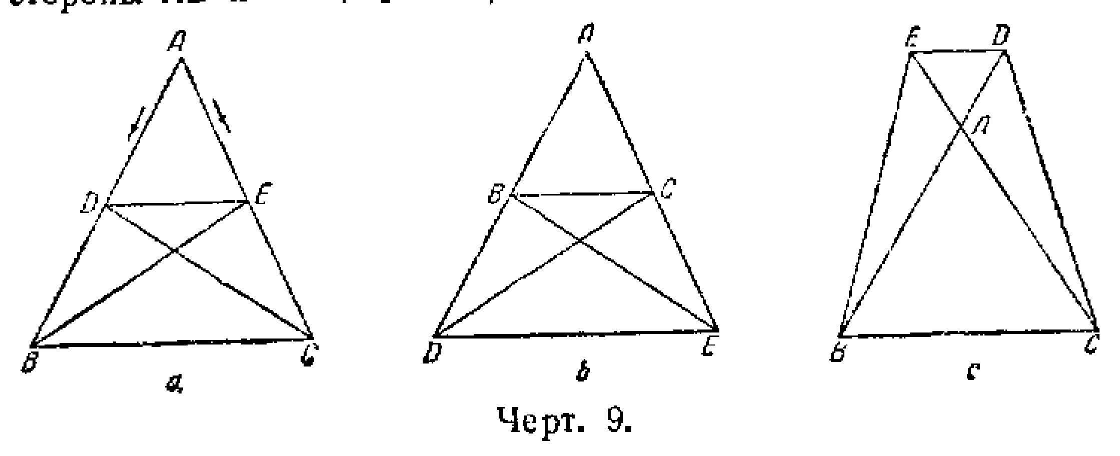
---

[9]) Lacroix, Éléments de géométrie, Paris, 1814. Есть русский пер.

В случае *соизмеримости* следует, отложив общую меру по AB и BC, провести прямые параллельные и использовать предложение о равенстве отрезков двух прямых между параллельными.

В случае же *несоизмеримости* приходится пользоваться приёмом, аналогичным указанному выше. Следует отметить, что при этом приходится использовать *аксиому Архимеда*, которая непосредственно не используется Евклидом.

7. Относительные величины в теории подобия. Евклид рассматривает только случай, когда прямая DE пересекает обе стороны AB и AC (черт. 9,*a*).



Черт. 9.

Р. Симсон отмечает, что евклидово предложение имеет место и тогда, когда DE пересекает продолжения сторон.

Тогда мы имеем то, что изображено на черт. 9,*b* и *c*.

Нетрудно видеть, что рассуждение Евклида не зависит от расположения секущей DE.

Во всех трёх случаях приходится повторять одно и то же, оперируя треугольниками BDE, ADE и CDE, ADE.

В настоящее время эти три случая являются хорошей иллюстрацией *относительных* величин в геометрии.

Различаются прямолинейный отрезок AB и *алгебраический* отрезок $\overline{AB}$, так что $\overline{AB} = \pm AB$, смотря по тому, направлен ли отрезок в положительную сторону или в отрицательную по прямой. В первом и во втором случаях все отрезки положительные и можно написать:

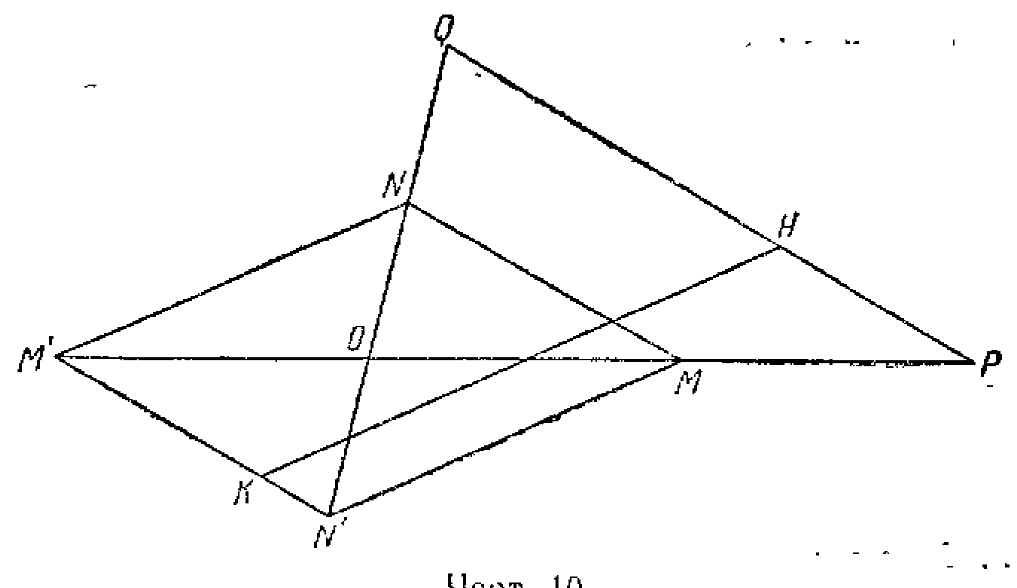
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Но в третьем $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$, как направленные противоположно AB и AC, будут уже отрицательны, но пропорция остаётся всё-таки в силе [10]).

10) Papelier, Exercices de géométrie moderne, Paris, 1912.

8. Sectio rationis. В самой тесной связи со вторым предложением книги VI находится Sectio rationis — «деление в отношении» Аполлония [11]). Простейшей задачей «деления в отношении» является следующая: *прямой, проходящей через данную точку H, требуется отсечь на двух пересекающихся прямых OP, CQ два отрезка, находящихся в данном отношении.*

Решение состоит в том, что на этих прямых откладываются OM и ON с данным отношением $OM:ON = k:l$, через H проводится прямая PQ, параллельная MN (черт. 10).



Черт. 10.

Так как откладывание по каждой из прямых возможно в две различные стороны (OM и OM', ON и ON'), то получим *второе* решение, проведя через H прямую HK, параллельную NM' — другой стороне параллелограмма.

9. Гармонические точки. В предложении 3 Евклид рассматривает лишь биссектрису внутреннего угла. Это предложение можно пополнить аналогичным, относящимся к *биссектрисе внешнего угла.* Это предложение используется Паппом в предложении 39 книги VII «Собраний» без доказательства, как общеизвестное.

Оно утверждает существование пропорции

$$BH:CH = BA:AC,$$

где H — точка пересечения биссектрисы AH внешнего угла со стороной BC (черт. 11).

Для вывода проводим $CF \parallel AH$ и доказываем, что в силу равенства углов при основании сторона $FA = CA$. В результате

---

11) Apollonii Pergaei, De Sectione rationis libri duo ex arabico studio, Edm. Halley, Oxoniae, 1706.

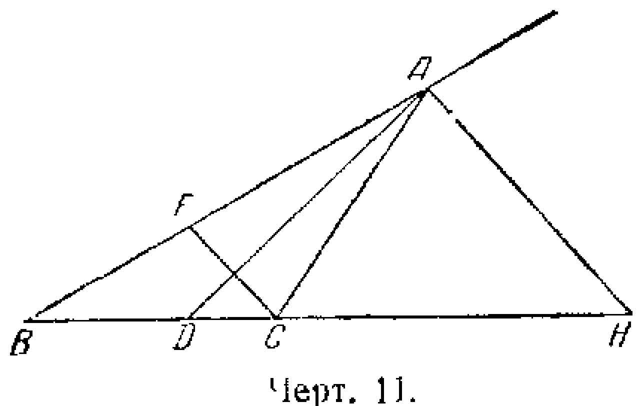
приходим к пропорции

$$BC:BH = BF:BA,$$

откуда

$$\frac{CH}{BH} = \frac{AC}{BA}.$$

Четыре точки B (вершина), D (точка пересечения BC внутренней биссектрисой), C (вершина) и H (точка пересечения BC внешней



Черт. 11.

биссектрисой) представляют так называемые *гармонические точки*, определяемые пропорцией

$$BD:CD = BH:CH.$$

Если брать *алгебраические* отрезки, то эту пропорцию можно написать так:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} : \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = -1.$$

Из этой пропорции получаем

$$\frac{2}{HD} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}.$$

10. Корректив к евклидову доказательству третьего предложения книги VI «Начал». Согласно замечанию Камерера следует в евклидово доказательство предложения 3 книги VI вставить *доказательство пересечения CE* и BE (черт. 3 к предложению 3).

Проще всего, конечно, воспользоваться *предложением Прокла*, являющимся эквивалентом постулата 5 Евклида.

Если CE не пересекает BA, то $BA \parallel CE$, а так как BA не может совпасть с DA, то из точки A проходят две параллельные CE.

Можно, согласно Пфлейдереру[12]), несколько изменить доказательство. Вместо того чтобы проводить $CE \parallel AD$, можно откладывать $AE = AC$. Тогда не приходится доказывать *пересечение* прямых, а только то, что $\angle ACE = \angle DAC$ и заключать отсюда о параллельности AD и CE.

12) Pfleiderer, Scholien, стр. 34.

Из предложения 5 книги I следует, что $\angle AEC = \angle ACE$ и оба угла являются половиной дополнения угла CAE до $2d$. Но в силу теоремы о смежных углах (предложение 13 книги I) тем же является $\angle DAC$.

11. Случаи подобия треугольников. Евклид устанавливает четыре случая подобия треугольников.

Предложение 4.

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F,$$

при этом одно из условий является избыточным.

Предложение 5.

$$AB:BC = DE:EF,$$
$$BC:CA = EF:FD,$$
$$BA:AC = ED:DF.$$

Предложение 6.

$$\angle A = \angle D.$$
$$AB:AC = ED:DF.$$

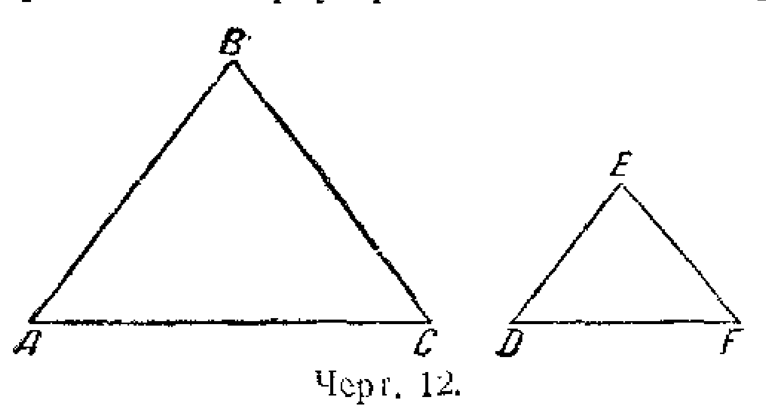
Предложение 7.

$$\angle A = \angle D,$$
$$AB:BC = DE:EF,$$
$$\angle ACB < d \quad \text{и} \quad \angle EFD < d,$$

или

$$\angle ACB \geqslant d \quad \text{и} \quad \angle EFD \geqslant d.$$

Интересно отметить, что Евклид не даёт четвёртого случая *равенства* треугольников, отвечающего четвёртому случаю подобия, который можно формулировать в аналогичной форме.



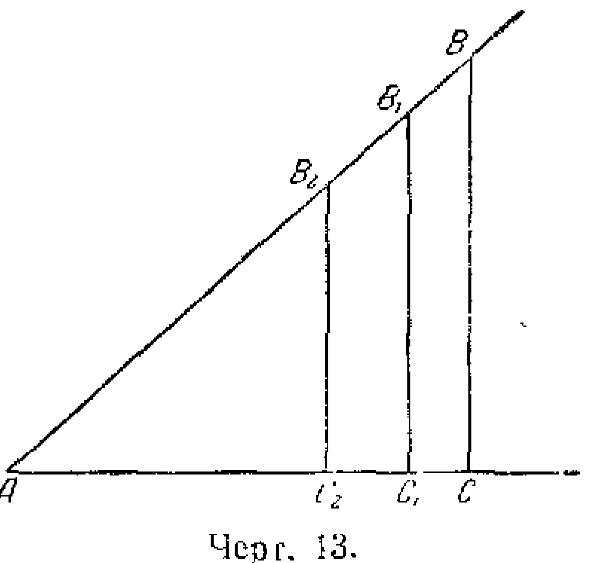
Черт. 12.

Треугольники равны, если они имеют по одному равному углу и стороны, заключающие другой угол одного треугольника, равны соответственно сторонам, заключающим другой угол второго треугольника, причём угол первого треугольника и угол второго оба меньше или не меньше прямого.

Доказав это предложение в книге I, Евклид смог бы доказать предложение 7 книги VI тем же приёмом, что 5 и 6.

12. Коэффициенты подобия. Современные методисты вводят в теорию подобия треугольников в *неявной* форме первый концентр тригонометрии.

Отмечают, что в прямоугольных треугольниках ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,... с *общим углом* A *отношение одного катета* BC *к другому* AC всегда одно и то же и *зависит только от угла* A (черт. 13).



Черт. 13.

Это коэффициент подобия первого рода или *тангенс* угла[13]). Зная один катет и тангенс угла, можно определить и другой катет. С другой стороны, можно по двум катетам определить угол.

По отношению стержня к его тени можно определить высоту солнца или угол, образуемый прямой, направленной к нему от глаза, с горизонтом.

Если вершина какого-либо предмета, например, башни B, видна по тому же направлению, что вершина шеста B_1, или если конец тени от башни совпадает с концом тени от шеста, то, зная длину его и расстояние глаза от основания шеста или длину его тени, можно определить коэффициент подобия, а зная его по расстоянию от башни или её тени, определить её высоту.

Сущность тригонометрической формулы

$$a = b \operatorname{tg} A$$

и её значение в практической геометрии были давно известны. Этот эмбрион практической геометрии и вместе с тем тригонометрии находим в Оптике Евклида (предложения 18, 19).

С точки зрения применения в практической геометрии тангенс имеет приоритет перед синусом.

Но математическая мысль пошла по пути, который привёл к таблицам не тангенсов, а синусов (и косинусов), т. е. коэффициентов подобия 2-го и 3-го рода (отношения катета BC или AC к гипотенузе AB).

Это объясняется тем, что решение треугольников сначала сводилось к определению *хорд* (и затем полухорд), и основные формулы тригонометрии заменяла теорема Птолемея: прямоугольник, построенный на диагоналях, равен сумме прямоугольников, построенных на противоположных сторонах.

Можно сказать, что теоремы об условиях подобия треугольников открывали новый этап в истории решения треугольников.

---

[13]) Борель, Элементарная математика, Матезис, Одесса.

Фалес определял расстояние корабля от берега, пользуясь предложением 4 книги I «Начал», измеряя базис на берегу и два угла при базисе, под которыми виден был корабль, затем он строил на земле такой же (т. е. равный ему) треугольник и измерял стороны последнего. Теория подобия открывала возможность заменить этот треугольник другим, начерченным на небольшой доске.

13. «Данные» и тригонометрия. Отметим, какую роль играли в этом отношении «Данные» Евклида[14]. Можно сказать, что они давали *евклидову тригонометрию* и нетрудно усмотреть эту евклидову тригонометрию даже в аналитических геометриях Лопиталя[15] и Крамера[16], в которых ещё нет формул преобразования координат, впоследствии введенных Эйлером.

Мы приводим их к современной символике с соответствующими теоремами, из которых в настоящее время можно их вывести.

Пусть S — площадь треугольника, a, b, c — стороны, A, B, C — противоположные углы, h_a — высота, опущенная на сторону a.

64, 65, 67. Если дан угол A (тупой или острый), то отношение

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{S} \quad \text{дано} \quad (a^2=b^2+c^2-2bc\cos A).$$

68. Если A дан, то $\frac{bc}{S}$ дано $\left(S=\frac{bc\sin A}{2}\right)$.

71. Если в двух треугольниках $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, C, C' **даны,** то $\frac{S}{S'}$ **дано** $\left(\frac{S}{S'}=\frac{ab}{a'b'}\,\frac{\sin C}{\sin C'}\right)$.

76. Если A, B, C, $\alpha=\frac{b}{a}$, $\beta=\frac{c}{a}$ даны, то $\frac{h_a}{a}$ **дано**

$$(a=h_a(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)).$$

80. Если A и $\omega=\frac{bc}{a^2}$ даны, то α, β даны

$$\left(\begin{matrix}\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos A=1\\ \alpha\beta=\omega\end{matrix}\right)\text{[17]}.$$

14. Теория подобия Хр. Вольфа[18]. Что такое *подобие*? Евклид, а за ним и Лежандр, на этот общий вопрос не отвечают.

---

[14]) Euclidis, Opera, ed. Heiberg, Data.

[15]) L'Hopital, *Traité des sections coniques*, 1707.

[16]) Cramer, Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques, 1750.

[17]) См. прим. 14.

[18]) D. Мордухай-Болтовской, Теория подобия Хр. Вольфа и постулат Левека, **Вестник** опытной физики и элементарной математики, 1915.

Они дают определения только подобия треугольников и подобия многоугольников.

Но математическая мысль XVII и XVIII вв. старается охватить своими определениями *самые общие понятия.*

Хр. Вольф, следуя идеям Лейбница, даёт следующее общее определение подобия.

«Подобие — тождество тех признаков, которыми вещи друг от друга отличаются». Это определение близко к аристотелеву определению подобия как одинаковости формы; оно выставлялось и педагогом Дистервегом.

Лейбниц говорит, что две вещи подобны, если они раздельно не различимы; они конгруэнтны, если не различимы и с присоединением, т. е. различаются только положением.

Современный «интуитивный» учебник занимается *воспитанием идеи подобия,* которую он отказывается определить в совершенно определённых терминах.

Иногда даётся определение подобия, состоящее в том, что подобными фигурами объявляются те, *которые при одинаковой форме отличаются только размерами.*

Конечно, такое определение остаётся *логически не действующим,* но с *методической точки зрения* путь, идущий через это определение к обычному, возводимому в аксиому, является наиболее рациональным. Определение Вольфа скорее можно назвать *метафизическим,* чем *методическим.* Он хочет в нём дать больше, чем то, что относится к собственно математическому понятию подобия.

Интересна схолия Х. Вольфа:

«Возьми, — говорит Х. Вольф, — две вещи *A* и *B*. Направь своё внимание на признаки, которые могут наблюдаться в *A*, и наблюдения свои запиши на бумаге. С равным вниманием отметь и признаки *B*, которые сможешь в нём распознать. Если теперь окажется, что все признаки, отмеченные в *A* и *B*, одинаковые, то вещи *A* и *B* подобны».

В число признаков, конечно, не включаются размеры (количество) *A* и *B*.

В действительности такая *проверка подобия* не может быть осуществлена *до конца,* так как в каждом предмете существует *бесконечное множество признаков* и, например, за признаки двух треугольников можно принять и углы между сторонами, и угол между медианой и стороной, и отношение медианы к биссектрисе и т. д.

Конечно, это определение, как и приведённое выше, остаётся *логически не действующим.*

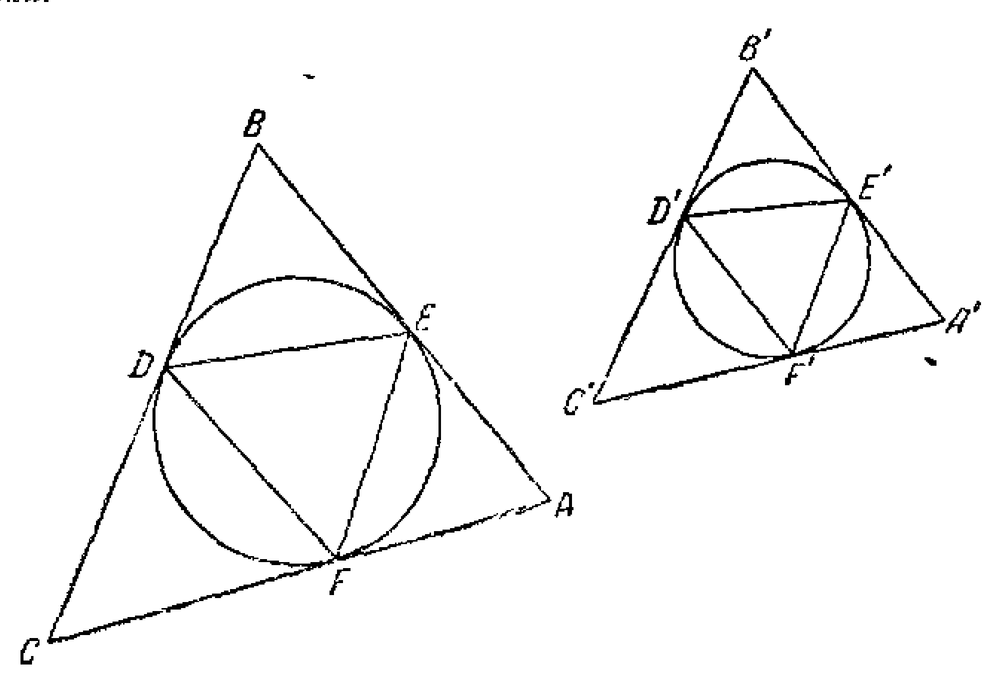
Вольфианская теория подобия основана на его *аксиоме:* «Если две фигуры или линии могут одинаковым путём производиться или описываться и при этом те элементы, с помощью которых они производятся, подобны, то подобны также фигуры или линии».

Необходимо здесь принять, что для обеих фигур берётся *по одному* элементу, который подвергается одинаковым операциям

для первой и для второй. При этом два прямолинейных отрезка должны всегда считаться подобными.

Углы Вольф не признаёт за элементы. Построение угла не вводит *нового* элемента, а представляет *операцию над заданным отрезком.*

В таком случае, так как радиусы двух кругов C_1 и C_2 всегда подобны и так как при получении кругов производится одна и та же операция, то круги C_1 и C_2 должны быть признаны *подобными.*



Черт. 14.

Треугольники $\triangle_1$ и $\triangle_2$ с парами соответственно равных углов $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ должны быть признаны тоже подобными, ибо получаются с помощью одинаковых операций над их подобными основаниями.

Если пересечь две прямые параллельными, то пары отрезков (a, a') и (b, b'), отсекаемые на прямых, согласно вольфианскому определению, подобны, и поэтому и все признаки у них одинаковы, а потому и всякая их *взаимная зависимость.* В частном случае та, которая получается через количественное сравнение

$$a:a' = b:b'.$$

Отсюда выводится пропорциональность соответственных сторон в подобных треугольниках.

Этот манёвр даёт возможность Хр. Вольфу обойти неприятный случай *несоизмеримых* величин.

Впишем (черт. 14) в два подобных треугольника ABC и $A'B'C'$ два круга и соединим точки касания прямыми. Получаемые таким образом треугольники EFD и $E'F'D'$ подобны.

В самом деле, мы здесь над каждым подобным треугольником производим совершенно одинаковые операции:

1) делим углы пополам,

2) опускаем перпендикуляр из точки пересечения биссектрис на стороны,

3) соединяем основания этих перпендикуляров прямыми.

Можно сказать, что в подобных треугольниках все прямолинейные отрезки, одинаковым образом построенные, и относятся между собой, как соответственные стороны: таковы медианы, биссектрисы, высоты и т. д.

15. Коллинеация и подобие. Характерная черта современной математической мысли — это подведение различных свойств геометрических фигур под *общие* идеи, которые были чужды не только *античной мысли, но* и XVII и XVIII вв.

Чтобы подняться до понятия *преобразования* плоскости и пространства, *математической мысли необходимо было подойти к понятию* пространства *в целом.* У Аристотеля существует только категория *где*, существует *место*, но пространства в ньютонианском смысле у него нет. Первый этап — это установление понятия пространства в целом — в космологии как вместилища тел, в геометрии как вместилища точек. Второй этап относится к позднейшему времени. Это внедрение в геометрию понятия *преобразования*, причём *не фигуры*, а *всей* плоскости или *всего* пространства в целом, введение понятия *группы преобразований*, т. е. такой их совокупности, что результат двух последовательных преобразований тот же, что одного, и, наконец, установление понятия *инварианта*, т. е. неизменного при преобразовании.

На этой высшей точке развития геометрия становится учением о преобразовании пространства (Эрлангенская программа Ф. Клейна). Движение, лежащее в основе форономической геометрии, начинает при этом рассматриваться как преобразование, инвариантом которого является расстояние между двумя точками.

На этой стадии развития подобные фигуры определяются как получающиеся в результате *подобного преобразования плоскости*. Подобное же преобразование определяется, во-первых, как *проективное*, т. е. то, *которое осуществляется проектированием*, иначе говоря, отбрасыванием тени, во-вторых, как *конформное*, т. е. такое, при котором сохраняются углы. Можно доказать, что такое преобразование является *аффинным*, т. е. таким, при котором инвариантом является отношение отрезков одной и той же прямой.

Более абстрактной точкой зрения является установление понятия о *соответствии*, при котором уже не мыслится непрерывный переход от одной фигуры к другой, но устанавливается лишь соответствие между их точками; одна фигура мыслится как отображение другой. Рассматриваемое с этой точки зрения подобие представляет частный случай так называемой *коллинеации* (так называется соответствие, в котором каждая прямая

отображается всегда тоже прямой, и точкам первой прямой отвечают точки второй), если добавить к ней идею *конформности*, т. е. сохранения угла между соответственными элементами отображаемой фигуры и её изображением.

16. Пучок, пересечённый параллельными прямыми, и теорема Кеплера[19]. Входящее в каждый учебник предложение о пропорциональности отрезков на двух параллельных, отсекаемых лучами пучка, т. е. о пропорциях (черт. 15)

$$EL:CH = LK:HG = KI:GF = ID:FB = AD:AB,$$

мы находим в комментариях Клавия.

Это свойство отрезков кладётся в основу так называемого *масштаба*.

На современном языке мы можем выразиться так: при проектировании с одной прямой на другую, ей параллельную, сохраняется простое отношение

$$FB:GF = ID:KI.$$

Конечно, при этом придётся мыслить то, что было чуждо не только Евклиду, но и вообще античной мысли — *операцию проектирования* пунктуала, т. е. бесконечного множества точек, лежащих на прямой.

Черт. 15.

Следует иметь в виду, что положение это *обращается*. Пропорция $KI:ID = GF:FB$ влечёт за собой прохождение трёх прямых BD, FI, GK через одну точку.

Здесь не безынтересно упомянуть о *теореме Кеплера*, принадлежащей к немногочисленному классу предложений старых математиков, относящихся к *зрительным свойствам*, т. е. теоремам о принадлежности трёх точек одной прямой, о прохождении трёх прямых через одну точку и т. д.

Если взять три параллельные прямые QC, PE, OK и пересечь их пучком прямых AB, AG, AF, пересекающих первую прямую в B, G, F, а через точки D, I, H пересечения со второй прямой провести прямые, параллельные одному лучу AK, до пересечения с третьей прямой в точках L, M, N, то все прямые LB, MG, NF и AK сойдутся в одной точке (черт. 16).

Доказывается теорема Кеплера так: если KC и NF пересекаются в точке R, то

$$CF:KN = CR:RK.$$

Но, беря прямые ABD, AGI, AFH, ACE, имеем

$$CB:ED = CG:EI = CF:EH.$$

---

[19] Kepleri, Paralipomena ad Vitellionem.

Вследствие того, что

$$DL \parallel IM \parallel HN,$$

имеем

$$ED = KL, \quad EI = KM, \quad EH = KN,$$

и потому

$$CB:KL = CG:KM = CF:KN = RC:RK,$$

и поэтому точки

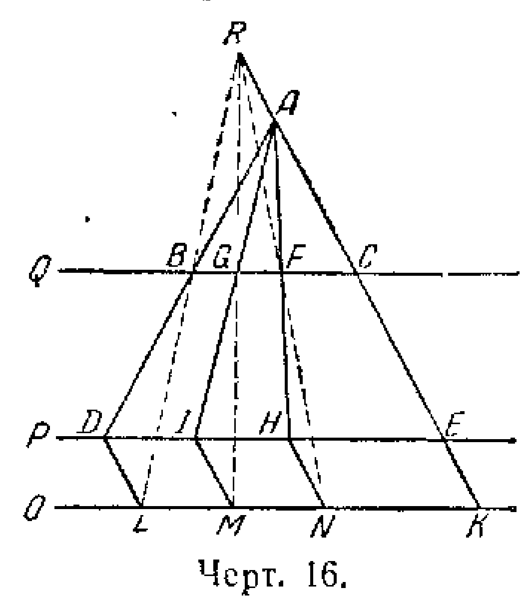
$$(L,\ B \text{ и } R), \quad (M,\ G \text{ и } R)$$

лежат на прямых

$$RBL \text{ и } MGR,$$

выходящих из одной точки.

Теорема Кеплера обращается в более общую, причём уже чисто зрительную теорему, если всю конфигурацию спроектировать на плоскость, наклонную к плоскости чертежа, так что DL, IM, HN, AK оказались бы уже не параллельными, но сошлись бы в одной точке.



Черт. 16.

Два пучка перспективны, если их лучи сходятся на прямой PE. Если их пересечь двумя прямыми, проходящими через точку пересечения PE с прямой, соединяющей вершины, то прямые, соединяющие точки пересечения соответственных лучей, пройдут через одну точку.

Эта теорема может быть предложена как задача проективной геометрии.

17. Гомотетия. Различают подобие в *широком смысле*, о котором говорит Евклид, и подобие в *узком смысле*, когда подобие соединяется с подобным расположением, т. е. *гомотетией*.

Два гомотетичных треугольника (или вообще фигуры) такие, у которых соответственные вершины лежат на прямых OAA', OBB', OCC', сходящихся в одной точке O, причём отношения расстояний

$$OA':OA, \quad OB':OB, \quad OC':OC$$

равны. На основании предложения 2 Евклида равны также и отношения $A'C':AC$, $B'C':BC$, $A'B':AB$, поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Вместе с тем и соответственные их стороны AC и $A'C'$, AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ параллельны.

Нетрудно видеть, что всякий треугольник $A'B'C'$, подобный ABC, можно привести в гомотетическое расположение с данным,

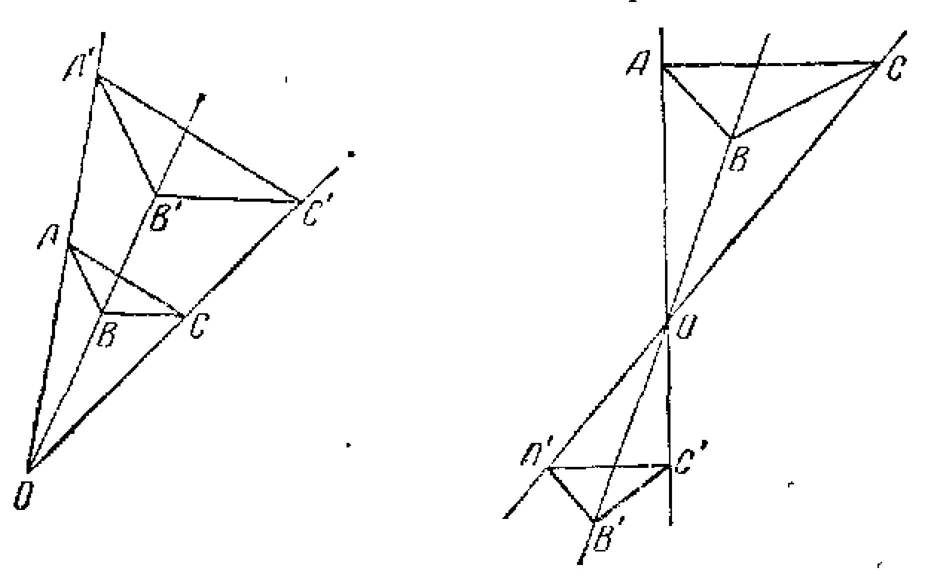
Для этого следует только взять такие A', B', C', чтобы

$$OA':OA = OB':OB = OC':OC = K,$$

где K — коэффициент подобия, так что

$$A'C':AC = B'C':BC = A'B':AB = K.$$

То, что мы выставляем как вывод из определения гомотетии и теоремы о подобии, некоторыми французскими авторами первой половины XIX в. выставлялось как определение подобия.



Черт. 17.

Подобными треугольниками являлись те, которые могли быть приведены в гомотетичное положение, так же как равными являлись те, которые могли быть наложены друг на друга.

18. Исчисление отрезков. Предложения 9, 10, 11, 12 книги VI дают возможность строить выражения $x = \frac{m}{n}a$, где m, n — целые числа, $x = \frac{ab}{c}$, $x = \frac{b^2}{c}$, $x = \sqrt{ab}$.

Все эти *элементарные* построения лежат в основе *графического исчисления.*

Комбинируя эти евклидовы построения, мы можем строить и более сложные выражения, определяемые рациональными операциями и операцией извлечения квадратного корня над отрезками и целыми числами.

В истории алгебраической геометрии это исчисление отрезков имело большое значение. Без сомнения смысл *характеристик,* т. е. букв, употребляемых в буквенной алгебре, менялся. До Декарта это — *величины в общем смысле,* причём вовсе не всегда выражаемые числами. Выражение ab понималось не как число, получаемое умножением числа a на число b (в этом

случае употреблялось слово multiplicare), а как *прямоугольник, построенный на a и b* (что выражалось термином ducere).

В аналитической геометрии Декарта[20]) x, a, b... это *не числа*, а прямолинейные отрезки (по Евклиду — прямые). Они играют у него роль чисел. Между ними и всякого рода геометрическими величинами устанавливается *взаимнооднозначное* соответствие, и все операции над геометрическими величинами сводятся к операциям над отрезками. Не соответствовавшие никакому геометрическому образу выражения $abcd, \ldots$ x^4, $x^5 \ldots$ теперь понимаются как величины одного рода, как *отрезки*; таким образом, символы, которые раньше представлялись столь же переносными, как $\sqrt{-1}$, теперь получают *реальный* смысл.



Черт. 18.

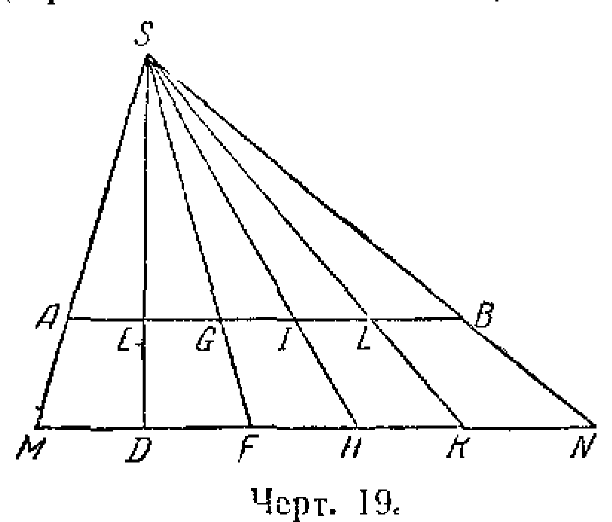
Для этого оказывается достаточным истолковать ab не как *площадь*, а как отрезок, получаемый следующим построением.

На OP откладывается $OB = b$, на OQ — отрезки $OA = a$, $OC = 1$ (черт. 18); затем точка C соединяется с B и через A проводится $AX \parallel CB$. Обозначая $OX = x$, имеем

$$x : a = b : 1,$$

откуда

$$x = ab.$$



Черт. 19.

19. Деление отрезка по Стевину[21]). Стевин употребляет другой способ деления отрезка на равные части.

На прямой $MN \parallel AB$ он откладывает равные отрезки $MD = DF = FH = HK = KN$ (черт. 19).

---

[20]) Descartes, Géométrie, 1637. Русский пер. с коммент. А. П. Юшкевича, 1939.

[21]) Stevin, Praxis geom. De sectione proport. Clavius, стр. 555, Taquet, стр. 107.

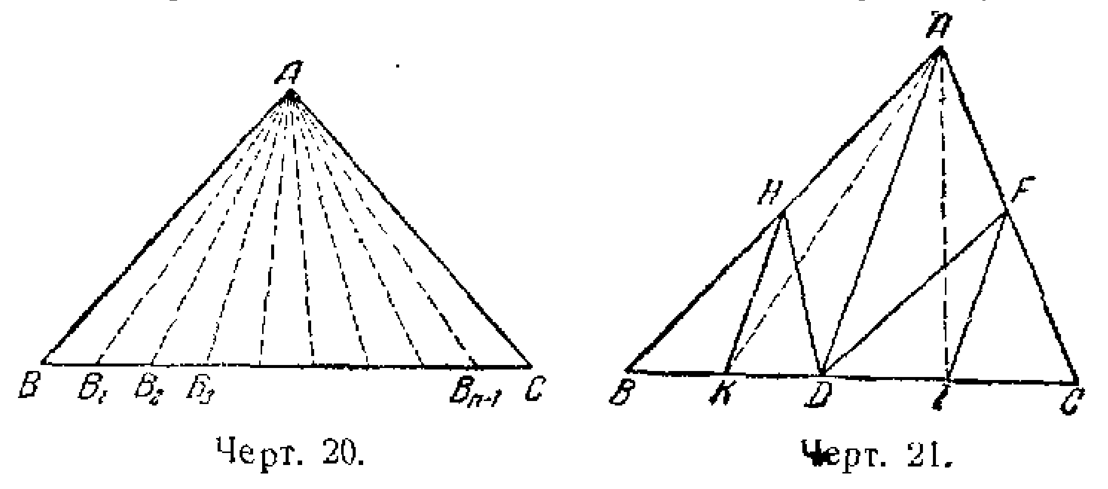
Соединив M с началом прямой AB, а N с её концом, он из точки S пересечения MA и NB к точкам D, F, H, K проводит прямые SD, SF, SH, SK и в пересечении с AB получает точки E, G, I, L деления равных отрезков.

20. Деление площадей. Из предложений I и 10 книги VI вытекает решение задачи о разделении треугольника ABC на равные части *прямыми, проведёнными через вершину A* (черт. 20).

Для этого следует основание разделить на равные части $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}C$ и соединить точки деления с A.

Это, конечно, очень простая проблема. Но за ней последовали другие, среди которых были очень сложные.

Чтобы ознакомить с этого рода исследованиями, непосредственно примыкающими к «Началам» Евклида, я укажу решение



Черт. 20. Черт. 21.

проблемы о делении треугольника на три части в данных отношениях прямыми, проведёнными из точки D на его стороне; при этом дам не исторически первое Магомета Бохадина[22]), а более позднее решение, принадлежащее Тарталье[23]) (черт. 21).

Для разделения $\triangle ABC$ на части, пропорциональные $m:n:p$, делим основание BC на части

$$BK:KI:IC = m:n:p;$$

через I и K проводим IF и KH, параллельные прямой AD. Тогда DF и DH дают требуемое деление.

---

[22]) Savilius, Praelectiones tredecim in principia Element. Euclidis Oxoniae habitae, 1670. Oxoniae, 1671, стр. 17. Mohammedis Bohadini, De superficierum divisionibus a Fr. Commandino latine versae, ed. 1570. См. Euclidis quae supersunt ex recensione Dav. Gregory, Oxoniae, 1703.

[23]) Tartaglia, La quinta parte del general trattato de numeri e misure... in Venezia, 1500, т. 25. — Clavius, Opera, стр. 262.

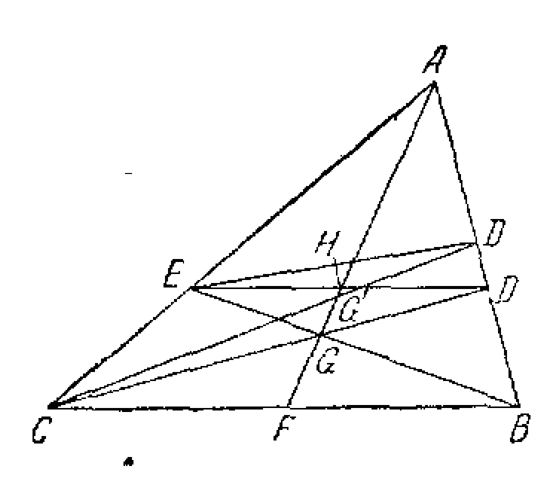
Для того чтобы обосновать это построение, замечаем, что на основании (предложение 37 книги I) $\triangle IFD = \triangle IFA$, $\triangle ADF = \triangle ADI$, $\triangle ADH = \triangle ADK$, $\triangle KHD = \triangle KHA$, и поэтому по аксиоме 2 книги I $\triangle DCF = \triangle ACI$, $\square DFAH = \triangle AIK$, $\triangle DHB = \triangle AKB$ и

$$DCF : DFAH : DHB = ACI : AIK : AKB = CI : IK : KB = p : n : m.$$

Эта задача обобщается на случай, когда D берётся где-либо внутри треугольника.

21. Построение Штейнера[24]. Следующая теорема Штейнера имеет очень большое значение в теории геометрических построений.

Если две параллельные CB и ED пересечь прямыми AEC, ADB, проходящими через точку A вне их и пересекающими CB и ED в (E, D) и (C, B), и соединить точку G пересечения EB и CD с A, то прямая AG рассечёт CB и ED пополам (черт. 22).



Черт. 22.

Обратно: если A соединить с F серединой CB, соединить E с B и точку G пересечения EB и AF соединить с C, то прямая ED, соединяющая E с D — точкой пересечения CG и AB — будет параллельна CB.

Для доказательства отмечают подобие следующих пар треугольников:

$$\left(\frac{AHD}{AFB}\right), \quad \left(\frac{AEH}{ACF}\right),$$
$$\left(\frac{GHD}{GCF}\right), \quad \left(\frac{GHE}{GFB}\right),$$

которые дают

$$FB : HD = CF : EH,$$
$$FB : EH = CF : HD,$$

откуда $HD^2 = EH^2$ или $HD = EH$.

Обратная теорема доказывается от противного.

Если ED не параллельно BC, то можно провести $ED' \parallel AB$. Соединяя D' с C, мы должны иметь пересечение $D'C$ и FB в G'; но в случае $ED' \parallel CB$ на основании прямой теоремы G'

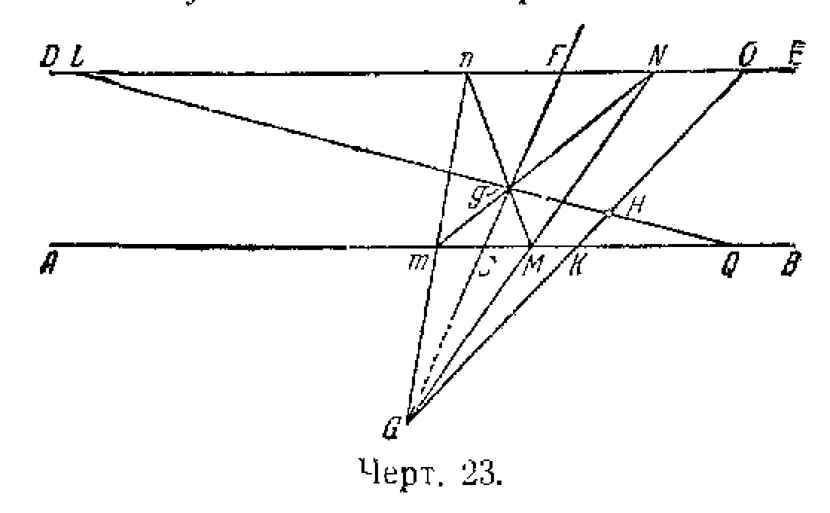
---

[24]) Штейнер, Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, Учпедгиз, 1939. — Адлер, Геометрические построения, Одесса.

должно попасть в точку пересечения AF с EB, что не имеет места.

Штейнеровская конфигурация входит как составная часть в конфигурацию Аполлония в его решении второй задачи «Sectio rationis».

Даны две параллельные прямые DE и AB, пересечённые третьей FC, и точка H (черт. 23). Провести через эту точку прямую, отсекающую на DE и AB отрезки в данном отношении.



Черт. 23.

Мы проводим решение без доказательств.

Откладываются от F и C в обе стороны отрезки $FN = Fn$ и $CM = Cm$, находящиеся в данном отношении. Проводятся прямые Mn и Nm, nm и MN; точки пересечения g или G, которые, согласно построению Штейнера, находятся на FC, соединяются с H. Прямая Hg или HG отсекает искомые отрезки FJ и CK или FL и CQ.

22. Удвоение куба [25]. За задачей об определении *одной* средней пропорциональной естественно должна была последовать задача о построении *двух* среднепропорциональных; в алгебраической символике задача об определении x, y из непрерывной пропорции

$$a:x = x:y = y:b.$$

К этой задаче сводилась знаменитая классическая проблема об *удвоении куба* (Делийская проблема), состоящая в построении с помощью циркуля и линейки стороны куба с удвоенным объёмом данного куба.

---

[25]) Teixeira, Traité des courbes, spéciales planes et gauches. — Gino-Loria, Spezielle algebraische und transcendente Kurven, Leipzig, 1902. — Reimer, Historia problematis de duplicatione cubi etc., Göttingae, 1798. — Hofmann, Das Delische Problem, Mat. Phys. Bibliothek, т. 68, Leipzig, 1920.

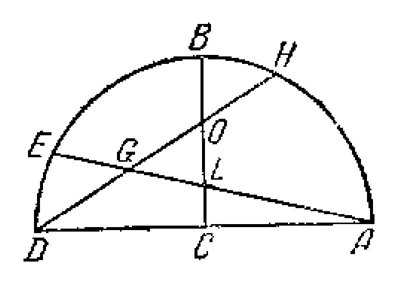
Наиболее ценным *открытием* в глазах античных математиков являлось сведение Гиппократом Хиосским проблемы удвоения куба к построению *двух средних пропорциональных*.

В действительности Гиппократ ни на шаг не продвинулся вперёд, так как проблема эта так же неразрешима с помощью циркуля и линейки, как и задача об удвоении куба.

Что касается предполагаемого решения Платона, то можно сказать, что он решил *не поставленную проблему, а другую*; он нашёл две среднепропорциональные с помощью *особого прибора*, а вовсе не с помощью только циркуля и линейки.

Тщетным попыткам решения задачи об удвоении куба мы обязаны получением *алгебраических кривых высших порядков*, часть которых была известной и древним.

Сведение задачи об удвоении куба к задаче о проведении через данную точку прямой, на которой данным углом отсекается отрезок данной длины, должно было тоже казаться шагом вперёд в большей мере, чем открытия Платона и Гиппократа, ибо задача эта на первый взгляд представляется менее сложной, чем удвоение, и при этом невольно располагает к вере в её разрешимость, так как аналогичная задача в случае параллельных прямых легко разрешается. Задача эта приводит к *конхоиде Никомеда* как к геометрическому месту концов отрезков данной длины, откладываемых на лучах пучка от точек пересечения с данной прямой.



Черт. 24.

Другой путь вёл к *циссоиде Диоклеса*. Проведём из центра C полуокружности ABD радиуса $CD=b$ перпендикуляр CB к диаметру AD, отложим $CL=a$ (черт. 24) и соединим L с A прямой AE. Если провести LH так, что её отрезок GO от точки G пересечения с AE до точки O пересечения с BC окажется равным OH от O до точки H пересечения с окружностью, то CO будет одной из среднепропорциональных. Точка O строится с помощью кривой, называемой циссоидой Диоклеса.

23. Параллелограммы с общим углом. Если обозначить стороны одного из равноугольных параллелограммов через (a, α), а другого через (b, β)

$$a:\beta = b:\alpha, \qquad \text{I}$$

то можно также написать

$$a\alpha = b\beta, \qquad \text{II}$$

что в евклидовской терминологии следует выразить так: прямоугольник, построенный между a и α, равен прямоугольнику, построенному между b и β.

В настоящее время равенство I или II можно рассматривать как непосредственное следствие *тригонометрической* формулы для площадей параллелограммов

первого:

$$S_a = a\alpha \sin\vartheta,$$

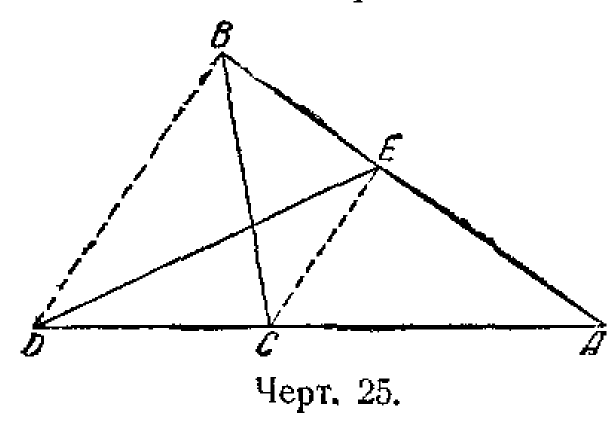
второго:

$$S_b = b\beta \sin\varphi,$$

причём $\varphi = \vartheta$.

Мы приведём другое более изящное доказательство из Пфлейдерера (черт. 25).

Пусть треугольники ABC, ADE равновелики, но тогда по аксиоме 3 книги I равновелики также CEB и CED и поэтому (по предложению 39 книги I) BD и EC параллельны и $CA:AD = EA:AB$.



Черт. 25.

Обратно, если $CA:AD = EA:AB$, то BD и EC параллельны и поэтому (предложение 37 книги I) $\triangle CEB = \triangle CED$ (по аксиоме 2 книги I), $\triangle ABC = \triangle ADE$.

24. Инверсия. Определение *обратно пропорциональных величин* используется только в этом предложении.

Величины a_1, a_2 являются (прямо) *пропорциональными* b_1, b_2, если

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2,$$

и *обратно пропорциональными*, если

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1,$$

что даёт

$$a_1 b_1 = a_2 b_2.$$

Можно сказать, что обратно пропорциональны *те величины, произведения которых равны.*

Пример обратной пропорциональности даёт предложение 35 книги III. Можно формулировать, как это делает Клавий, это предложение так: отрезки хорд обратно пропорциональны.

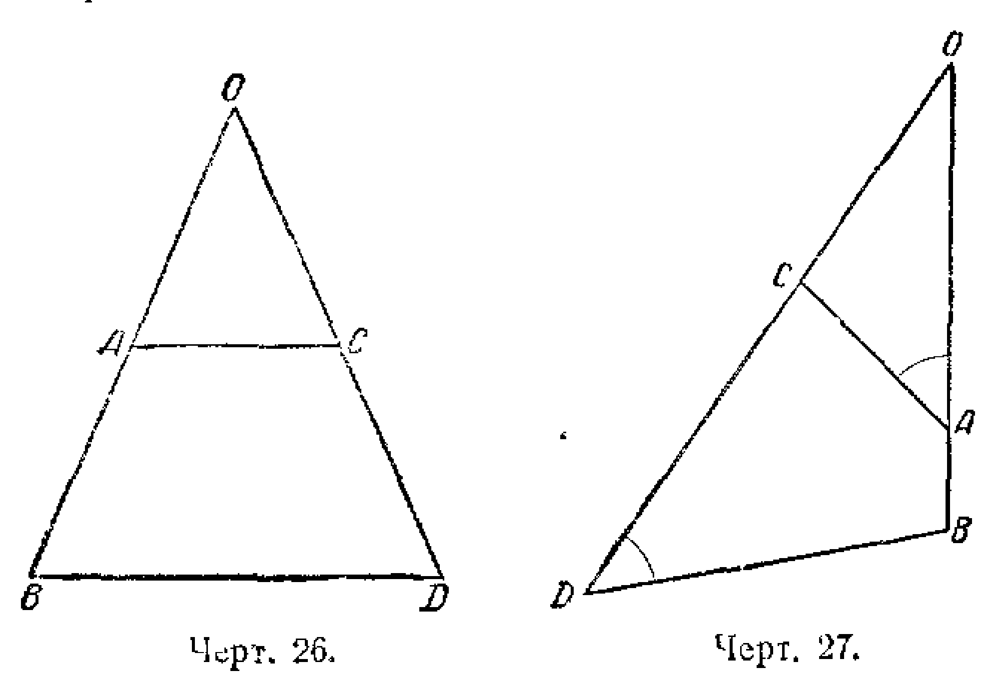
Если пропорциональность связана с *параллельными* прямыми, то обратная пропорциональность связана с *антипараллельными* прямыми. Для параллельных прямых AC и BD (черт. 26) $\angle OAC = \angle OBD$ и $OA:OC = OB:OD$.

Для *антипараллельных* (черт. 27) $\angle OAC = \angle ODB$ и из подобия $\triangle OAC$ и $\triangle OBD$ имеем:

$$OA:OC = OD:OB,$$

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Мы говорим, что в первом случае **треугольник** *DBO* получается из *ACO* *подобным преобразованием*, **во втором** же случае *инверсией*.



Черт. 26. Черт. 27.

25. Величины линейные, плоские и телесные. Теорема, что *произведение крайних равно произведению средних*, входящая в современную арифметическую или алгебраическую теорию пропорций, у Евклида оказывается в книге VI и причём очень далеко от начала (предложение 16) и в VII (предложение 19).

Доказывается она только для отрезков и целых чисел, причём для случая отрезков формулируется таким образом.

«Если четыре прямые линии пропорциональны, то прямоугольник, построенный на крайних прямых, равен прямоугольнику, построенному на средних, и обратно...» Буквенная алгебра даёт возможность выразить символически эту теорему:

$$\text{Если } a:b = c:d, \text{ то } ad = bc. \qquad \text{I}$$

Под буквой, вне сомнения, разумелось раньше (даже в XVIII в.) не то, что мы *теперь* разумеем, не числа, а величины (magnitudo in genere) объемлющие, как *непрерывные*, так и *дискретные*.

Что это так, это можно усмотреть уже из самих определений алгебры, например:

Рейхер (1703). «Чистая математика делится на общую (universalis), называемую алгеброй, исследующую абстрактное количество (quantitas abstracta), и частную — геометрию, исследующую непрерывную величину, и арифметику, исследующую множество или число».

Через 60 лет Лакайль (1762)[26]) пишет:

«Алгебра это, так сказать, общая арифметика или наука *вообще* о величинах, как арифметика наука о числах».

При этом Лакайль отмечает, что quantitas vel magnitudo может быть *дискретна (e partibus separatis) и такие величины исследует арифметика*».

Из «ars inveniendi» (искусства открытия), находящего своё обоснование только в геометрии, алгебра совсем не скоро обратилась в систему общего учения о величинах.

Она содержит правила формальных операций и вытекающие из этих правил следствия, но смысл их совершенно *различно истолковывается для геометрических величин, и для чисел.*

Для геометрических величин в равенстве I и *ad* и *bc* истолковывались как *площади прямоугольников*, построенных на (*a*, *d*) и (*b*, *c*).

Если *a*, *b*, *c*, *d* — прямолинейные отрезки или, как выражались, *линейные* величины, то *ab*, *cd плоские*, *abc телесные.*

Но что касается *abcd*, то это величина воображаемая, мнимая, то же по существу, что и $\sqrt{-1}$. Таким образом, одна и та же формальная алгебраическая операция могла привести и к *реальному*, и к *мнимому* результату, смотря по тому, производилась ли она над числами или геометрическими величинами, например, отрезками.

$$\text{Если } a = 2,\ 3,\ \frac{5}{7} \ldots,\ \text{то } a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \ldots$$

имеют конкретный смысл. Но если a — отрезок, то a^2 — площадь квадрата, a^3 — объём куба, а a^4 — так же нереальна, как $\sqrt{-1}$. Это — *коссическая* величина. «Существует, — говорит Херигон[27]), — только три рода величин *вещественных* (reelles): линия, поверхность, тело; *мнимых* (imaginaires) — бесконечное множество: квадратоквадрат, кубокуб и т. д.».

26. После этого в некоторых манускриптах идёт следующий текст, вынесенный Гейбергом в приложение:

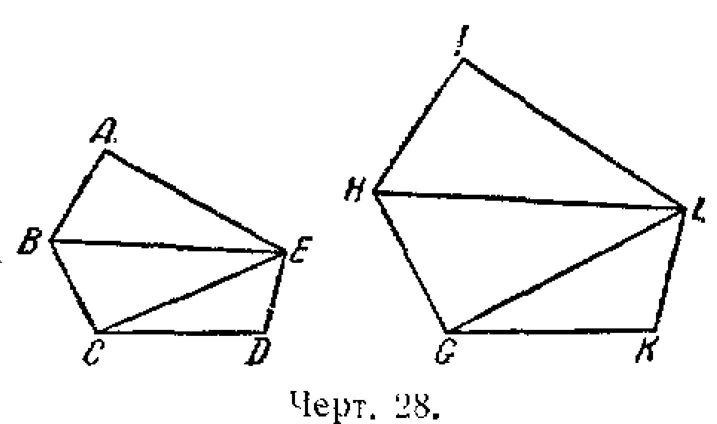
«Иначе. Вот покажем и по другому проще соответствие треугольников (черт. 28).

Действительно, положим снова многоугольники *ABCDE*, *IHGKL* и соединим *BE*, *EC*, *HL*, *LG*. Я утверждаю, что как треугольник *ABE* к *IHL*, так и *EBC* к *LHG* и *CDE* к *GKL*. Действительно, поскольку подобен треугольник *ABE* треугольнику *IHL*, то, значит, треугольник *ABE* имеет к *HLG* двойное отношение *BE* к *HL*. Вследствие того

[26]) De la Caille, Lectiones elementaris mathem., Parisiis, 1762.

[27]) Herigonus, Cursus mathematicus, Parisiis, 1634.

же вот и треугольник *BEC* имеет к треугольнику *HLG* двойное отношение *BE* к *HL*. Значит, будет, что как треугольник *ABE* к треугольнику *IHL*, так и *BEC* к *HLG*. Далее, поскольку подобен треугольник *EBC* треугольнику *LHG*, то, *значит*, *EBC* имеет к *LHG* двойное отношение прямой *CE* к *GL*. Вот вследствие того же и треугольник *ECD* имеет к треугольнику *LGK* двойное отношение *CE*

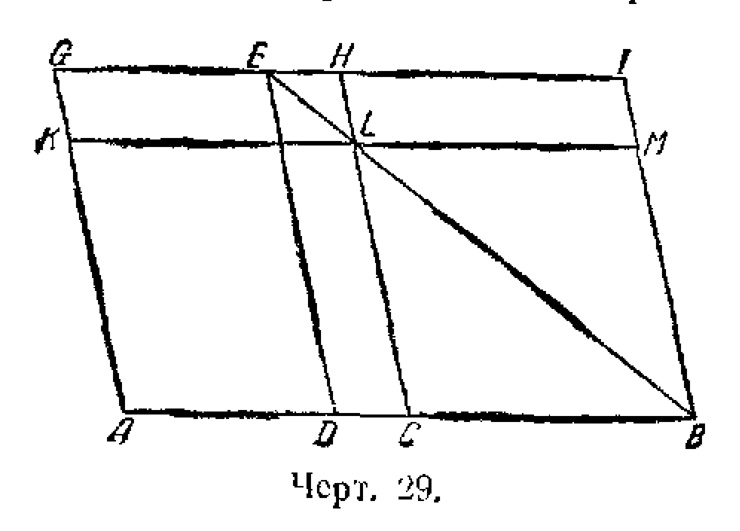


Черт. 28.

к *GL*. Значит, будет, что как треугольник *BEC* к *LHG*, так и *CED* к *LGK*. Доказано же, что и как *EBC* к *LHG*, так и *ABE* к *IHL*. И, значит, как *ABE* к *IHL*, так и *BEC* к *HLG* и *ECD* к *LGK*, что и требовалось доказать».

27. В некоторых списках «Начал» после этого идёт следующий текст, который Гейбергом помещён в приложении как неподлинный.

«Иначе. Действительно, пусть *AB* снова будет рассечённая пополам в *C* ⟨прямая⟩ и *AL* — приложенная ⟨фи-



Черт. 29.

гура⟩, имеющая недостатком фигуру *LB*; приложим снова к *AB* параллелограмм *AE*, имеющий недостатком *EB*, подобную и подобно расположенную с ⟨построенной⟩ на по-

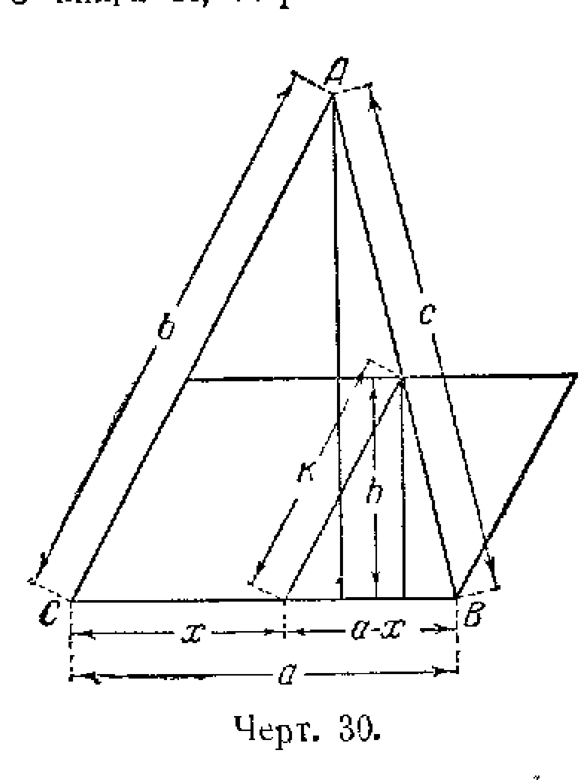
ловине ⟨фигурой⟩ LB. Я утверждаю, что приложенная к половине ⟨фигура⟩ AL больше AE (черт. 29).

Действительно, поскольку EB подобна LB, они будут на том же диаметре. Пусть их диаметр будет EB. Построим чертёж. И поскольку LI равна LG, поскольку и IH равна HG, то, значит, LI больше KE. Значит, и DL больше EK. [Прибавим] общую KD. Значит, и вся AL больше всей AE, что и требовалось доказать».

28. Максимум и минимум. Разобранное предложение можно формулировать так: *из всех параллелограммов, которые можно вписать в данный треугольник, наибольший тот, основание которого равно половине основания треугольника.*

Результат предложения 27 можно вывести из предложения 5 книги II, выраженного тождеством

$$ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$



Черт. 30.

Выразим задачу Евклида в современных алгебраических и тригонометрических символах.

Означая через a, b, c стороны CB, CA и AB, через x — основание вписанного параллелограмма, через k — другую его сторону, а через h — его высоту, будем иметь (черт. 30)

$$k:b=(a-x):a, k=\frac{b}{a}(a-x),$$

$$h=k\sin C,$$

$$h=\frac{b}{a}(a-x)\sin C,$$

$$S \text{ (площадь параллелограмма)} = hx=\frac{b}{a}\sin C\cdot x(a-x).$$

Задача Евклида сводится к определению *максимума функции*

$$x(a-x),$$

т. е. той функции, к которой впервые Ферма [28]) применил *метод неделимых*. Максимум им характеризуется условием равен-

[28]) Fermat, Oeuvres, ed. Tannery, De maximis et minimis.

ства отвечающего ему значения функции смежному значению, так

$$(x+h)(a-x-h)=x(a-x),$$

или

$$h(a-x)-hx+h^2=0,$$

откуда, сокращая на h,

$$a-2x+h=0.$$

Но так как бесконечно малое h исчезает перед конечным, то $a-2x=0$ и

$$x=\frac{a}{2}.$$

Современные элементарные методы разыскания наибольших и наименьших величин сводят эти задачи к простейшей — к разысканию такого деления a на части x и $(a-x)$, чтобы произведение этих частей было наибольшее.

То, что этому требованию удовлетворяет деление пополам, т. е. $x=\frac{a}{2}$, усматривается из следующего весьма простого геометрического соображения.

A

B D O C

Черт. 31.

Если из какой-либо точки A окружности опустим перпендикуляр AD на диаметр BC, то AD, как полухорда, будет меньше полудиаметра OA (черт. 31).

Но AD^2 представляет произведение $x=BD$ и $y=DC$, причём $x+y=a$ (диаметру BC).

Таким образом, $x=OB=\frac{a}{2}$ даёт действительно то значение, при котором при условии $x+y=a$ произведение xy имеет наибольшее значение.

Папп другим путём приходит к тому же результату.

Теоремы о наибольших и наименьших величинах находим в «Конических сечениях» Аполлония. В книге V он доказывает, что наименьшее расстояние точки от конического сечения определяется *по нормали*.

Папп же обращает особое внимание на этого рода проблемы. В особенности выдвигаются им *изопериметрические* проблемы: из изопериметрических многоугольников с данным числом сторон наибольший правильный из правильных тот, который имеет наибольшее число сторон. Зенодор, согласно упоминанию у Паппа, знал, что при данном периметре наибольшую площадь имеет многоугольник с наибольшим числом сторон. Папп ещё указывает, что при равных дугах из сегментов наибольшую площадь

будет иметь сегмент окружности. Точно так же из всех тел, имеющих одинаковый объём, наибольшая поверхность будет у шара [29]).

29. *Из истории квадратного уравнения.* Евклид нигде не пользуется *общей формулой* решения квадратного уравнения даже в геометрической форме, когда приходится решать задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям специальных типов.

Но в Началах имеется предложение 28, из которого может быть выведена основная формула для квадратного уравнения и которая в истории этого последнего сыграла важную роль, так как по образцу решения этого предложения-задачи строился и геометрический вывод общей формулы решения квадратного уравнения даже во время Виеты.

Задача: *данную прямую линию разделить на такие две части, чтобы из двух параллелограммов одинаковой высоты, построенных на них, один был равен данному многоугольнику, а его недостаток подобен данному параллелограмму*, сводится Евклидом к построению параллелограмма, имеющего данную площадь и подобного своему недостатку; эта задача разрешима с помощью циркуля и линейки; частным случаем её *является построение квадрата, равновеликого данному прямоугольнику.*

Последняя задача и является той геометрической задачей, которая при *алгебраизации* проблемы обращается в *извлечение квадратного корня.* У персидского математика Омара Хайяма [30]) евклидова проблема берётся в простейшей форме: *построить на прямой два прямоугольника, из которых один BSMI — квадрат, а другой APMS равновелик данному квадрату* b^2.

Решение состоит в следующем (черт. 32):

1) данная прямая AB делится пополам на части EA, EB,

2) на EA и EB строятся квадраты $AEHG$ и $EGKB$,

3) на HG, как на диаметре, строится окружность,

4) из H радиусом, равным b, засекается F,

5) из G, как из центра, проводится окружность радиуса FG до пересечения с GK в N,

6) Из N проводится перпендикуляр к AB; пусть его основание будет S,

7) G соединяется прямой с B; пусть M точка пересечения её с NS,

8) из M проводится $MI \| HG$.

---

[29]) Pappi Alexandrini, Collectiones, ed. Hultsch, т. 1, стр. 394.

[30]) Д. Мордухай-Болтовской, Первые шаги буквенной алгебры, Известия С. К. Г. У., 1928. — Sédillot, Matériaux pour servir à l'histoire des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux, т. I, 1847, стр. 367. — Woepke, L'Algèbre d'Omar Alkhayami, Journal für Mathematik (Crelle), 1851.

Если положить $SB = x$, то для x получается уравнение $x(a - x) = b^2$ и, таким образом, получается построение корня квадратного уравнения

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Из совершенно элементарных соображений легко убеждаемся, что построение Омара даёт:

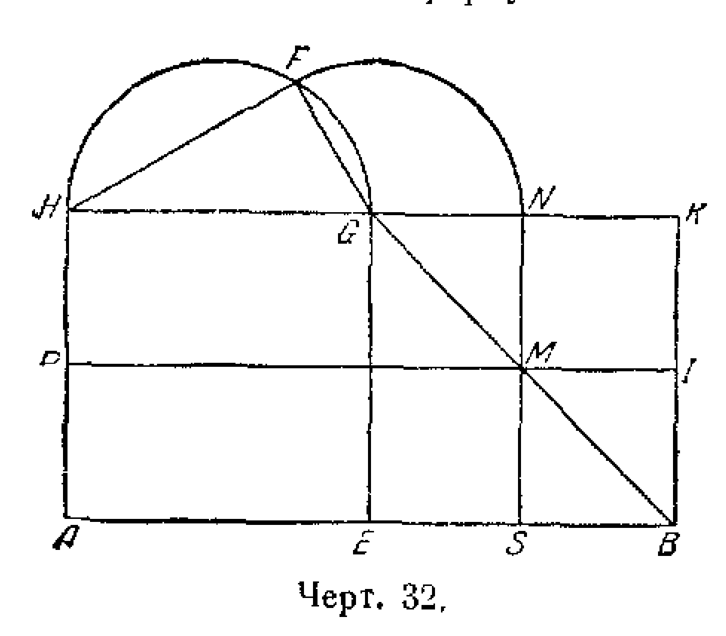
$$AS = x_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

для одной стороны прямоугольника, и

$$BS = x_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

для другой.

В таком выводе корни уравнения *строятся* и *построением* доказывается правильность общей формулы.



Черт. 32.

У Евклида построение играет второстепенную роль: им только доказывается *существование*. На первом месте у него всегда стоит *убеждение в определённых истинах*.

То, что с арабской и с нашей точки зрения является определением корня уравнения, с евклидовой — скорее установкой *равенств*. Преобразование *частных* типов квадратных уравнений им доводится только до формы:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q$$

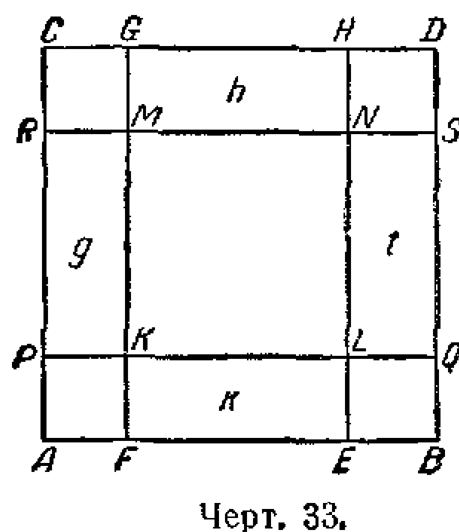
с помощью тождеств книги II Начал.

Совершенно не соприкасаясь с упомянутым выше предложением 28 книги VI Начал, идут решения арабских математиков.

Упомянем вывод Аль Хваризми[81]), который строит квадрат внутри квадрата (с общим центром и параллельными сторонами) (черт. 33), где

$$AF = EB = \frac{1}{4}p, \qquad AP = CR = \frac{1}{4}p \quad \text{и} \quad KL = x, \qquad KLMN = x^2.$$

Затем, полагая площадь фигуры $FKPRMGHNSQZE$ равной q и замечая, что



Черт. 33.

$$(KLMN) + (h + t + k + g) = q,$$

он выводит

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Приводимые нами выводы выявляют в качестве основной операции определение стороны квадрата, равновеликого прямоугольнику; соответственно этому основной арифметической операцией становится *извлечение квадратного корня*.

30. Эллипс, гипербола и парабола. Если вместо параллелограмма взять прямоугольник, а вместо многоугольника квадрат, то предложения 28, 29 дадут *графическое решение квадратного уравнения*

$$ax \mp x^2 = b^2, \qquad \text{I}$$

так как ax выражает площадь прямоугольника $ACDE$ (черт. 34), а x^2 квадрата $CBEF$, а b^2 площадь заданного квадрата. Мы можем написать уравнение I в виде:

$$ax + cx^2 = b^2, \qquad \text{II}$$

Черт. 34.

включая ещё случай $c = 0$, который отвечает построению прямоугольника на данном основании, равного данному квадрату.

В случае $c = 0$ мы получаем *приравнивание* прямоугольника данному квадрату (παραβολή), в случае $c > 0$ *недостаток* площади квадрата до площади прямоугольника (ἔλλειψις), в случае $c < 0$, наоборот, избыток (ὑπερβολή).

[81]) См. прим. 30.

Чтобы объяснить происхождение слов параболы, эллипса и гиперболы, заменяем в уравнении II b на y.

Мы получаем

$$ax + cx^2 = y^2,$$

представляющее уравнение конического сечения, и случаи $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$ будут отвечать уравнению параболы, эллипса и гиперболы.

Конечно, древние не имели наших понятий о *координатах* и функции, но можно сказать, что в основных геометрических свойствах, с помощью которых определялись эти *типы* конических сечений, скрытым образом заключались их уравнения.

31. Другое доказательство предложения 30. В приложении у Гейберга помещено ещё следующее доказательство предложения 30, считаемое им неподлинным.

«Иначе. Пусть данная прямая будет AB. Вот требуется рассечь AB в крайнем и среднем отношении (черт. 35).



Черт. 35.

Рассечём AB в C так, чтобы ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC был равен квадрату на CA. Поскольку теперь ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC равен ⟨квадрату⟩ на CA, то, значит, будет, что как BA к AC, так и AC к CB. Значит, AB рассечена в крайнем и среднем отношении в C, что и требовалось сделать».

32. Уравнения 2-й степени в античной математике. Предложение 30 книги VI решает *по существу* ту же задачу, что предложение 11 книги II, в котором требуется разделить a на такие части x и $(a - x)$, что

$$a(a - x) = x^2.$$

Предложение 30 берёт пропорцию

$$a : x = x : (a - x).$$

Предложение 17 книги VI даёт все средства доказать эквивалентность этих двух проблем.

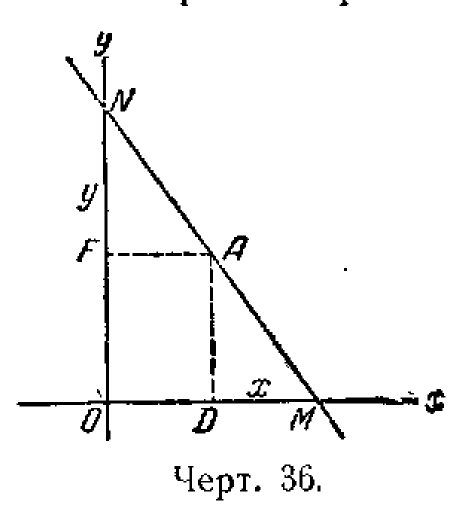
Античная математика не даёт *общей теории решения квадратных уравнений*. Даже у Диофанта[32]) мы имеем исследование только *частных* типов, хотя некоторые думают, что книга, содержавшая такую теорию, утрачена. Но античная мысль идёт очень далеко в направлении тех геометрических проблем, которые *приводятся* к уравнениям 2-й степени.

[32]) Diophanti Alexandrini, Libri sex auctore Gaspare Bacheto Mezeriac, Lutetiae, 1621. Diophanti Alex., Arithmetische Aufgaben von Otto Schulz, Berlin, 1822.

Я отмечу знаменитые проблемы Аполлония.

Даны две пересекающиеся между собой прямые OX и OY, и через некоторую точку A предлагается провести прямую так,

1) (проблема сечения в «отношении»), чтобы отсекаемые ею на этих прямых отрезки были в данном отношении,



Черт. 36.

2) (проблема сечения в площади), чтобы прямоугольник, построенный на отсечённых отрезках, был равен данному квадрату.

Если обозначим координаты заданной точки A через $OD = b$ и $OF = c$, а отрезки $MD = x$ и $NF = y$, причём $OD \cdot OF = a^2$, то первая задача приведётся к системе уравнений:

$$\frac{b+x}{c+y} = \frac{m}{n}$$

и

$$xy = a^2;$$

последнее уравнение легко получается из подобия треугольников DAM и NFA.

Вторая задача приводится к системе:

$$xy = a^2 \qquad (b+x)(c+y) = k^2.$$

Обе эти системы сводятся к квадратным уравнениям.

Третья задача Аполлония есть так называемая «проблема определённого сечения» (sectio determinata).

Даны четыре точки A, B, C, D на прямой; требуется определить пятую X так, чтобы отношение площади прямоугольника, построенного на XA и XB, к площади прямоугольника на XC и XD равнялось бы $\frac{m}{n}$.

Задача сводится к определению x из пропорции

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} = \frac{m}{n}$$

или к решению квадратного уравнения

$$n(x-a)(x-b) = m(x-c)(x-d).$$

33. Другое доказательство предложения 31. У Гейберга помещено в приложении и другое доказательство предложения 31, считаемое им неподлинным (чертёж тот же, что и для предложения 31).

«Иначе. Поскольку подобные фигуры находятся в двойном отношении соответственных сторон, то, значит, фигура на BC к фигуре на BA имеет двойное отношение CB к BA. Также и квадрат на BC имеет к квадрату на BA двойное отношение CB к BA. И, значит, как фигура на CB к фигуре на BA, так и квадрат на CB к квадрату на AB. Вот вследствие того же и как фигура на BC к фигуре на CA, так и квадрат на BC к квадрату на CA. Так что и как фигура на BC к фигурам на BA, AC, так и квадрат на BC к квадратам на BA, AC. Квадрат же на BC равен квадратам на BA, AC. Значит, и фигура на BC равна фигурам на BA, AC подобным и подобно построенным [что и требовалось доказать].

34. Обобщённая теорема Пифагора. Предложение 47 книги I говорит о том, что квадрат, построенный на гипотенузе, равен сумме квадратов, построенных на катетах. Предложение 31 книги VI утверждает то же о *любых подобных фигурах*, построенных на гипотенузе c и катетах a и b.

Мы в настоящее время эту теорему доказываем, *используя теорему Пифагора*. Если S_a, S_b, S_c — площади подобных фигур, построенных на катетах a, b и гипотенузе c, то

$$S_a:S_b = a^2:b^2, \quad S_c:S_b = c^2:b^2,$$
$$(S_a+S_b):S_b = (a^2+b^2):b^2,$$

откуда

$$(S_a+S_b):S_c = (a^2+b^2):c^2 = c^2:c^2,$$

так как по теореме Пифагора

$$a^2+b^2=c^2,$$

и, значит,

$$S_a+S_b=S_c.$$

Евклид сам не даёт такого доказательства; соответствующий текст Гейберг считает неподлинным.

В *модернизированной* форме доказательство Евклида ведётся так: если d и e — отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой, то $c:a=a:d \to a^2=cd$.

Если C и A подобные фигуры на c и a, то

$$C:A=c^2:a^2.$$

Но поскольку

$$a^2=cd,$$
$$C:A=c^2:cd=c:d.$$

Таким же образом

$$C:B=c:e,$$

откуда

$$C:(A+B)=c:(e+d)=c:c$$

и

$$C=A+B.$$

Интересно то, что при доказательстве этом *не используется теорема Пифагора.*

Клавий в комментарии к предложению 25 книги VI ставит задачу.

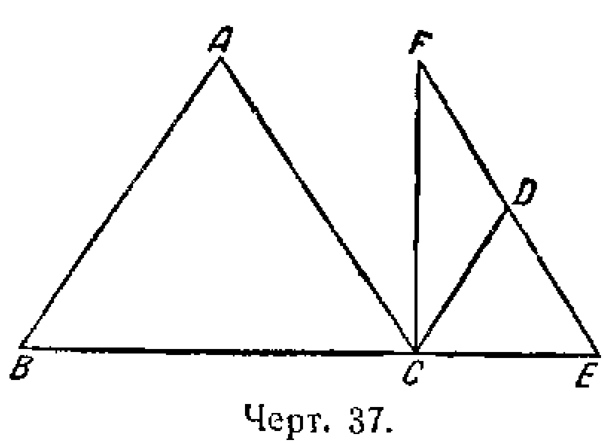
Дана прямолинейная фигура C; построить две подобные с суммой, равной C, и имеющие между собой данное отношение $\frac{m}{n}$.

Решение на основании предложения 3 книги V сводится к построению прямоугольного треугольника с данным отношением катетов.

Распространение этой теоремы на полуокружности ведёт к так называемым луночкам Гиппократа, игравшим большую роль в попытках построения квадратуры круга. Если в полуокружность впишем равнобедренный прямоугольный треугольник и на его катетах построим две полуокружности, то, применяя обобщённую теорему Пифагора, нетрудно доказать, что сумма площадей луночек, заключённых между дугами полуокружностей, построенных на катетах, и полуокружностью, построенной на гипотенузе — диаметре, равна площади построенного прямоугольного треугольника.

Нетрудно видеть, что та же самая теорема будет справедлива и для любого прямоугольного треугольника, вписанного в полуокружность.

35. **Два рода равенств и подобия.** Формулировка предложения 32 не может быть названа вполне точной. На черт. 37 мы имеем треугольники ABC и FDC с соответственно параллельными сторонами AB, AC и CD, DF и с общей вершиной C, но стороны FC и BC уже не образуют одной прямой.



Черт. 37.

Очевидно, здесь необходимо ещё одно условие.

Можно сказать, что основания должны быть *в ту же сторону* от параллельных сторон.

Но это добавочное условие можно выразить в лучшей форме, которая выявляет идеи, не выясненные самим Евклидом.

Обращаясь к предложению 4 книги I Начал, мы должны отметить два случая равенства треугольников:

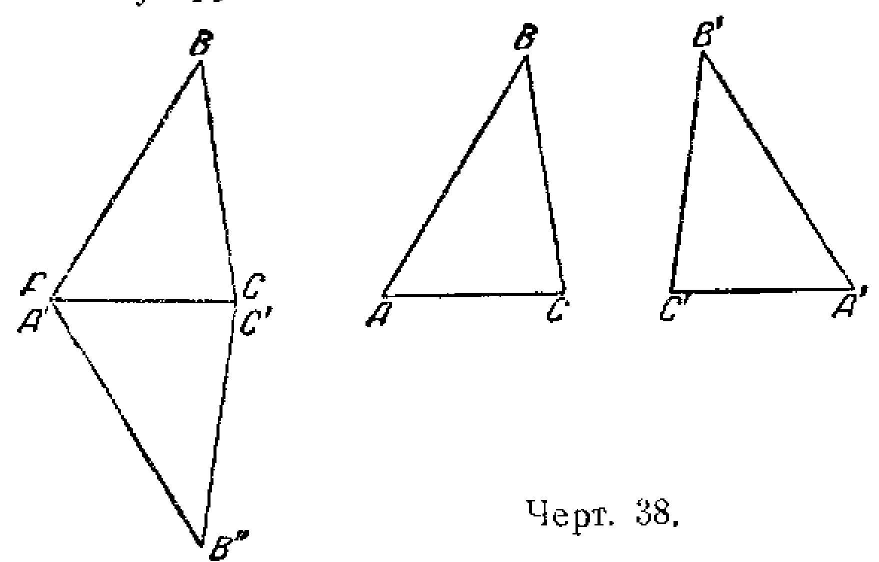
1) когда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ налагаются один на другой *передвижением по плоскости*;

2) когда передвижение по плоскости приводит $A'B'C'$ только в положение $A'B''C'$ и необходим ещё поворот вне плоскости около $A'C'$, чтобы совместить треугольники (черт. 38).

Можно назвать первый случай *собственной конгруэнцией*, а второй *симметричной конгруэнцией*.

Конечно, то же относится к подобию.

Мы указали, что подобные фигуры сводятся к гомотетичным. Но гомотетия может быть *прямая* и *обратная* (черт. 17). Соответственно этому и подобие может быть двух родов: *собственное подобие и симметричное подобие.* В предложении 32 книги VI Начал постулируется собственное подобие.



Черт. 38.

36. Другое доказательство предложения 33. В приложении к изданию Гейберга дано окончание доказательства предложения 33, принадлежащее Теону.

«Я утверждаю, что и как обвод *BC* к обводу *FI*, так и сектор *HBC* к сектору *GEI*.

Действительно, соединим *BC*, *CK*. И взявши на обводах *BC*, *CK* точки *X*, *O*, соединим также *BX*, *XC*, *CO*, *OK*.

И поскольку две *BH*, *HC* равны двум *CH*, *HK* и содержат равные углы, и основание *BC* равно *CK*, то, значит, и треугольник *HBC* [будет] равен треугольнику *HCK*. И поскольку обвод *BC* равен обводу *CK*, то и остающийся до целого круга обвод будет равен остающемуся до целого круга обводу, так что и угол *BXC* равен *COK*; значит, сегмент *BXC* будет подобен сегменту *COK*. И они на равных прямых *BC*, *CK*. Находящиеся же на равных прямых подобные сегменты кругов равны друг другу; значит, сегмент *BXC* равен сегменту *COK*. Также и треугольник *HBC* равен треугольнику *HCK* и, значит, весь сектор *BHC* равен всему сектору *HCK*. Вот вследствие того же и сектор *HKL* равен каждому из *HBC*, *HCK*. Значит, три сектора *HBC*, *HCK*, *HKL* равны друг другу. Вот вследствие того же и секторы *GEI*, *GIM*, *GMN* равны друг другу. Значит, сколько раз обвод *LB* кратен обводу *BC*, столько же раз и сектор *HBL* кратен сектору *HBC*. Вот вследствие того же и сколько раз обвод *NE* кратен обводу *EI*, столько же раз и сектор *GEN* кратен сектору *GEI*. Значит, если обвод *BL* равен обводу *EN*, то и сектор *BHL* равен сектору *EGN*, и если обвод *BL* больше обвода *EN*, то и сектор

BHL больше сектора *GEN*, и если меньше, то меньше. Вот для четырёх имеющихся величин — двух обводов *BC*, *EI* и двух секторов *HBC*, *EGI* — взяты равнократные обвода *BC* и сектора *HBC*, именно, обвод *BL* и сектор *HBL*, обвода же *EI* и сектора *GEI* равнократные обвод *EN* и сектор *GEN*; и показано, что если обвод *BL* больше обвода *EN*, то и сектор *BHL* больше сектора *EGN*, и если равны, то равны, и если меньше, то меньше. Значит, будет, что как обвод *BC* к *EI*, так и сектор *HBC* к сектору *GEI*.

Следствие

И ясно, что и как сектор к сектору, так и угол к углу».

37. Пропорциональность дуг и центральных углов. Об этом предложении следует сказать совершенно то же, что о предложении 1 книги VI: во-первых, его следует представить в *более развёрнутом виде*. Оно основывается на определении 5 книги V пропорции или *равенства* отношений

$$A:B = C:D,$$

в котором утверждается, что для всяких целых чисел m, n, для которых

$$mB \leqslant nA < (m+1)B,$$

также

$$mD \leqslant nC < (m+1)D.$$

Здесь A и B это дуги *BC* и *EN*, а C и D углы *BHL* и *EGN*, mB и nA дуги *BL* и *EN*, mD и nC углы *BHL* и *EGN*.

При этом, конечно, все рассуждения основываются на неявном применении архимедовой аксиомы. Отказываясь от евклидова определения равенств отношений, приходится пользоваться или *арифметизированным методом исчерпывания* (как это делается в учебниках Лежандрова типа) или же пользоваться *неявно понятием предела*, как это делается в современных учебниках.

Вторая половина предложения относится к секторам. Для доказательства равновеликости (по Евклиду равенства) элементарных секторов, играющих роль C и D в приведённой выше общей схеме, Теону приходится доказывать равенство сперва треугольников, затем сегментов, из которых состоят секторы.

Мы в настоящее время доказываем это *наложением*, как предложение 4 книги I.

ОГЛАВЛЕНИЕ